فصل دوم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مسائل مقدار مرزی

Partial Differential Equation
PDE

تعریف : معادله ای شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع (متغیر وابسته) از دو یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامند .

- مرتبه بالاترین مشتق در معادله را مرتبه معادله می نامند .
- اگر معادله نسبت به متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن از درجه اول باشد ، معادله را خطی می گویند .
(در چنین معادله ای متغیر وابسته و مشتقاتش در یک عبارت خطی نسبت هم ظاهر می شوند .)
- اگر هر جمله موجود در معادله دیفرانسیل شامل متغیر وابسته و مشتقاتش باشد معادله را همگن می گویند در غیر اینصورت معادله را غیر همگن می گویند .

شکل کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

$$u(x,y) \quad : \quad a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u(x,y) = f(x,y)$$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم :

$$u(x,y) : \quad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f\,u(x,y) = g(x,y)$$

a و b و c و d و e و f توابعی از دو متغیر x و y هستند .

چند معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ مهم :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

گرما یک بعد — گرما دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

موج یک بعدی — موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

معادله لاپلاس دو بعدی — معادله پواسن

قضیه : اگر u_1 و u_2 جوابهایی از یک PDE همگن خطی در ناحیه معینی باشد، آنگاه هر ترکیب خطی از دو جواب u_1 و u_2، مثل $c_1u_1 + c_2u_2$ که c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند جوابی از معادله در آن ناحیه خواهد بود.

مثال : نشان دهید که هر تابع شکل $u(x,y) = xf(y-x) + g(y-x)$ که در آن f و g دارای مشتقات مرتبه اول و دوم هستند، در معادله دیفرانسیل

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

صدق می کند.

$$u_x = f(y-x) + x\frac{\partial f(y-x)}{\partial x} + \frac{\partial g(y-x)}{\partial x}$$

$$= f(y-x) + x\left((-1)f'(y-x)\right) + (-1)g'(y-x)$$

$$u_{xx} = (-1)f'(y-x) - f'(y-x) + xf''(y-x) + g''(y-x) = -2f'(y-x) + xf''(y-x) + g''(y-x)$$

$$u_{xy} = f'(y-x) - xf''(y-x) - g''(y-x)$$

$$u_y = xf'(y-x) + g'(y-x)$$

$$u_{yy} = xf''(y-x) + g''(y-x)$$

$$-2f'(y-x) + xf''(y-x) + g''(y-x) + 2f'(y-x) - \cancel{2xf''(y-x)} - 2g''(y-x) + \cancel{xf''(y-x)} + g''(y-x)$$

$$= 0$$

روش تفکیک متغیرها برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u(x,y)$

در این روش برای حل معادله فرض می‌شود که معادله دارای جوابی بشکل تفکیک شده

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

باشد. با قرار دادن $u(x,y)$ در معادله دیفرانسیل، ممکن است معادله به معادلات معمولی تفکیک شود.

نکته مهم این است که به این روش در صورت موفقیت جوابهایی از معادله که تفکیک پذیرند بدست می‌آید.

مثال:

$$u_x + u_y = 0$$

بفرض $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

در معادله $X'Y + XY' = 0 \Rightarrow \dfrac{X'}{X} = -\dfrac{Y'}{Y}$

چون X' و X توابعی از x و Y' و Y توابعی از y هستند پس تساوی وقتی امکان دارد که هر دو برابر مقدار ثابتی باشند.

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow \begin{cases} X' - kX = 0 \longrightarrow X = c_1 e^{kx} \\ Y' + kY = 0 \longrightarrow Y = c_2 e^{-ky} \end{cases}$$ معادلات معمولی

[دو معادله بالا توسط k بهم وصل شده‌اند]

$$\Rightarrow u(x,y) = c\,e^{k(x-y)}$$

توجه: جواب عمومی معادله فوق $u(x,y) = f(y-x)$ است.

مثلاً $u(x,y) = (y-x)\cdot \mathcal{L}(x-y) + \dfrac{1}{(y-x)^2}$

جزء جوابها هست ولی جزء جوابهای تفکیک پذیر نیست.

مثال : معادله لاپلاس را بروش تفکیک متغیرها حل کنید . (یعنی جوابهای تفکیک پذیرش را بدست آورید)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y) \xrightarrow{\text{در معادله}} X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k$$

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ Y'' + kY = 0 \end{cases}$$

جواب معادلات معمولی فوق به مقدار k بستگی دارد .

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = ax + b \\ Y = cy + d \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = (ax+b)(cy+d)$$

$$k = \mu^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} X = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} \\ Y = d_1 \cos\mu y + d_2 \sin\mu y \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = (c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x})(d_1 \cos\mu y + d_2 \sin\mu y)$$

$$k = -p^2 < 0 \Rightarrow u(x,y) = (c_1 \cos px + c_2 \sin px)(d_1 e^{py} + d_2 e^{-py})$$

تمرین : $u_x + u_y = 2(x+y)u$. ج) $u(x,y) = ce^{kx+x^2} \cdot e^{y^2-ky}$

$$\frac{X'}{X} = k + 2x \Rightarrow \frac{dy/dx}{y} = k + 2x \Rightarrow \frac{y'}{y} = k + 2x$$

$$\Rightarrow \ln y = kx + x^2 + c_1 \Rightarrow y = e^{kx + x^2 + c_1}$$

$$X = e^{kx + x^2 + c} \quad , \quad Y = e^{-ky + y^2 + c_2}$$

Sturm - Liouville

مسائل مقدار مرزی — مسألهٔ اشتورم-لیوویل منظم (ترجمه: در مورد معادلات معمولی)

می‌دانیم که یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲، که در فاصلهٔ $[a,b]$ تعریف شده است با داشتن مقدار تابع در $x_0 \in [a,b]$ و مشتق تابع در همان نقطه دارای جواب منحصر بفردی است. (شرایط اولیه)
در این قسمت می‌خواهیم به اجمال وضعیت جوابهای یک معادله دیفرانسیل معمولی را تحت تأثیر شرایط مرزی بررسی کنیم.

