

بسمه تعالی

تحلیل عاملی

Factor analysis

فهرست مطالب

۴	۱. چکیده.....
۴	۲. مقدمه.....
۵	۳. تعریف تحلیل عاملی.....
۶	۴. درک مفهومی تحلیل عاملی و کاربرد آن.....
۶	۵. مفاهیم کلیدی در تحلیل عاملی.....
۷	۶. مدل عاملی مقدماتی.....
۸	۷. هدف تحلیل عاملی.....
۹	۸. مثال بار عاملی.....
۱۰	۸.۱. تفسیر و معنای عامل ها.....
۱۱	۹. انواع تحلیل عاملی.....
۱۱	۹.۱. تحلیل عاملی اکتشافی: (Exploratory factor analysis (EFA)).....
۱۱	۹.۲. تحلیل عاملی تاییدی: (Confirmatory factor analysis (CFA)).....
۱۲	۱۰. رابطه تحلیل عاملی با سایر فنون تحلیل آماری چند متغیری.....
۱۲	۱۱. کاربرد های تحلیل عاملی.....
۱۳	۱۲. مدل های تحلیل عاملی اکتشافی.....
۱۳	۱۳. مراحل اجرای تحلیل عاملی.....
۱۳	۱۴. تصمیم گیری در تحلیل عاملی.....
۱۴	۱۴.۱. معنی داری ماتریس همبستگی.....
۱۴	۱۴.۲. حجم نمونه.....
۱۴	۱۴.۳. انتخاب نوع ماتریس همبستگی.....
۱۵	۱۴.۴. انتخاب مدل عاملی.....

۱۴. ۵. روش استخراج عامل ها..... ۱۵
۱۴. ۶. انتخاب نهایی عامل ها..... ۱۵
۱۵. ۱۵. توصیه هایی درباره کاربرد تحلیل عاملی..... ۱۵
16. برخی از حوزه های کاربردی تحلیل عاملی..... ۱۶
۱۶. ۱. تحلیل عاملی در روانسنجی و روانشناسی..... ۱۶
۱۶. ۱. ۱. مزایا:..... ۱۷
16. 1. 2. معایب:..... ۱۷
۱۶. ۲. تحلیل عاملی در بازاریابی..... ۱۷
۱۶. ۱. ۲. گام های اساسی..... ۱۷
۱۶. ۲. ۲. جمع آوری داده ها..... ۱۷
۱۶. ۳. ۲. تحلیل داده ها..... ۱۸
۱۶. ۴. ۲. مزایا..... ۱۸
۱۶. ۵. ۲. معایب..... ۱۸
۱۶. ۳. سایر حوزه ها..... ۱۸
۱۷. ۱۷. منابع..... ۱۹

۱. چکیده

تحلیل عاملی یکی از فنون پیشرفته امار چند متغیری است که در جهت دستیابی به بسیاری از هدفهای علمی و پژوهشی مانند مدلسازی، فرضیه سازی، رواسازی تست ها، تشخیص پاره تست ها، و فراهم ساختن زمینه اجرای سایر روشهای پیشرفته اماری مانند رگرسیون چند متغیری و معادلات ساختاری به کار می رود. اما پیچیدگی و دشواری درک، اجرا تفسیر نتایج تحلیل عاملی موجب شده است بسیاری از کاربران بدون آشنایی با منطق زیر بنایی، محدودیتها و نیز دامنه کاربرد آن، به اجرا و بکارگیری یافته های حاصل از آن بپردازند و بدین ترتیب زمینه ساز تفسیرهای نامعتبر و ناروا و نیز تعمیم های نادرست از پدیده ها و متغیرهای مورد مطالعه گردند. تحقیق حاضر، به معرفی این تکنیک، کاربردها و روشهای پیاده سازی آن می پردازد.

۲. مقدمه

نخستین کار درباره تحلیل عاملی، توسط چارلز اسپیرمن (۱۹۴۰) صورت گرفت، که به گونه کلی « پدر » این روش شناخته شده است. بعد از او کارل پیرسن (۱۹۰۱)، روش «محورهای اصلی» را پیشنهاد کرد و هتلینگ (۱۹۳۳) آن را به گونه کاملتری توسعه داد.

بسیاری از کارهای نخستین در تحلیل عاملی، یعنی در طول سال های ۱۹۰۰ تا 1930، به کاربرد مدل اسپیرمن در بسیاری از مسایل عملی و بررسی شرایط مناسب برای استفاده از آن مدل اختصاص یافته است. در طول این دوره، علاوه بر خود اسپیرمن، دانشمندان دیگری مانند سیریل برت، کارل هلیزینگر، ترومن کلی، کارل پیرسن و گادفری تامسون، کمک های شایانی به ادبیات تحلیل عاملی کرده اند. در اوایل سال ۱۹۳۰، آشکار شد که مدل تک عاملی عمومی اسپیرمن برای توصیف روابط بین متغیرهای یک مجموعه همیشه کافی نیست.

ترستون احتمالاً برجسته ترین تحلیلگر عاملی نوین بوده و نفوذ قابل ملاحظه ای در توسعه این روش از سال های ۱۹۳۰ تا کنون داشته است. مسئولیت توسعه روش «سانتروئید» با اوست که در مقیاس گسترده ای قبل از ظهور کامپیوترهای پر سرعت به کار رفته است. او همچنین مسئول مفهوم ساختار ساده است که توسط بیشتر تحلیلگران به عنوان معرف یک راه حل تحلیل عاملی ایده آل در نظر گرفته شده است.

