

## آزمون تئوری ششم - دسته‌ی دوم

روز پایانی آبان‌ماه ۱۳۹۲ - چهار ساعت

### پرسش نخست: ادغام

$k$  تا آرایه‌ی مرتب شده از اعداد صحیح به شما داده شده است. این  $k$  آرایه در مجموع شامل  $n$  عدد هستند. می‌خواهیم این آرایه‌ها را ادغام و آرایه‌ای مرتب شامل همه‌ی  $n$  عدد به دست بیاوریم. برای این کار هر بار می‌توانیم دو تا از آرایه‌ها را انتخاب و آن‌ها را در هم ادغام کرده و در جای جدیدی در حافظه ذخیره کنیم. ادغام دو آرایه به اندازه‌ی حاصل جمع طول آن‌ها طول می‌کشد. الگوریتمی از  $O(n \lg k)$  ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

### پرسش دوم: گراف یای انحصاری

یک گراف همبند با  $n$  رأس داریم که روی یکی از رأس‌های آن عدد یک و روی همه‌ی رأس‌های دیگر عدد صفر نوشته شده است. می‌خواهیم با این گراف بازی کنیم. در هر مرحله یکی از یال‌های گراف را حذف می‌کنیم و سپس عددهای نوشته شده روی رأس‌های گراف را تغییر می‌دهیم، به این شکل که عدد جدید هر رأس را برابر با حاصل XOR اعداد قدیمی همسایه‌هایش قرار می‌دهیم. پس از به روز رسانی اعداد رأس‌ها، دوباره یالی که حذف کرده‌ایم را سر جایش قرار می‌دهیم و بازی را ادامه می‌دهیم. هدف ما آن است که عدد همه‌ی رأس‌ها صفر شود.

(آ) آیا برای هر گراف کامل دلخواه می‌توانیم به هدف خود برسیم؟

(ب) آیا برای هر گراف همبند دلخواه می‌توانیم به هدف خود برسیم؟

### پرسش سوم: گراف رشته

یک گراف جهت‌دار بدون دور در نظر بگیرید که روی هر یال آن یکی از ۳۲ حرف الفبا نوشته شده است. رشته‌ی متناظر با یک مسیر در این گراف رشته‌ای است که از پشت سر هم نهادن حرف‌های نوشته شده روی یال‌های آن مسیر به دست می‌آید. یک مسیر زیبا، مسیری است که درجه‌ی خروجی رأس پایانی و درجه‌ی ورودی رأس آغازین آن صفر باشد.

می‌گوییم این گراف رشته‌ی  $S$  را می‌پذیرد، هرگاه مسیری زیبا در گراف وجود داشته باشد که رشته‌ی متناظرش  $S$  باشد.

به شما  $n$  رشته هر یک به طول حداکثر  $n$  داده شده است. شما باید گرانی با شرایط گفته شده و با کم‌ترین تعداد رأس ممکن بسازید که  $n$  رشته‌ی داده شده را بپذیرد و هیچ رشته‌ی دیگری را نپذیرد. الگوریتمی چندجمله‌ای برای ساختن این گراف ارائه دهید.

منم کی پادشاه می ور گدایه

گلیم پاره می درویش قبایه

نه کویا عاشقم نه دره پابند

جی بی جایی جهان می جاجیگایه

شیون فومنی