شرایط مرزی به شرایطی گفته می‌شود که به نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله مورد بررسی $[a,b]$ بر مقادیر تابع و مقادیر مشتقات تحمیل می‌شود. [یعنی $y(a)$ و $y(b)$ ، $y'(a)$ و $y'(b)$]

[تذکر: شرایط مربوط به مشتق تابع در PDE ها مشتقات سوئی هستند]

تعریف: به معادلهٔ خطی مرتبه ۲: (قبل از توضیح مقادیر نشود) (معادلهٔ معمولی تابع y، متغیر x)

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x)+\lambda p(x)\right]y = 0 \qquad a<x<b$$

که در آن λ یک پارامتر و $r(x)$ و $q(x)$ و $p(x)$ توابع حقیقی و در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته اند و $r(x)\neq 0$ برای $\forall x\in[a,b]$ یک معادلهٔ اشتورم لیوویل می‌نامند.

نکته: هر معادلهٔ مرتبه ۲ خطی و همگن به معادلهٔ اشتورم لیوویل قابل تبدیل است.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

اگر طرفین در عامل انتگرال ساز $\frac{1}{P(x)}e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}$ ضرب شود

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}y'\right] + e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}\frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

به معادلهٔ اشتورم لیوویل متناظر با یک معادلهٔ درجه ۲ خطی، معادلهٔ خود الحاق آن معادله می‌گویند.

مثال:

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \quad , \quad x>0$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\int \frac{x}{x^2}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy') + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

تعریف مسألهٔ اشتورم لیوویل منظم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[r(x)y'] + [q(x)+\lambda p(x)]y = 0 & a<x<b \\ a_1y(a) + b_1y'(a) = 0 \\ a_2y(b) + b_2y'(b) = 0 \end{cases}$$

مرزها

شرایط مرزی

که در آن a_1 و b_1 و a_2 و b_2 اعداد حقیقی ثابت هستند و a_1 و b_1 باهم و a_2 و b_2 باهم صفر نمی‌شوند مسأله اشتورم-لیوویل منظم می‌گویند.

۱) شرایط مرزی نسبت به y و y' خطی و همگن هستند.

۲) شرایط نوشته شده جداشده‌اند (یعنی یک شرط برای نقطهٔ a و یک شرط برای b نوشته شده) که می‌توانند غیرجدا هم باشند مثل

$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

۳) تابع $y=0$ جواب بدیهی هر مسأله اشتورم لیوویل منظم با شرایط مرزی خطی و همگن است. هدف یافتن جوابهای غیر بدیهی است.

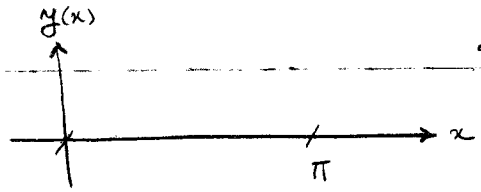
۴) تعریف: به جوابهای غیر بدیهی مسأله در صورت وجود توابع ویژه و به مقادیر λ هایی که به ازای آنها توابع ویژه جواب مسأله‌اند مقادیر ویژه مسأله می‌گویند.

۵) اگر y_1 و y_2 دو تابع ویژهٔ یک معادله به ازای مقدار ویژه λ باشند، $\alpha y_1+\beta y_2$ تابع ویژهٔ معادله به ازای مقدار ویژه λ خواهد بود.

نتیجه: اگر y_1 یک تابع ویژهٔ یک معادله به ازای یک مقدار ویژه λ باشد cy_1 هم تابع ویژه معادله به ازای آن مقدار ویژه λ خواهد بود.

مثال ۵

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$



اگر شرایط بصورت $y(\pi/2)=0$ و $y'(\pi/2)=0$ بود به ازای هر λ دقیقاً یک جواب موجود بود.

ولی شرایط مرزی:

به ازای سه وضعیت $\lambda=0$، $\lambda>0$ و $\lambda<0$، سه شکل جواب ممکن است که آنها را بررسی می‌کنیم.

1) $\lambda = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 \xrightarrow[\text{از قرار دادن در معادله}]{\text{دیدیفرنسیل مبتل}}$ $y(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0$

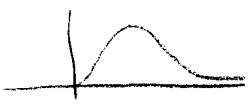
$y(\pi)=0 \Rightarrow c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\longrightarrow y(x) = 0$ جواب بدیهی

پس به ازای $\lambda=0$ مقدار ویژه و تابع ویژه‌ای وجود ندارد.

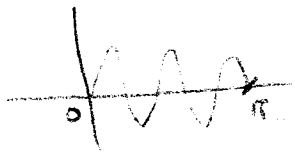
2) $\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ (تحقیق کنید که این تابع فقط یک نقطه می‌تواند صفر شود)

$\xrightarrow[\text{حل معادلات بعد}]{\text{ایده مبتل از}} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi} = 0 \end{cases} \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ جواب بدیهی



مقدار ویژه منفی وجود ندارد

3) $\lambda = k^2 > 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \longrightarrow$ توضیح مبتل از حل



$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin k\pi = 0 \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \longrightarrow \text{جواب بدیهی} \\ \text{پس } c_2 \neq 0 \longrightarrow \sin k\pi = 0 \Rightarrow k\pi = n\pi \end{cases}$

$\Longrightarrow k = n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

یعنی اعداد صحیح. (با توجه به اینکه $\sin nx$ و $-\sin nx$ از نظر جواب‌ها، جواب بدیهی محسوب می‌شود $\sin n$ مثبت در نظر گرفته می‌شود)

و معادله هم به ازای $\lambda = n^2$ و $\lambda = (-n)^2$ یکی است.