کارهای اولیه در تحلیل عاملی که توسط دانشمندان یاد شده انجام گرفته، بیشتر توجیه نظری دارد، هر چند هیچ یک از آن ها آماده برای آزمون های آماری فرضیه های خاص درباره ساختارهای عاملی مجموعه های معینی از متغیرها نبوده است. اما، وقتی کامپیوترهای پر سرعت در اختیار قرار گرفت در اواسط تا اواخر سال های ۱۹۵۰، حرکتی از تئوری گرائی به سوی آنچه تحلیل عاملی اکتشافی نامیده می شود، به وجود آمد. این حرکت به گونه آشکار از طریق تئوری عامل مشترک ترستون تشویق، و از طریق فرمول بندی عمومی هتلینگ (1993)، درباره عملیات ریاضی مولفه های اصلی که قبل از آن به دلیل محاسبات فوق العاده پیچیده و پرزحمت آن، به کار نرفته بود تسهیل شد. چنین به نظر می رسد که در طول سال های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، تقریباً هر کس، هر چیزی را تحلیل عاملی می کرده است، به این امید که روابط پیچیده ظاهری بین متغیرهای یک مجموعه را می توان ساده کرد و به

گونه ساده تری تفسیر نمود (لیندمن و همکاران، ۱۹۸۰). در طول این دوره همچنین تعداد روشهای تحلیل عاملی با ابداع تحلیل تصویر (گاتمن، ۱۹۵۳)، تحلیل عاملی بنیادی (رائو، ۱۹۵۵) و (هریس، ۱۹۶۲)، تحلیل عاملی آلفا (کیسر و کافری، ۱۹۶۵) و روش کمترین پس ماند (هامن و جونز، ۱۹۶۶)، به گونه قابل توجهی توسعه یافت. با این وجود، روشهای تحلیل اکتشافی نتوانست آن گونه که انتظار می رفت، کمک موثری برای آزمون و پالایش تئوری روان شناختی باشد.

مقاله هتلینگ (۱۹۳۳) درباره تحلیل مولفه های اصلی نخستین کمک قابل توجه یک آماردان را به تحلیل عاملی معرفی کرد، و این وضعیت تا موقعی ادامه داشت که مقاله لاولی (۱۹۴۰) درباره روش بیشینه احتمال (ML) منتشر شد. لاولی نشان داد که تحلیل عاملی می تواند به عنوان یک تکنیک آماری جالب در بسیاری از موقعیت های پژوهشی کاربرد داشته باشد. واکنش های له و علیه این روشها نیز تا وقتی که آزمون فرضیه های خاص درباره پارامترهای مدل تحلیل عاملی مورد توجه قرار گرفت (مثلا جاززکاگ، ۱۹۸۴)، همچنان ادامه داشت. هر چند کارهای جاززکاگ اساسا مبتنی بر روش ML لاولی بود، اما بسیاری از مسایل محاسباتی و تفسیری را که لاولی با آن مرتبط نبود، روشهای باک و بارگمن (۱۹۶۶) و جاززکاگ (۱۹۸۴) به سبب تاکید بر آزمون فرضیه، به عنوان روشهای تحلیل عاملی تاییدی طبقه بندی می شود. هر چند تولید فرضیه هایی که باید آزمون شود اغلب دشوار است، اما این روشها به وضوح بر تحلیل عامل اکتشافی به سبب توسعه و آزمون تئوری مزیت دارد. البته برای تدوین چنین فرضیه هایی می توان ابتدا تحلیل عاملی اکتشافی را اجرا کرد و سپس این فرضیه ها را از طریق تحلیل عاملی تاییدی آزمود.

۳. تعریف تحلیل عاملی

برای تحلیل عاملی، تعاریف مختلفی ارائه شده است که از آن میان می توان به موارد ذیل اشاره کرد:

- تحلیل عاملی نامی است عمومی برای برخی از روشهای چند متغیره که هدف اصلی آن خلاصه کردن داده هاست. این روش به بررسی همبستگی درونی تعداد زیادی از متغیرها می پردازد و در نهایت آنها را در قالب عاملهای عمومی محدودی دسته بندی کرده تبیین می کند. در این تکنیک تمام متغیرها به عنوان متغیر وابسته قرار می گیرد.
- تحلیل عاملی روشی به هم وابسته بوده که در آن کلیه متغیرها بطور همزمان مد نظر قرار می گیرد. در این تکنیک، هریک از متغیرها به عنوان یک متغیر وابسته لحاظ می گردد.
- **تحلیل عاملی** یک شیوه آماری است که می تواند جهت تحلیل روابط متقابل میان گروه بزرگی از متغیرها و برای توصیف این متغیرها براساس ابعاد مشترک پنهان میان عوامل به کار رود. این شیوه آماری به یافتن راهی جهت تلخیص اطلاعات موجود در تعدادی متغیرهای اصلی می پردازد و آنها را به یک سری عامل های کوچکتر با کمترین میزان ریزش اطلاعات تبدیل می کند.

۴. درک مفهومی تحلیل عاملی و کاربرد آن

بنا بر آنچه گفته شد، تحلیل عاملی تکنیکی است که کاهش تعداد زیادی از متغیرهای وابسته به هم را به صورت تعداد کوچکتری از ابعاد پنهان یا مکنون امکان پذیر می سازد. هدف عمده آن رعایت اصل اقتصاد و صرفه جویی از طریق کاربرد کوچکترین مفاهیم تبیین کننده به منظور تبیین بیشینه مقدار واریانس مشترک در ماتریس همبستگی است. مفروضه اساسی تحلیل عاملی این است که عامل های زیربنایی متغیرها را می توان برای تبیین پدیده های پیچیده به کاربرد و همبستگی های مشاهده شده بین متغیرها، حاصل اشتراک آنها در این عامل ها است. هدف تحلیل عاملی تشخیص این عامل های مشاهده ناپذیر بر پایه مجموعه ای از متغیرهای مشاهده پذیر است. عامل، متغیر جدیدی است که از طریق ترکیب خطی نمره های اصلی متغیرهای مشاهده شده بر پایه فرمول زیر برآورد می شود:

$$F_j = \sum W_{ji} X_i = W_{j1} X_1 + W_{j2} X_2 + \dots + W_{jp} X_p$$

که در آن W ها بیانگر ضرایب نمره عاملی و P معرف تعداد متغیرها است. این عامل ها، فی نفسه، سازه های فرضی یا نظری هستند که به تفسیر ثبات و هماهنگی در مجموعه داده ها کمک می کنند. بنابراین ارزش تحلیل عاملی این است که طرح سازمانی مفیدی ارائه می دهد که می توان آن را برای تفسیر انبوهی از رفتار با بیشترین صرفه جویی در سازه های تبیین کننده، به کار برد.

امید این است که تعداد کمی از این عامل ها (یعنی ترکیب های خطی نمره های اصلی متغیرهای مشاهده شده) بتواند تقریباً همه اطلاعاتی را که توسط مجموعه بزرگتری از متغیرها به دست می آید در بر گرفته در نتیجه توصیف ویژگی های فرد را ساده سازد. از این گذشته امیدوار هستیم که با توسعه صحیح عامل ها، متغیرهایی به وجود آوریم که دلالت بر یک سازه روشن و با معنای روان شناختی داشته باشد به گونه ای که توصیف ما از شخص نه فقط ساده تر، بلکه روشن تر و قاطع تر باشد.