پس: $\lambda_n = n^2$ مقادیر ویژه $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

$y_n = \sin nx$ توابع ویژه

روشن است که اگر y یک جواب باشد αy یک جواب خواهد بود پس توابع ویژه را برای سادگی بصورت نرمالیزه (بدون ضریب اضافی، با ضریب یک) نشان می‌دهیم.

پس معادلهٔ

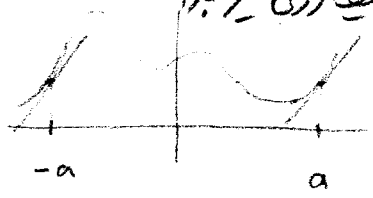
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

حل

$\Leftarrow$ فقط وقتی دارای جواب است که λ مجذور یک عدد صحیح باشد ($\lambda_n = n^2$) جواب $\sin n\pi$ را دارد.

مثال ۲: شرایط مرزی غیر جدا

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-a) = y(a) \\ y'(-a) = y'(a) \end{cases} \qquad -a < x < a$$



1) $\lambda = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow \begin{cases} -c_1 a + c_2 = c_1 a + c_2 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y = c_2 \xrightarrow[\text{به } c_2]{\text{برای همهٔ}} y'(-a) = y'(a) \text{ برقرار است} \end{cases}$

پس: $\lambda_0 = 0$ مقدار ویژه ، $y_0 = 1$ تابع ویژه نرمال شده

2) $\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$

$$y(a) = y(-a) \Rightarrow c_1 e^{ka} + c_2 e^{-ka} = c_1 e^{-ka} + c_2 e^{ka} \Rightarrow c_1 \sinh ka = c_2 \sinh ka$$

$$\Rightarrow (c_1 - c_2) \sinh ka = 0 \xrightarrow{k \neq 0} c_1 = c_2 \Rightarrow y(x) = c(\cosh kx)$$

$y'(a) = y'(-a) \Rightarrow c\, k \sinh ka = -c k \sinh ka \Rightarrow 2ck \sinh ka = 0 \xrightarrow{k \neq 0} c = 0 \Rightarrow$ جواب صفر

3) $\lambda = k^2 > 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$$y(a) = y(-a) \Rightarrow c_1 \cos ka + c_2 \sin ka = c_1 \cos ka - c_2 \sin ka \Rightarrow c_2 \sin ka = 0 \quad (*)$$

$$y'(a) = y'(-a) \Rightarrow -kc_1 \sin ka + kc_2 \cos ka = kc_1 \sin ka + kc_2 \cos ka$$

$$\xrightarrow{k \neq 0} c_1 \sin ka = 0 \quad \circledast$$

c_1 و c_2 با هم نباید صفر شوند پس

$$c_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} c_2 \neq 0, \ \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \ y = \sin kx \\ \text{یا} \\ c_1 \neq 0, \ \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \ y = \cos kx \end{cases}$$

$$c_2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 & n = 1, 2, \dots \\ y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x, \ \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right)x & = \underbrace{a_n \cos\frac{n\pi}{a}x + b_n \sin\frac{n\pi}{a}x}_{\text{نکته ۵}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

مثال ۳:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) + r y'(l) = 0 & r > 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \ , \ \lambda = -k^2 < 0$ مقدار ویژه و تابع ویژه‌ای ندارند.
(اثبات در صفحه بعد)

$\lambda = k^2 > 0 \quad : \quad y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2 \sin kx \ , \ y' = k c_2 \cos kx$

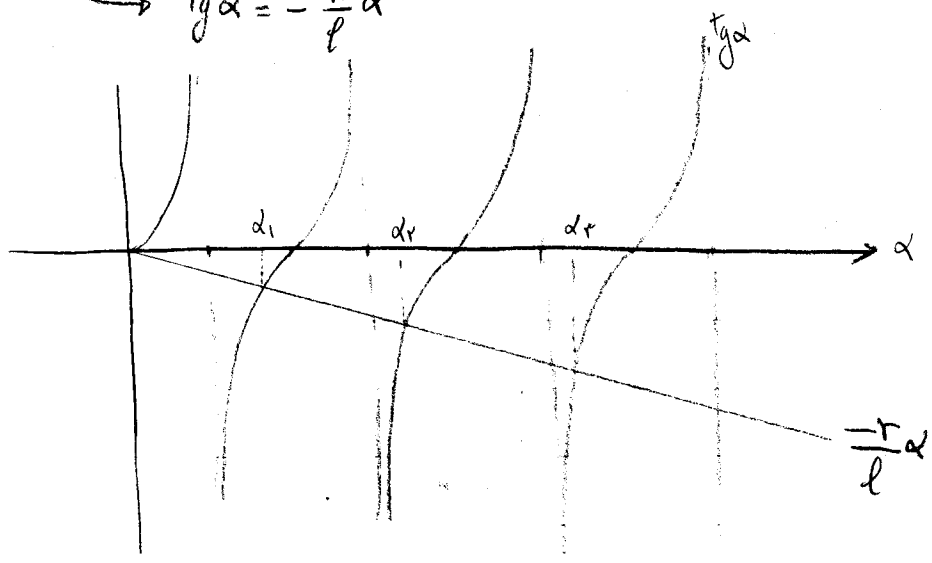
$y(l) + r y'(l) = 0 \Rightarrow c_2 \sin kl + r c_2 k \cos kl = 0 \Rightarrow c_2 (\sin kl + r k \cos kl) = 0$

اگر $c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin kl + r k \cos kl = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} kl = -rk \Rightarrow k = ?$