۵. مفاهیم کلیدی در تحلیل عاملی

قبل از پرداختن به این تکنیک آماری، لازم است برخی از مفاهیم کلیدی این روش معرفی گردند.

- ❖ **اشتراک^۱**: میزان واریانس مشترک بین یک متغیر با سایر متغیرهای بکار گرفته شده در تحلیل.
- ❖ **مقدار خاص^۲**: میزان واریانس تبیین شده بوسیله هر عامل را بیان می کند. یکی از ضوابط پرکاربرد در تعیین تعداد عاملها، مقدار ویژه است که آن را معیار راکد نیز می گویند. در تحلیل عاملی مقدار ویژه برابر ۱ می باشد ولی ما می توانیم در بسته آماری این مقدار را زیاد کنیم. در تحلیل عاملی مولفه های اصلی آنها هستند، که

¹ communality

² Eigenvalue

مقدار ویژه آنان بیشتر از ۱ باشد. ولی اگر این مقدار کمتر از ۱ باشد، عاملهای مورد نظر از لحاظ اماری معنی دار نیست و باید از تحلیل کنار گذاشته شود.

❖ **عامل^۱**: عبارتست ترکیب خطی متغیرهای اصلی، که نشان دهنده خلاصه ای از متغیرهای مشاهده شده است.

❖ **بار عاملی^۲**: همبستگی بین متغیرهای اصلی و عوامل. مجذور مقادیر بار عاملی، نشان می دهند که چند درصد از واریانس در یک متغیر توسط آن عامل تبیین می شود.

❖ **ماتریس عاملی^۳**: جدولی است که بارهای عاملی کلیه متغیرها را در هر عامل نشان می دهد.

❖ **چرخش عاملی^۴**: فرآیندی برای تعدیل محور عامل به منظود دستیابی به عاملهای معنی دار و ساده است. یکی

از مفاهیم مهم در تحلیل عاملی چرخش^۵ عاملهاست. که این مفهوم دقیقا به همان معنا دلالت دارد که در فرآیند چرخش عاملی، محورهای مختصات عاملها را به دور مبدا چرخش داده است تا اینکه موقعیت جدیدی را بدست آورد ما در اینجا دونوع چرخش داریم:

۱- چرخش متعامد^۶

۲- چرخش متمایل^۷

چرخش متعامد: عاملها مستقل از یکدیگر هستند.

چرخش متمایل: عاملها بایکدیگر همبستگی دارند.

۶. مدل عاملی مقدماتی

در یک مدل تحلیل عاملی، متغیرهای مشاهده شده y_1, y_2, \dots, y_p بصورت ترکیبات خطی تعداد کمتری از متغیرهای تصادفی غیرقابل مشاهده f_1, f_2, \dots, f_m ($m < p$) (عامل ها) بیان می شوند. بنابراین تحلیل عاملی با تحلیل مؤلفه اصلی تفاوت دارد. در تحلیل مؤلفه اصلی، مؤلفه های اصلی بصورت ترکیبات خطی از y ها تعریف می شوند. بنابراین بطور کلی می توان گفت تفاوت تحلیل عاملی و مؤلفه اصلی در اهداف آنهاست؛ یعنی هدف اصلی در تحلیل مؤلفه های اصلی کاهش بعد از یک فضای بزرگتر به یک زیرفضا می باشد که بیشتر تغییرات در مشاهدات اولیه را در خود حفظ کند، در حالیکه تحلیل عاملی با فرض وجود تعداد معینی از عامل های غیر قابل مشاهده، بدنبال یافتن ضرایب مربوط به ترکیب خطی از پاسخ ها می باشیم.

¹ Factor

² Factor Loading

³ Factor Matrix

⁴ Factor Rotation

⁵ Rotated

⁶ Orthogonal

⁷ Oblique

مثال:

اولین مقاله مهم در زمینه تحلیل عاملی که توسط اسپیرمن (۱۹۰۴) ارائه شد در مورد عملکرد امتحان دانش آموزان در درس ادبیات (X_1)، درس زبان فرانسه (X_2) و درس زبان انگلیسی (X_3) بود که ماتریس همبستگی آن بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & .83 & .78 \\ & 1 & .67 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

با اینکه ماتریس فوق دارای رتبه کامل است ولی می توانیم به گونه ای مناسب و مفید با ارائه سه متغیر زیر ابعادش را از $p=3$ به $p=1$ کاهش دهیم:

$$x_1 = \lambda_1 f + \varepsilon_1 \quad x_2 = \lambda_2 f + \varepsilon_2 \quad x_3 = \lambda_3 f + \varepsilon_3$$

در این معادلات، f یک عامل مشترک اصلی است و λ_1 و λ_2 و λ_3 به بارهای عاملی مشهورند. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ را جمله های تصادفی خطا گوئیم. عامل مشترک f را می توان به عنوان استعداد کلی دانش آموز تفسیر کرد و اگر x_i دقیقاً به استعداد دانش آموز وابسته باشد، آنگاه ε_i دارای واریانس کوچکی است. تغییرات ε_i دارای دو قسمت است که در عمل برای تفکیک آن کوشش نخواهیم کرد. اولاً این واریانس نشان می دهد که استعداد یک دانش آموز فرضاً در درس ادبیات با استعداد کلی او تفاوت دارد و دوماً اینکه این واریانس در واقع نشان می دهد که نمره امتحان تنها اندازه تقریبی از استعداد دانش آموز در آن درس است.

۷. هدف تحلیل عاملی

بسیاری از روش های آماری روابط بین متغیرهای مستقل و وابسته را بررسی می کنند، اما تحلیل عاملی با آنها تفاوت دارد. این روش برای مطالعه الگوی روابط میان تعداد زیادی متغیر وابسته به کار میرود، هدف آن کشف چیزی درباره ماهیت متغیرهای مستقلی است که بر آنها تاثیر می گذارد، حتی اگر این متغیرها هرگز به گونه مستقیم اندازه گیری نشده باشد. از این رو، نتایجی که از طریق تحلیل عاملی به دست می آید در مقایسه با واقعیتی که از مشاهده مستقیم متغیرهای مستقل حاصل میشود، موقتی تر و نظری تر است. متغیرهای مستقلی که از این طریق استنباط میشود عامل نام دارد.

تحلیل عاملی می تواند به چهار پرسش عمده پاسخ دهد.

۱. برای تبیین الگوی روابط بین متغیرها به چند عامل مختلف نیاز است؟
۲. ماهیت این عوامل چیست؟
۳. عاملهای نظری چگونه می توانند دادهای مشاهده شده را تبیین کنند؟

۴. چه مقدار از واریانس هر متغیر مشاهده شده اساساً تصادفی یا یگانه است؟

بنابراین، هدف تحلیل عاملی کشف ساده ترین الگوهای میان الگوهای مربوط به روابط میان متغیرهاست. این روش به دنبال درک این مطلب است که آیا متغیرهای مشاهده شده را می توان برپایه تعداد کمتری متغیر(عامل) به گونه وسیع و اساسی تبیین کرد. از این رو، هدف های عمده تحلیل عاملی را می توان به شرح زیر بیان کرد:

۱. کاهش تعداد زیادی متغیر به تعداد کمتری عامل به منظور مدل سازی. زیرا اگر تعداد متغیرها زیاد باشد، مدل سازی برای همه اندازه ها به گونه انفرادی امکان پذیر نیست. به همین دلیل، تحلیل عاملی با مدل سازی های مربوط به تکنیک معادلات ساختاری یکپارچه شده و به تولید متغیرهای مکنون که از طریق مدل سازی معادله ساختاری به وجود می آید، کمک میکند. با وجود این، تحلیل عاملی را می توان به عنوان نوعی تکنیک متکی به خود برای هدف های مشابه نیز به کار برد.
۲. گزینش یک پاره تست از مجموعه زیادی سوال که دارای بیشترین همبستگی با مولفه های اصلی باشد.
۳. تولید مجموعه ای از عوامل به عنوان متغیرهای ناهمبسته به گونه ای که با اصطلاح همخطی بودن چند گانه در روش رگرسیون چند متغیری نزدیک باشد
۴. روا سازی یک مقیاس یا شاخص از طریق تعیین بار مواد سازنده مقیاس بر روی عامل های استخراج شده.
۵. تهیه تست های چندگانه ای که تنها یک عامل را بسنجد و اجرای تست های کمتری را ممکن سازد
۶. تعیین خوشه هایی از آزمودنی ها
۷. تعیین گروه ها از طریق مشخص کردن مجموعه افرادی که در یک خوشه قرار دارند

۸. مثال بار عاملی

متغیر	عامل ۱	عامل ۲	عامل ۳
هوش	۰/۸۲	۰/۶۳	۰/۴۴
هوش غیر شفاهی	۰/۷۸	۰/۳۵	۰/۵۱
لغات	۰/۶۸	۰/۶۴	۰/۲۱
قافیه و عروض	۰/۲۸	۰/۵۹	۰/۱۸
جبر	۰/۴۵	۰/۲۰	۰/۳۸
هندسه	۰/۵۰	۰/۱۷	۰/۶۹
فیزیک	۰/۴۱	۰/۱۳	۰/۳۷

متغیر	عامل ۱	عامل ۲	عامل ۳
لاتین	۰/۵۸	۰/۷۰	۰/۲۰
فرانسه	۰/۳۲	۰/۶۸	۰/۱۷
تاریخ	۰/۲۵	۰/۴۳	۰/۱۲
مهندسی	۰/۴۹	۰/۰۹	۰/۶۰

۱.۸. تفسیر و معنای عامل‌ها

۱- نتایج حاصل از تحلیل عاملی، تنها تعداد عامل‌ها را نشان می‌دهد. معنای این عامل‌ها از بارهای عاملی استنتاج می‌شود. بارهای عاملی مقادیری هستند که در تحلیل عاملی محاسبه می‌شوند.

در تمام تفسیرهایی که بر اساس بارهای عاملی از عامل‌ها صورت می‌گیرد باید در مقابل یک معیار بیرونی رواسازی شود.

۲- بارهای عاملی نشان‌دهنده میزان همبستگی متغیرها با عامل‌هاست. چنانچه این همبستگی بیشتر از ۰/۶ باشد به عنوان بار عاملی بالا (بدون توجه به علامت منفی یا مثبت) و چنانچه بیشتر از ۰/۳ باشد به عنوان بارهای عاملی نسبتاً بالا در نظر گرفته می‌شوند. بارهای کمتر از ۰/۳ را می‌توان نادیده گرفت.

۳- در جدول فوق، عامل ۱ با تمام دروس همبستگی دارد ولی همبستگی آن با آزمون هوش بسیار بالاست. با توجه به همبستگی عامل ۱ با سایر دروس، به نظر می‌رسد که عامل اول را می‌توان به عنوان «هوش» قلمداد کرد.

۴- عامل ۲، توانایی بیان شفاهی است. زیرا روی تمام دروسی که متضمن زبان هستند بار عاملی بالایی دارد ولی روی آزمون‌های دیگر بار عاملی آن نسبتاً پایین است.

۵- عامل ۳، روی هوش، هندسه و مهندسی بار عاملی بالایی دارد. دو درس اخیر مستلزم توانایی تعیین وضعیت اشیاء در فضا است، بنابراین عامل ۳ را می‌توان توانایی تجسم فضایی در نظر گرفت.

۹. انواع تحلیل عاملی

تحلیل عاملی بسته به هدفی که محقق در استفاده از آن دارد به دو نوع تقسیم می شود:

۱. تحلیل عاملی اکتشافی

۲. تحلیل عاملی تأییدی

۹.۱. تحلیل عاملی اکتشافی: (*Exploratory factor analysis (EFA)*)

در این تحلیل پژوهشگر به دنبال بررسی داده‌های تجربی به منظور کشف و شناسایی شاخص‌ها و نیز روابط بین آنهاست و این کار را بدون تحمیل هر گونه مدل معینی انجام می‌دهد. به بیان دیگر تحلیل اکتشافی علاوه بر آنکه ارزش تجسسی یا پیشنهادی دارد می‌تواند ساختار ساز، مدل ساز یا فرضیه ساز باشد.

تحلیل اکتشافی وقتی به کار می‌رود که پژوهشگر شواهد کافی قبلی و پیش تجربی برای تشکیل فرضیه درباره تعداد عامل‌های زیربنایی داده‌ها نداشته و به واقع مایل باشد درباره تعیین تعداد یا ماهیت عامل‌هایی که همپراشی بین متغیرها را توجیه می‌کنند داده‌ها را بکاود. بنابر این تحلیل اکتشافی بیشتر به عنوان یک روش تدوین و تولید تئوری و نه یک روش آزمون تئوری در نظر گرفته می‌شود.