$kl = \alpha \Rightarrow k = \frac{\alpha}{l}$

$\hookrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{r}{l} \alpha$

l و h مقادیر مشخصی هستند



$\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$y_n = \sin\left(\frac{\alpha_n}{l}\right) x$

$\lambda = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$

$y(0) = 0 \longrightarrow c_2 = 0 \longrightarrow y(x) = c_1 x \longrightarrow y' = c_1$

$y(l) + r y'(l) = c_1 l + r c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$

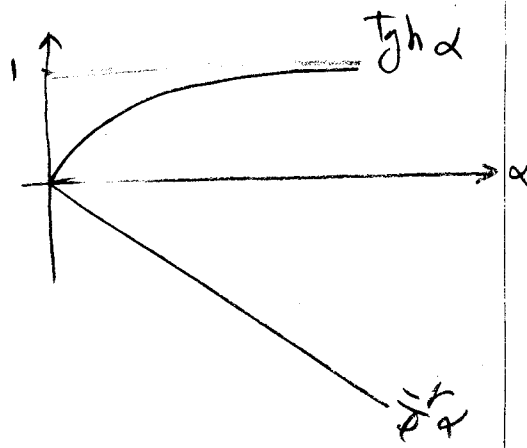
$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2 \sinh kx \Rightarrow y' = c_2 k \cosh x$

$c_2 \sinh l + r k c_2 \cosh l = 0 \Rightarrow c_2 (\sinh kl + r k \cosh kl) = 0$

$c_2 \neq 0 \Rightarrow \quad \operatorname{tgh}(kl) = -rk$

$kl = \alpha \Rightarrow k = \frac{\alpha}{l}$

$\Rightarrow \operatorname{tgh} \alpha = -\frac{r}{l} \alpha$



① ضرب داخلی ـ سری فوریه (شکل عمومی)

۱-۱) تعریف ضرب داخلی: با مقادیر حقیقی

فرض f و g دو تابع دلخواه تکه‌ای پیوسته در $[a,b]$ باشد و فرض $w(x)$ یک تابع پیوسته و مثبت در $[a,b]$ باشد.

حاصلضرب داخلی دو تابع f و g نسبت به وزن $w(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

یک عدد حقیقی است

ضرب داخلی f و g نسبت به وزن $w(x)$: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$

به $w(x)$ تابع وزنی می‌گویند. اگر $w(x)=1$ از گفتن «نسبت به وزن $w(x)$» همه جا در ادامه بحث صرفنظر می‌کنیم.

بسادگی دیده می‌شود:

۱) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx = \langle g,f\rangle$

۲) $\langle f,g+h\rangle = \int_a^b f(x)\big(g(x)+h(x)\big)w(x)\,dx = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$

۳) $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$

نتیجه $\langle \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i, g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle \alpha_i f_i, g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\langle f_i,g\rangle$

۱-۲) تعریف نرم (اندازهٔ) تابع f:

$$\|f\| \triangleq \big(\langle f,f\rangle\big)^{1/2} \Rightarrow \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,w(x)\,dx$$

بسادگی دیده می‌شود که اگر f پیوسته باشد: $\|f\|=0 \iff \forall x\in[a,b]: f(x)=0$

۱-۳) تعریف تعامد:

دو تابع f و g را نسبت به وزن $w(x)$ در $[a,b]$ متعامد گویند هرگاه

$\langle f,g\rangle = 0$ (f و g برهم عمودند)

توابع غیرصفر مورد نظر است چون تابع صفر نمودار هر تابعی عمود است

۱-۲) مجموعه‌ای از توابع تکه‌ای پیوسته مثل $V=\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ را نسبت به تابع $w(x)$ متعامد گویند اگر دو به دو بر هم عمود باشند یعنی:

$$\forall \varphi_n, \varphi_m \in V \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \|\varphi_n\|^2 & n = m \end{cases}$$

مثال: $\left\{\sin\frac{2n\pi}{T}x\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{4\pi}{T}x, \dots\right\}$ نسبت به $w(x)=1$ در $[0,T]$ یک مجموعه متعامد است.

$$\int_0^T \sin\frac{2n\pi}{T}x \,\sin\frac{2m\pi}{T}x\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} = \left\|\sin\frac{2n\pi}{T}x\right\|^2 & n = m \end{cases}$$

مثال: $\left\{1, \cos\frac{2n\pi}{T}x, \sin\frac{2n\pi}{T}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,T]$.

مثال: $\left\{1, \cos\frac{2\pi}{T}x, \cos\frac{4\pi}{T}x, \dots, \sin\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{4\pi}{T}x, \dots\right\} = \left\{1, \sin\frac{2n\pi}{T}x, \cos\frac{2n\pi}{T}x\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\|1\|^2 = \int_0^T dx = T \quad , \quad \left\|\cos\frac{2n\pi}{T}x\right\|^2 = \int_0^T \cos^2\frac{2n\pi}{T}x\,dx = \frac{T}{2}$$

با ضرب داخلی: $\boxed{w(x)=1 \Rightarrow \langle f, g\rangle = \int_0^T f(x)\,g(x)\,dx}$

۲) سری فوریه:

۱-۲) تعریف: اگر $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه‌ای از توابع متعامد نسبت به تابع وزنی $w(x)$ در $[a,b]$ باشند [یعنی $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,w(x) = 0 \quad n \neq m$] و تابع $f(x)$ تابع تکه‌ای پیوسته دلخواهی در $[a,b]$ باشد به بسط زیر در صورت وجود سری فوریه f نسبت به مجموعه متعامد $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

که c_n ها ضرایب سری فوریه f نامیده می‌شوند.