تحلیل عاملی اکتشافی روشی است که اغلب برای کشف و اندازه‌گیری منابع مکنون پراش و همپراش در اندازه‌گیری‌های مشاهده شده به کار می‌رود. پژوهشگران به این واقعیت پی برده‌اند که تحلیل عاملی اکتشافی می‌تواند در مراحل اولیه تجربه یا پرورش تستها کاملاً مفید باشد. توانشهای ذهنی نخستین ترستون، ساختار هوش گیلفورد نمونه‌های خوبی برای این مطلب می‌باشد. اما هر چه دانش بیشتری درباره طبیعت اندازه‌گیری‌های روانی و اجتماعی به دست آید ممکن است کمتر به عنوان یک ابزار مفید به کار رود و حتی ممکن است بازدارنده نیز باشد. این نوع تجزیه و تحلیل از طریق نرم افزارهای SPSS یا SAS یا LISREL قابل محاسبه است.

از سوی دیگر بیشتر مطالعات ممکن است تا حدی هم اکتشافی و هم تأییدی باشند زیرا شامل متغیر معلوم و تعدادی متغیر مجهول‌اند. متغیرهای معلوم را باید با دقت زیادی انتخاب کرد تا حتی الامکان درباره متغیرهای نامعلومی که استخراج می‌شود اطلاعات بیشتری فراهم‌آید. مطلوب آن است که فرضیه‌ای که از طریق روش‌های تحلیل اکتشافی تدوین می‌شود از طریق قرار گرفتن در معرض روش‌های آماری دقیق‌تر تأیید یا رد شود. تحلیل اکتشافی نیازمند نمونه‌هایی با حجم بسیار زیاد می‌باشد.

۹.۲. تحلیل عاملی تأییدی: (*Confirmatory factor analysis (CFA)*)

در این مدل، پژوهشگر به دنبال تهیه مدلی است که فرض می‌شود داده‌های تجربی را بر پایه چند پارامتر نسبتاً اندک، توصیف تبیین یا توجیه می‌کند. این مدل مبتنی بر اطلاعات پیش تجربی درباره ساختار داده‌هاست که می‌تواند به شکل: (۱) یک تئوری یا فرضیه (۲) یک طرح طبقه‌بندی کننده معین برای گویه‌ها یا پاره تستها در

انطباق با ویژگی‌های عینی شکل و محتوا، ۳) شرایط معلوم تجربی و یا ۴) دانش حاصل از مطالعات قبلی درباره داده‌های وسیع باشد.

تمایز مهم روش‌های تحلیل اکتشافی و تاییدی در این است که روش اکتشافی با صرفه‌ترین روش تبیین واریانس مشترک زیربنایی یک ماتریس همبستگی را مشخص می‌کند. در حالی که روش‌های تاییدی (آزمون فرضیه) تعیین می‌کنند که داده‌ها با یک ساختار عاملی معین (که در فرضیه آمده) هماهنگ اند یا نه.

۱۰. رابطه تحلیل عاملی با سایر فنون تحلیل آماری چند متغیری

مقصود فنون تحلیل عاملی چند متغیری تحلیل کوواریانس چند متغیری است. فنونی مانند تحلیل واریانس چند متغیری، رگرسیون چند متغیری، تحلیل تابع تشخیصی موقعی مناسب برای پیش بینی های چند متغیره است. در این موارد برای بررسی وضعیت آزمودنی ها اطلاعاتی از پیش بینی کننده ها در دسترس است و در ضمن متغیر ملاک یک متغیر است مانووا می تواند در زمانی که پیش بینی شونده بشتر از یک متغیر است نیز استفاده شود.

تفاوت بین تحلیل عاملی و تحلیل خوشه ای نیز به واریانس های تحلیل شده برمی گردد. واریانس در یک آزمون یا مشترک است که مربوط به چند سوال یا خرده آزمون است و یا واریانس یگانه است. این واریانس مربوط به یک سوال یا خرده آزمون می شود. تحلیل عاملی واریانس مشترک را در بر می گیرد و لی تحلیل خوشه ای شامل هر دو نوع واریانس می شود. در تحلیل عاملی واریانس یک تست یا متغیر تجزیه و بین چندین عامل توزیع می شود بر عکس در تحلیل خوشه ای واریانس سوال یا متغیر به گروهی اختصاص داده می شود که بیشترین همبستگی را دارد. تحلیل عاملی را می توان برای مطالعه ی ساختار مجموعه ای از متغیرها یا تست ها بکار رد و زمانی بکار می رود که پژوهشگر قصد دارد می خواهد واریانس مشترک یک تست را به تعداد کوچکتری از متغیرها که مفهومی معنادار دارد کاهش دهد و درک کند که ساختار هر واحد اساسی چگونه است در حالی که تحلیل خوشه ای زمانی استفاده می شود که قصد داریم متغیرها را از طریق گروه بندی به شکل مجموعه ای طبقه بندی کنیم. تحلیل خوشه ای در توسعه ی نظام های شغلی و در تشخیص انواع مختلف مردم استفاده می شود .

مفروضه ی اساسی تحلیل عاملی این است که عامل های زیربنایی متغیرها را می توان برای تبیین پدیده های پیچیده بکار برد و همبستگی های مشاهده شده بین متغیرها حاصل اشتراک آنها در این عامل ها است .

داده های حاصل از تست ها عملا نمره هایی است که به درجات مختلف با یکدیگر همپوشی دارند. همپوشی بین متغیرها میزان موثر بودن پیش بینی کننده ها را محدود می سازد. به کمک تحلیل عملی می توانیم ابعاد کمتر و موثرتری را بیابیم. به این امید که ابعاد کوچکتر بتوانند همه ی اطلاعات را پوشش دهند. این ابعاد توصیف ما را روشن تر، قاطع تر و واضح تر می سازد .

۱۱. کاربرد های تحلیل عاملی

کاربردهای تحلیل عاملی عبارتند از:

۱. رواسازی و توسعه ی ابزارهای روان سنجی
۲. کمک به تدوین فرضیه با کشف سازه های جدید
۳. تحلیل محتوا

۱۲. مدل های تحلیل عاملی اکتشافی

دو نوع کاملاً متمایز تحلیل را شامل می شوند: تحلیل مولفه ای و تحلیل عامل مشترک. مقدار و نوع واریانس هر متغیر که توسط عامل ها توجیه می شود مبنای تفاوت بین این دو نوع تحلیل است.

در تحلیل مولفه ای مانند تحلیل خوشه ای هم واریانس مشترک و هم واریانس یگانه توجیه می شود. بنابراین از لحاظ نظری باید تعداد مولفه ها با تعداد متغیرها برابر باشند چون بنابر آن چه گفته شد باید واریانس هر متغیر توسط عامل ها توجیه شود. اما در تحلیل عامل مشترک همانطور که از اسم آن پیدا است فقط واریانس مشترک توسط عامل ها توجیه می شوند و بنابر اصل صرفه جویی تعداد عوامل می تواند کمتر از تعداد متغیرها باشد. در تحلیل مولفه ای اصلی عامل ها توجیه کننده ی واریانس هر متغیر و در تحلیل عامل مشترک عامل ها توجیه کننده ی همبستگی بین متغیرها است. واریانس ها در تحلیل عاملی چه معنی می دهند؟ در تحلیل عاملی مشترک واریانس هر متغیر تشکیل شده از واریانس مشترک و واریانس اختصاصی. در تحلیل عاملی مولفه های اصلی عامل ها تمام واریانس ها را توجیه می کنند. اگر عامل های مشترک متعامد باشند همبستگی بین دو متغیر برابر با مجموع حاصلضرب بارهای عاملی است.

۱۳. مراحل اجرای تحلیل عاملی

مراحل اجرای تحلیل عاملی عبارتند از:

۱. جمع آوری داده ها و ایجاد ماتریس همبستگی
۲. استخراج راه حل عاملی اولیه
۳. چرخش دورانی و تفسیر
۴. ساخت مقیاس ها با امتیازات عاملی برای استفاده در تحلیل های بعدی

۱۴. تصمیم گیری در تحلیل عاملی

هدف اصلی تحلیل عاملی تلخیص تعداد زیادی از متغیرها در تعداد محدودی از عاملها می باشد، بطوریکه در این فرایند کمترین میزان گم شدن اطلاعات وجود داشته باشد. با توجه به هدف تحلیل عاملی محقق سوالاتی از خود می پرسد چه نوع متغیرهای باید در تحلیل به کار گرفته شود. در پاسخ به این سوال باید گفت که هر متغیری مرتبط با مسئله تحقیق را می توان در تحلیل به کار گرفت.

۱.۱۴. معنی داری ماتریس همبستگی

یکی از روشهای انتخاب متغیرهای مناسب برای تحلیل عاملی استفاده از ماتریس همبستگی است که اساس روش تحلیل عاملی برای انتخاب متغیرها به عاملهای متفاوت استفاده از همبستگی بین متغیرها اما از نوع غیر علی استوار است. البته آمارهای دیگری وجود دارد که محقق از طریق آنها نیز قادر به تعیین و تشخیص مناسب بودن داده ها برای تحلیل عاملی می باشد از جمله این روشها آزمون KMO^1 می باشد که مقدار آن همواره بین ۱۰ و ۱ می باشد و در صورتی که این مقدار کمتر از ۰.۵۰ باشد داده ها برای تحلیل عاملی مناسب نخواهد بود و اگر مقدار آن بین ۰.۵۰ تا ۰.۶۹ باشد درصد بیشتری با احتیاط بیشتر می توان به تحلیل عاملی پرداخت. اما در صورتی که این مقدار بیشتر از ۰.۷۰ درصد باشد همبستگی موجود میان داده ها برای تحلیل داده ها مناسب خواهد بود.

و از سوی دیگر برای اطمینان از داده ها برای تحلیل عاملی مبنی بر اینکه ماتریس همبستگی که پایه تحلیل عاملی قرار می گیرد در جامعه برابر صفر است یا خیر باید از آزمون بارتلت^۲ استفاده کنیم. این آزمون معناداری تحلیل عاملی داده ها را می سنجد و اگر این مقدار کمتر از ۰.۰۵ باشد داده ها با جامعه مورد معنی دار است.

۲.۱۴. حجم نمونه

در رابطه با حجم نمونه نیز باید تاکید کرد که تعداد حجم نمونه نباید کمتر از ۵۰ مورد باشد و ترجیحا حجم نمونه را به بیش از ۱۰۰ مورد افزایش داد. به عنوان قاعده کلی تعداد نمونه باید حدود چهار یا پنج برابر تعداد متغیرهای مورد استفاده باشد. که در این تحقیق حجم نمونه ۵۰ مورد می باشد. (سرمد و دیگران، ۱۳۸۵: ۲۵۸)

۳.۱۴. انتخاب نوع ماتریس همبستگی

بعد از اطمینان داشتن به داده ها برای تحلیل عاملی، اولین تصمیم در بکارگیری تحلیل عاملی، محاسبه ماتریس همبستگی است. برای اینکار باید مشخص شود که آیا هدف، محاسبه همبستگی بین متغیرهاست یا بین پاسخگویان. اگر هدف تحقیق تلخیص متغیرها باشد در این صورت از همبستگی بین متغیرها محاسبه شود که این روش یکی از تکنیک های عمومی و پرکاربرد در مطالعات می باشد که به تحلیل عاملی نوع R معروف است. اما تحلیل عاملی ممکن است برای ماتریس همبستگی بین پاسخگویان نیز بکار گرفته شود این نوع تحلیل را تحلیل نوع Q می نامند. این نوع تحلیل عاملی شاید بدلیل مشکل بودن کمتر مورد استفاده قرار گیرد و بجای آن از روشهای نظیر تحلیل خوشه ای یا گروهبندی سلسله مراتبی برای طبقه بندی پاسخگویان یا موارد استفاده می شود که در این تحقیق با توجه به هدف اصلی تحقیق، ماتریس همبستگی از نوع R استفاده گردیده است.

¹ Kaiser-Meyer-Olkin

² Bartlett Test

۴.۱۴. انتخاب مدل عاملی

در تحلیل عاملی مدل‌های مختلفی وجود دارد که از میان آنها دو روش تحلیل مولفه‌های اصلی و تحلیل عاملی مشترک از پر کاربردترین این روش‌هاست. انتخاب هر یک از مدل‌ها به هدف محقق بستگی دارد. مدل تحلیل مولفه‌های اصلی زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که هدف محقق تلخیص متغیرها و دستیابی به تعداد محدودی عامل برای اهداف پیش‌بینی شده باشد و در مقابل تحلیل عاملی مشترک زمانی بکار می‌رود که هدف شناسایی عاملها یا ابعادی باشد که به سادگی قابل شناسایی نیستند.