۲-۲) محاسبه ضرایب سری فوریه $f(x)$

اگر $f(x)$ دارای سری فوریه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ باشد: ضرب داخلی $f(x)$ با φ_m یکی از اعضای دلخواه $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\langle f(x), \varphi_m(x)\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \varphi_m(x)\right\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle c_n \varphi_n(x), \varphi_m(x)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \varphi_n(x), \varphi_m(x)\rangle$$

$$= c_m \|\varphi_m(x)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad c_m = \frac{\langle f(x), \varphi_m(x)\rangle}{\|\varphi_m(x)\|^2} \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{\langle f(x), \varphi_n(x)\rangle}{\|\varphi_n(x)\|^2}}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \Longrightarrow c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)w(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,w(x)\,dx}}$$

مثال: $\left\{1, \cos\frac{2n\pi}{T}x, \sin\frac{2n\pi}{T}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $f(x)$ تعریف شده در $[0,T]$:

سری فوریه $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\langle f(x), 1\rangle}{\|1\|^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx \\[2ex] a_n = \dfrac{\langle f(x), \cos\frac{2n\pi}{T}x\rangle}{\|\cos\frac{2n\pi}{T}x\|^2} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx \\[2ex] b_n = \dfrac{\langle f(x), \sin\frac{2n\pi}{T}x\rangle}{\|\sin\frac{2n\pi}{T}x\|^2} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \end{cases}$$

Maximal حداکثری

(مثلاً اگر یکی از توابع را فرض کم شود)

۲-۳) اگر $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه‌ای متعامد در $[a,b]$ باشد این مجموعه را کامل می‌گویند هرگاه سری فوریهٔ هر تابع تکه‌ای پیوسته (در نقاط پیوسته) به تابع در آن نقطه همگرا باشد.

مثال: با توجه به قضیه دیریکله $\left\{1, \cos\frac{2n\pi}{T}x, \sin\frac{2n\pi}{T}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,T]$ کامل است.

نتیجه: پس تابع $f(x)$ را می‌توان بصورت بسط سری فوریه با توابع متعامد کامل نمایش داد.

۳-۳) تساوی پارسوال و قضیه بهترین تقریب در مورد بسط فوریه روی مجموعه‌های متعامد کامل هم برقرار است:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} D_n \varphi_n(x) \xrightarrow[\text{مدام کم شود}]{\|f(x)-f_N(x)\|^2} D_n = C_n = \frac{\langle f(x), \varphi_n(x)\rangle}{\|\varphi_n(x)\|^2}$$

اتحاد پارسوال: $\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2$

۳) تعامد توابع ویژه مسأله اشتورم لیوویل منظم

قضیه) اگر $r(x)$ و $r'(x)$ و $q(x)$ و $p(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشند و $r(x)\neq 0$ آنگاه توابع ویژه متمایز مسأله اشتورم-لیوویل منظم (y_n ٤)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[r(x)y'\right] + \left[q(x) + \lambda p(x)\right]y = 0 & a<x<b \\ a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

نسبت به تابع وزنی $p(x)$ در $[a,b]$ یک مجموعه متعامد کامل تشکیل می‌دهند

یعنی،

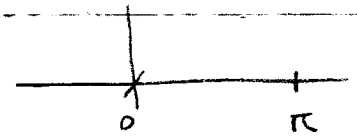
$$\langle y_n, y_m\rangle = \int_a^b y_n(x)\, y_m(x)\, p(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \|y_n\|^2 & n=m \end{cases}$$

پس برای هر تابع تکه‌ای پیوسته در $[a,b]$ مثل $f(x)$ می‌توان بسط فوریه‌ی این توابع ویژه نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \\ c_n &= \frac{\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, p(x)\, dx}{\int_a^b y_n^2(x)\, p(x)\, dx} \end{aligned}}$$

در مثال ۱ :

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$



شکل خود الحاق مساله

$$\frac{d}{dx}[y'] + (\lambda) y = 0 \qquad p(x) = 1$$

$$\lambda_n = n^2 , \quad y_n = \sin nx \qquad n = 1, 2, \dots$$

اولاً $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \pi]$ متعامدند و مجموعه فوق کامل است

ثانیاً برای هر $f(x)$ دلخواه تکه‌ای پیوسته در $[0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \quad b_n = \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx}{\frac{1}{2} \cdot \pi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$0 < x < \pi$

در مثال ۲ :

$$\left\{1, \cos \frac{n\pi}{a} x , \sin \frac{n\pi}{a} x\right\} \qquad p(x) = 1$$

$-a < x < a$

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{a} x + b_n \sin \frac{n\pi}{a} x \quad -a < x < a \qquad f(x) : [-a, a] \\ \|1\|^2 = \int_{-a}^{a} dx = 2a \quad , \quad \|\cos \frac{n\pi}{a} x\|^2 = \int_{-a}^{a} \cos^2 \frac{n\pi}{a} x \, dx = a = \|\sin \frac{n\pi}{a} x\|^2 \\ a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x) \, dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x \, dx \\ b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \end{cases}$$

در مثال ۳ :

$$\left\{\sin \left(\frac{\alpha_n}{\ell}\right) x\right\} \quad n = 1, 2, \dots \qquad \text{صفرهای } \sin \alpha_n \qquad p(x) = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left(\frac{\alpha_n}{\ell}\right) x \qquad 0 < x < \ell$$

$$c_n = \frac{\int_0^{\ell} f(x) \sin \left(\frac{\alpha_n}{\ell}\right) x \, dx}{\left\|\sin \left(\frac{\alpha_n}{\ell}\right) x\right\|^2} \longrightarrow \int_0^{\ell} \sin^2 \left(\frac{\alpha_n}{\ell}\right) x \, dx$$

مثال ۴

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x} y = 0 & 1 < x < 2 \\ y'(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = \frac{1}{x}$ توجه

معادله $xy'' + y' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \Longrightarrow x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$

یادآوری $t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0, (t>0)$ معادله اویلر با تغییر متغیر $x = \ln t$ حل می‌شود

$$u = \ln x \rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = y'_u \frac{1}{x} \Rightarrow y''_x = \frac{d}{dx}(y'_u) \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) y'_u$$

$$y''_x = y''_u \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} y'_u$$

در معادله: $x^2\left(y'' \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} y'\right) + x\left(y' \cdot \frac{1}{x}\right) + \lambda y = y'' + \lambda y$

معادله: $y'' + \lambda y = 0$

$$\lambda = 0 \rightarrow y(u) = c_1 u + c_2 \Rightarrow \begin{cases} y(x) = c_1 \ln x + c_2 \\ y'(1) = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{x}\Big|_{(x=1)} = 0 \Longrightarrow c_1 = 0 \\ y(2) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

جواب بدیهی

$$\lambda > -k^2 < 0 \Rightarrow y(u) = c_1 e^{ku} + c_2 e^{-ku} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = c_1 x^k + c_2 x^{-k} \\ y'(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$y' = k c_1 x^{k-1} - k c_2 x^{-k-1} \xrightarrow{y'(1)=0} (c_1 - c_2) k = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2$$

$$y(2) = 0 \Rightarrow c_1(2^k + 2^{-k}) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0 = c_2$$

جواب بدیهی

$$\lambda = k^2 > 0 \longrightarrow y(u) = c_1 \cos ku + c_2 \sin ku$$

$$y(x) = c_1 \cos(k \ln x) + c_2 \sin(k \ln x)$$

$$y'(x) = -c_1 \frac{k}{x} \sin(k \ln x) + c_2 \frac{k}{x} \cos(k \ln x)$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow -c_1 k(0) + c_2 k = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(x) = c_1 \cos(k \ln x) \xrightarrow{y(2)=0} c_1 \cos(k \ln 2) = 0 \Rightarrow \cos(k \ln 2) = 0$$

$$k \ln 2 = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1, 2, \dots \Rightarrow k = (2n-1)\frac{\pi}{2 \ln 2}$$

مقادیر ویژه $\lambda_n = \left[\dfrac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2}\right]^2$

توابع ویژه $y_n = \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2} \ln x\right)$

$$n = 1, 2, \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \alpha_n^2 \\ y_n = \cos(\alpha_n \ln x) \\ \alpha_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2} \end{array} \right. \quad n = 1, 2, \dots$$

توابع $y_n(x)$ به وزن $\frac{1}{x}$ متعامدند

$$\int_1^2 y_n(x) y_m(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = 0 \qquad n \neq m$$

بسط فوریه مربوط به $f(x)$ در $[1,2]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2} \ln x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\alpha_n \ln x)$$

$$c_n = \frac{\int_1^2 f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2} \ln x\right) \frac{1}{x} \, dx}{\int_1^2 \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2 \ln 2} \ln x\right) \frac{1}{x} \, dx} = \frac{\int_1^2 f(x) (\cos \alpha_n \ln x) \frac{1}{x} \, dx}{\int_1^2 (\cos^2(\alpha_n \ln x))\left(\frac{1}{x}\right) dx}$$

نکات لازم: ۱) تفکیک متغیرها ۲) مسأله اشتورم لیوویل ۳) قضیه ترکیب خطی جوابها ۴) تعامد توابع ویژه و سری فوریه مربوط

مثال ۱ معادله گرما یک بعدی

یک میله به طول l با قابلیت انتشار گرمایی a^2 که دو انتهای آن در دمای صفر نگه داشته می‌شود دارای توزیع دمای اولیهٔ $f(x)$ است. مقدار دمای میله را در هر لحظه t و مکان x بیابید.

(توجه: معادلهٔ خطی، مرتبه ۲)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l\ ,\ t\geq 0 \\ u(0,t)=0 & t\geq 0 \\ u(l,t)=0 & t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) & 0<x<l \end{cases}$$

مرحلهٔ اول ۱) تفکیک متغیرها:

$$u(x,t)=X(x)T(t) \xrightarrow{\text{در معادله}} XT' = a^2 X'' T$$

$$\rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\sigma \Longrightarrow \begin{cases} X''+\sigma X = 0 \\ T' + a^2\sigma T = 0 \end{cases}$$

۲) شرایط مرزی و شرایط اولیه:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

$$u(0,t)=0 \Rightarrow X(0)T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$$

$$u(l,t)=0 \Rightarrow X(l)T(t)=0 \Rightarrow X(l)=0$$

$$u(x,0)=0 \Rightarrow u(x,0)=f(x)$$

توجه: نوشتیم $f(x)=X(x)T(0)$

$$\begin{cases} X''+\sigma X = 0 \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases} \quad , \quad T'+a^2\sigma T=0$$

مرحله دوم ۱) حل مسأله اشتورم-لیوویل منظم ایجاد شده و بدست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژه

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = 1$ ، توجه

$\sigma = 0 \longrightarrow$ جواب بدیهی ، $\sigma = -k^2 < 0 \longrightarrow$ جواب بدیهی

$$\sigma = k^2 > 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \ , \\ c_2 \sin k\ell = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

پس $\sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ و $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ مقادیر ویژه و توابع ویژه

و ۲) حل معادله دیگر برای مقادیر ویژه بدست آمده .

$$T' + a^2 \sigma_n T = 0 \Rightarrow T_n(t) = e^{-a^2 \sigma_n t} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \ n = 1, 2, \dots$$

۳) بدست آوردن جواب $u(x,t)$:

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot e^{-a^2 \sigma_n t} \ , \quad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \ n = 1, 2, \dots$$

مرحله سوم : شرط اولیه :