۵.۱۴. روش استخراج عامل‌ها

علاوه بر انتخاب مدل تحلیل، محقق باید مشخص کند که عاملها چگونه باید استخراج شوند. برای استخراج عاملها دو روش وجود دارد. عاملهای متعامد و عاملهای متمایل. در روش متعامد، عاملها به شیوه انتخاب می‌گردند که محورهای عاملی در حالت ۹۰ درجه قرار می‌گیرند و این بدین معناست که هر عامل، مستقل از سایر عاملها می‌باشد. بنابراین، همبستگی بین عاملها، بطور قراردادی صفر تعیین می‌گردد. مدل عاملی متمایل پیچیده‌تر از مدل عاملی متعامد می‌باشد. در واقع در این روش فرآیند تحلیلی کاملاً رضایت بخش بدست نمی‌آید. در این روش عاملهای استخراج شده دارای همبستگی می‌باشند. انتخاب اینکه چرخش عاملها بر اساس متعامد و یا متمایل باشد باید بر اساس نیازهای محقق و مسئله تحقیق وجود دارد انجام گیرد.

۶.۱۴. انتخاب نهایی عامل‌ها

زمانیکه در خصوص ماتریس همبستگی، مدل عاملی و روش استخراج، تصمیم مناسب اتخاذ گردید، زمینه برای استخراج عاملهای اولیه چرخش نیافته فراهم می‌گردد. با بررسی ماتریس چرخش نیافته محقق می‌تواند به جستجوی روشهای تلخیص داده‌ها و تعیین عاملهای استخراجی بپردازد، اما تعیین نهایی تعداد عاملها پس از دستیابی به ماتریس عاملی چرخش یافته امکان پذیر می‌باشد.

۱۵. توصیه‌هایی درباره کاربرد تحلیل عاملی

باتوجه به مطالب بالا به منظور فراهم آوردن زمینه مناسب برای کسانی که مایل به یادگیری تحلیل عاملی اکتشافی هستند و یا انهایی که سالهای متمادی در پژوهش‌های خود از این روش استفاده کرده‌اند، در موارد زیر به عنوان توصیه ارائه می‌گردد.

تعداد آزمودنی‌ها: هرچه ساختار عاملی حقیقی واضح‌تر باشد، برای کشف آن، حجم نمونه کوچک‌تری مورد نیاز است. اما کشف حتی یک ساختار عاملی ساده و روشن با کمتر از ۵۰ آزمودنی بسیار دشوار است، در حالی که تعداد ۱۰۰ نفر یا بیشتر برای ساختاری که وضوح کمتری داشته باشد ترجیح داده می‌شود. توجه داشته باشید که از جامعه مورد نمونه برداری آزمودنی‌هایی باید برگزیده شود که مقدار واریانس آنها از لحاظ عامل‌هایی که مایل به برآورد آنها

هستید کم نباشد. حتی می توانید به گونه ای نمونه برداری کنید که از مودنی های شما از لحاظ عامل هایی که مایل هستید برآورد کنید به گونه استثنایی متفاوت باشند، ولی از لحاظ سایر خصیصه ها تفاوت اندکی داشته باشند.

تعداد متغیرها: قواعد مربوط به تعداد متغیرها برای تحلیل عاملی تفاوت زیادی با رگرسیون دارد. در تحلیل عاملی، به واقع چنانچه متغیرها مربوط به عامل های زیربنایی باشد هرچه تعداد آنها بیشتر باشد، بهتر است. بنابراین، متغیرهای کافی در نظربگیرید به گونه ای که هر عامل مشترک دست کم توسط سه یا چند متغیر معرفی گردد. علاوه بر این، مطلوب آن است که سوال هایی را برگزینید که معتبر و دارای میزان اشتراک مناسبی باشند.

تحلیل مولفه های اصلی یا تحلیل عاملی: اگر هدف کاهش اطلاعات موجود در متغیرهای زیاد به صورت مجموعه ای از ترکیب های خطی وزن دار متغیرها باشد، تحلیل مولفه های اصلی (PCA) را که بین واریانس مشترک و واریانس یگانه تمایزی قائل نمی شود، به کار برید. اما اگر مقصود تشخیص متغیرهای مکنونی باشد که در واریانس مشترک مجموعه ای از متغیرهای مورد اندازه گیری سهمیم است، تحلیل عاملی را که تلاش می کند واریانس یگانه را از تحلیل خارج کند، به کار برید.

تحلیل عاملی اکتشافی یا تائیدی: اگر مایلید تعداد عامل های قابل استخراج را به تعداد معینی محدود کنید و نیز الگوهای بخصوصی از رابطه میان متغیرهای اندازه گیری شده و عامل های مشترک را تعیین کنید، و این عمل به گونه پیش تجربی (قبل از مشاهده داده ها) انجام شده است، در این صورت از تحلیل عاملی تائیدی استفاده کنید. اما اگر محدودیت تشخیص پیش تجربی داشته باشد، روش تحلیل عاملی اکتشافی را به کار برید.

۱۶. برخی از حوزه های کاربردی تحلیل عاملی

۱.۱۶. تحلیل عاملی در روانسنجی و روانشناسی

اسپیرمن دریافت که بین نمرات دانش آموزان در مدرسه، در موضوعات ظاهرا غیر مرتبط، همبستگی مثبت وجود دارد. پس از وی ریموند کتل، کار او را گسترش داد و او از یک تئوری چندعامله برای توضیح هوش استفاده کرد. وی به شدت از تحلیل عاملی در روانسنجی طرفداری می کرد.

تحلیل عاملی در روانسنجی برای تشخیص فاکتورها، از نتایج تستها به کار گرفته می شود. برای مثال، دانشمندان در تحقیقات هوش پی بردند که افرادی که در امتحان توانایی زبان نمره بالایی میگیرند، در تست های دیگری که نیازمند توانایی زبان هستند، نیز موفق هستند، که محققین این عامل را هوش زبانی نامیدند. هرچند تحلیل عاملی برای یافتن عامل ها در حیطه های وسیع مانند شخصیت، رفتار، عقاید و... به کار می رود.