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \ ? \ f(x)$$

بن بست

طبق قضیه ترکیب خطی جواب ها ، خواهیم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n u_n(x,t) \qquad B_n = ?$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot e^{-a^2 \sigma_n t} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

شرط اولیه : $0 \le x \le \ell$

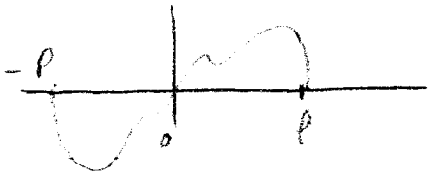
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = f(x)$$

توابع ویژه یک مسأله اشتورم لیوویل منظم

باید ضرایب B_n را طوری بدست آوریم که $0<x<l$ $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$

حل با تعبیر سری فوریه شبه‌تی :

$f(x)$ بصورت یک بسط فوریه شبه‌تی سینوسی با دوره تناوب $2l$ بسط داده شده است .



$$B_n = \frac{2}{2l}\times 2\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

حل با تعبیر سری فوریه عمومی و مسأله تعامد توابع ویژه ،

توابع ویژه $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ در فاصله $[0,l]$ $(0<x<l)$ نسبت به تابع وزنی $w(x)$ که در اینجا یک است متعامدند و مجموعه متعامد کامل است

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad 0<x\le l$$

$$B_n = \frac{\left\langle f(x), \sin\frac{n\pi}{l}x\right\rangle}{\left\|\sin\frac{n\pi}{l}x\right\|^2} = \frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx}{l/2} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

پس جواب مسأله ،

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-a^2\sigma_n t} & 0<x<l,\ t>0 \\ \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\ B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \end{cases}$$

نکته : حالت نهایی جواب :

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

نکته : در مسائل در صورت نبودن و معلوم بودن $f(x)$ ضرایب محاسبه می‌شود .

مثال ۲: معادله گرمای یک بعدی با شرایط مرزی دیگر

دو انتهای میله عایق بندی شده است و توزیع دمای اولیه $f(x)$ است.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t)=0 \\ u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

① تفکیک متغیر

$$u(x,t)=X(x)T(t) \Rightarrow XT' = a^2 X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\sigma$$

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + a^2 \sigma T = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$X'(x)T(t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow X'(0)=0$$
$$\Rightarrow X'(l)=0$$

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X'(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} T' + a^2\sigma T = 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{matrix} \qquad p(x)=1$$

② حل مسأله مقدار مرزی

$$\sigma = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2 \longrightarrow \sigma_0 = 0 \ , \ X_0 = 1$$

$$\sigma = -k^2 < 0 \Rightarrow X(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \longrightarrow$$ جواب بدیهی

$$\sigma = k^2 > 0 \Rightarrow X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \xrightarrow{c_2=0} -c_1 k \sin kl = 0$$

$$\longrightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

پس $\sigma_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 , \ X_n = \cos\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,\dots$

$\sigma_n \ , \ X_n \qquad n=0,1,\dots$

حل معادله دوم: $T' + a^2\sigma_n T = 0$ $\quad n = 0, 1, \dots$ توجه

$$n = 0 \longrightarrow T_0 = 1$$

$$n = 1, 2, \dots \longrightarrow T_n = e^{-a^2\sigma_n t} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\begin{cases} u_0(x,t) = 1 \\ u_n(x,t) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-a^2\sigma_n t} \end{cases} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \ n = 1, 2, \dots$$

(۳) شرط اولیه

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x \, e^{-a^2\sigma_n t} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x = f(x) \qquad 0 < x < \ell$$

۱) تعبیر فوریه مثلثاتی:

$$A_0 = \frac{1}{2\ell} \times 2 \times \int_0^{\ell} f(x)\,dx = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$A_n = \frac{2}{2\ell} \times 2 \times \int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

۲) تعبیر تعامد:

مجموعه توابع ویژه $\left\{1, \cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد کامل است پس $(w(x) = 1)$

$$f(x) = A_0 + \sum A_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$A_0 = \frac{\langle f(x), 1\rangle}{\|1\|^2} = \frac{\int_0^{\ell} f(x)\,dx}{\ell} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$A_n = \frac{\langle f(x), \cos\frac{n\pi}{\ell}x\rangle}{\|\cos\frac{n\pi}{\ell}x\|^2} = \frac{\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx}{\ell/2} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

انتگرال در بازه $(0, \ell)$

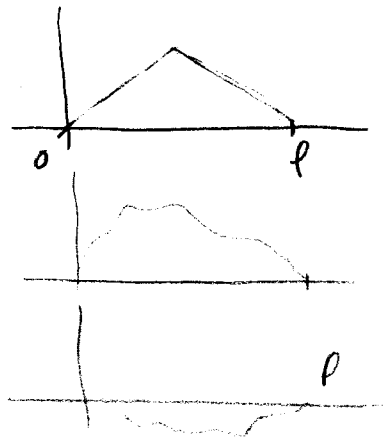
$$\longrightarrow \quad \omega_2 \begin{cases} u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-a^2\sigma_n t} \\ A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx \\ A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \end{cases} \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = A_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$ متوسط دمای اولیه

معادلهٔ موج یک بعدی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 \text{ ضریب وابسته به کشیدگی طولی تار} \qquad t>0,\ 0<x<l$$

$u(x,t)$ ارتفاع نقطهٔ قرارگرفته بر نقطهٔ x در زمان t



$$\begin{cases} u(0,t) \\ u(l,t) \end{cases} \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{شرایط اولیه}$$

حل مسأله : مثال ۴

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

۱) تفکیک متغیرها :

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \Longrightarrow XT'' = c^2 X'' T$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\sigma \longrightarrow \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T'' + c^2 T\sigma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{matrix} \quad 0<x<l \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