همچنین از تحلیل عاملی در روانسنجی برای ارزیابی اعتبار یک ابزار به وسیله یافتن اینکه " آیا ابزار مورد نظر واقعاً فاکتور مورد مطالعه را اندازه گیری میکند؟" به کار می رود.

۱.۱.۱۶. مزایا:

۱. کاهش تعداد متغیرها: دو یا چند عامل در غالب یک عامل شناخته می شود.
۲. تشخیص گروه متغیرهای وابسته به یکدیگر

۲.۱.۱۶. معایب:

۱. تحلیل عاملی زمانی که داده ها معتبر باشد، مناسب است. حال آنکه در روانشناسی، که محققان، اغلب به اقداماتی با اعتبار کم، متکی هستند مانند خودسنجی، که این می تواند مشکل ساز باشد.
۲. تحلیل عاملی بر مبنای استفاده از ابتکار است که "یک راه حل مناسب است حتی اگر کاملاً درست نباشد" (ریچارد بی دارلینگتون). بر داده های مشابه که از طریق مشابه فاکتوربندی شده اند، می تواند بیش از یک تفسیر انجام شود

۲.۱۶. تحلیل عاملی در بازاریابی

۱.۲.۱۶. گام های اساسی

گام های اساسی در این زمینه عبارتند از:

- شناسایی خصوصیات اصلی محصول که مشتری برای ارزیابی کالا از آنها استفاده می کند.
- استفاده از تکنیک های کمی تحقیقات بازاریابی به منظور جمع آوری داده ها از مشتریان هدف
- وارد نمودن داده ها به یک برنامه آماری و اجرا کردن پروسه تحلیل عاملی.
- استفاده از نتایج تحلیل عاملی و خصوصیات (عامل ها) به منظور طراحی مفهومی محصول

۲.۲.۱۶. جمع آوری داده ها

جمع آوری داده ها عموماً از طریق روش های مختلف تحقیقات بازاریابی انجام می شود. سئوالات پیمایشی از پاسخ دهندگان می خواهد که نمونه محصول را ارزیابی کنند و یا در مورد خصوصیات محصول نظر بدهند. عموماً پنج تا بیست خصوصیت کلی انتخاب می شود مانند سهولت در دسترسی، وزن، دقت، دوام محصول، رنگ محصول، قیمت و اندازه. خصوصیات کلی که انتخاب می شوند بر حسب اینکه محصول مورد مطالعه چه چیزی باشد می تواند متغیر باشد. داده های جمع آوری شده برای چند محصول، کدگذاری شده و وارد نرم افزارهای آماری مانند R، SPSS، SAS، Stata و LISREL می شود.

۱۶.۲.۳. تحلیل داده ها

تحلیل داده ها ، عامل هایی که داده ها را توضیح می دهند جدا می کند. تحلیل عاملی یک تکنیک وابستگی متقابل است. مجموعه کاملی از روابط متقابل مورد بررسی قرار می گیرند. هیچ نوع خاصی از متغیرهای وابسته، متغیرهای مستقل یا روابط علت و معلولی وجود ندارد. تحلیل عاملی فرض می کند که تمامی داده ها می توانند به ابعاد مهم کوچکی کاهش یابند. این کاهش به این دلیل ممکن است که خصوصیات با یکدیگر مرتبطند. درجه ای که به هر خصوصیت داده می شود تا حدی نتیجه تأثیر سایر خصوصیات است. درجه همبستگی بین نمره خام اولیه و نمره عامل نهایی، بار عاملی نامیده می شود. دو رهیافت کلی برای تحلیل عاملی وجود دارد. "تحلیل مؤلفه های اصلی" (واریانس کل در داده ها فرض می شود) و "تحلیل مؤلفه های مشترک" (که در آن واریانس مشترک در نظر گرفته می شود).

۱۶.۲.۴. مزایا

- هم خصوصیات عینی و هم خصوصیات ذهنی می تواند مورد استفاده قرار گیرد.
- تحلیل عاملی می تواند در کشف ابعاد پنهانی که ممکن است با تجزیه و تحلیل مستقیم نتوان به آنها دست یافت به کار رود.
- ساده و کم هزینه است.

۱۶.۲.۵. معایب

- استفاده بهینه و کامل از این روش مستلزم توانایی محقق در جمع آوری مجموعه کاملی از خصوصیات محصول است. اگر خصوصیات اصلی و مهم محصول از قلم بیفتد، اعتبار روش خدشه دار می شود.
- نامگذاری و انتخاب فاکتورها یا عوامل ، مستلزم داشتن دانش پیش زمینه ای است، چرا که ممکن است چندین خصوصیت محصول به دلایل ناآشکاری به یکدیگر همبسته باشند.

۱۶.۳. سایر حوزه ها

تحلیل همچنین می تواند در سایر حوزه ها همچون علوم فیزیکی و نیز در اقتصاد مورد استفاده قرار گیرد.

۱۷. منابع

۱. کلاین، پل، «راهنمای آسان تحلیل عاملی»، ترجمه سید جلال صدر السادات و همکار، انتشارات سمت، تهران، ۱۳۸۰، چاپ اول
۲. سرمد، ز. بازرگان و ع. حجازی، «روش های تحقیق در علوم رفتاری»، انتشارات آگاه، تهران، ۱۳۸۴
۳. هومن و همکاران، «تحلیل عاملی دشواریها و تنگناها»، مجله روانشناسی و علوم تربیتی، دانشگاه تهران، شماره ۷۱، پاییز و زمستان ۱۳۸۴
۴. هومن، حیدر علی، «مدل یابی معادلات ساختاری با کاربرد نرم افزار لیزرل»، انتشارات سمت، تهران، ۱۳۸۴، چاپ اول
۵. نجیبی، سید مرتضی و مهدی حسین پوری، «تحلیل عاملی»، گروه دانش آماری، www.daneshamari.blogfa.com
6. Mardia, K. V., Kent, J. T., and Bibby, J. M. (1979), *Multivariate Analysis*, New York: Academic Press
7. Alvin C. Rencher (1998), *Multivariate Statistical Inference And Application: Wiley series in probability and statistics*
8. Anderson, T. W. (1984), *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, second Edition, Wiley series in probability and statistics
9. <http://www.thesisbox.ir/page.php?۲۱>
10. <http://www.measurement.blogfa.com>
11. <http://bric.blogfa.com>