۲) مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma = k^2 > 0 \Longrightarrow X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

$$\xrightarrow{c_1 = 0} \sin kl = 0 \Longrightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Longrightarrow \sigma_n = k_n^2 \quad k_n = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1,2,\dots \quad , \quad X_n(x) = \sin k_n x$$

معادله دیگر به ازای مقادیر ویژه بدست آمده :

$$T'' + c^2 \sigma_n T = 0 \quad , \sigma_n = k_n^2 , \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T_n(t) = A_n \cos k_n c t + B_n \sin k_n c t$$

$$u_n(x,t) = (A_n \cos k_n c t + B_n \sin k_n c t) \sin k_n x \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, \dots$$

ترکیب خطی جوابها و شرطهای اولیه :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n c t + B_n \sin k_n c t) \sin k_n x \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = f(x) \xrightarrow[\text{سری فوریه}]{\text{تعامد}} A_n = \frac{\int_0^{\ell} f(x) \sin k_n x \, dx}{\ell/2}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-k_n c A_n \sin k_n c t + k_n c B_n \cos k_n c t) \sin k_n x$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k_n c B_n \sin k_n x = g(x)$$

$$\Longrightarrow k_n c B_n = \frac{\int_0^{\ell} g(x) \sin k_n x \, dx}{\ell/2}$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n c t + B_n \sin k_n c t) \sin k_n x \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \\ A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin k_n x \, dx \\ B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin k_n x \, dx \end{cases}$$

(*)

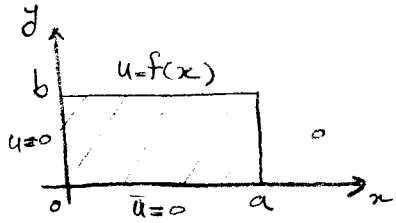
معادله گرمای دوبعدی در حالت پایدار

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \xrightarrow[\partial u/\partial t = 0]{\text{در حالت پایدار}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادله لاپلاس

مثال ۵

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 & 0 < y < b \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = f(x) & 0 < x < a \end{cases}$$



۱) تفکیک متغیرها: $X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = -\sigma$

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 & X(0) = X(a) = 0 \\ Y' - \sigma Y = 0 & Y(0) = 0 \end{cases}$$

۲) $\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \sigma_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$

$$Y'' - \sigma_n Y = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 e^{-k_n y} + c_2 e^{+k_n y} = c_1 \sinh k_n y + c_2 \cosh k_n y$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow Y_n(y) = \sinh k_n y$$

۳) $u_n(x,y) = X_n(x)\,Y_n(y) \Rightarrow u_n(x,y) = \sin k_n x \sinh k_n y$ $\quad n = 1, 2, \dots$, $k_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sinh k_n y \qquad k_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)$$

$$u(x,b) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sinh k_n b = f(x)$$

$$A_n \sinh k_n b = \frac{\langle f(x), \sin\frac{n\pi}{a}x\rangle}{a/2} \Rightarrow A_n = \frac{2\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx}{a\sinh k_n b} \qquad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

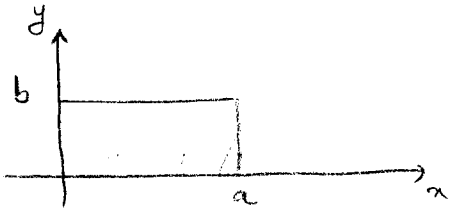
(*)

معادلهٔ موج دوبعدی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad , \quad u(x,y,t)$$

مثال ۹: غشای مستطیلی مرتعش :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) & 0<x<a \ , \ 0<y<b \ , \ t \geq 0 \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$



۱) تفکیک متغیرها $u(x,y,t) = W(x,y)\cdot T(t)$

در معادله $T''W = c^2(W_{xx} + W_{yy})T \Rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{W_{xx}+W_{yy}}{W} = -\lambda^2$ ثابت شود

$$\begin{cases} T'' + c^2\lambda^2 T = 0 \\ W_{xx} + W_{yy} = -\lambda^2 W \end{cases}$$

$W(0,y)T(t) = W(a,y)T(t) = 0$

$\Rightarrow W(0,y) = W(a,y) = 0$

$W(x,0)T(t) = W(x,b)T(t) = 0$

$\Rightarrow W(x,0) = W(x,b) = 0$

$$W_{xx} + W_{yy} = -\lambda^2 W \xrightarrow{W = XY} X''Y + XY'' = -\lambda^2 XY$$

$$\rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{X''}{X} = \text{ثابت} \\ \frac{Y''}{Y} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$W(0,y) = W(a,y) = 0 \Rightarrow X(0) = X(a) = 0$

$W(x,0) = W(x,b) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(b) = 0$

۲)

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

① مقادیر ویژه این مسئله مشخص شده

$$\begin{cases} Y'' + \nu^2 Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

② مقادیر ویژه این مسئله مشخص شده

$\mu^2 + \nu^2 = \lambda^2$

پس

$X_m = \sin\frac{m\pi}{a}x$ $\qquad$ $Y_n = \sin\frac{n\pi}{b}y$ $\qquad$ $\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_n^2$

مقادیر ویژه $\sigma_{X,m} = \mu_m^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$ $\qquad$ $\sigma_{Y,n} = \nu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

$$W_{mn}(x,y) = X_m(x)\, Y_n(y) = \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \qquad \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{matrix}$$

معادله بعدی $\quad T'' + \lambda_{mn}^2 c^2 T = 0 \qquad \lambda_{mn}^2 = \mu_n^2 + \nu_m^2$

$$\Rightarrow T_{mn}(t) = A_{mn}\cos\lambda_{mn}ct + B_{mn}\sin\lambda_{mn}ct$$

۳) $\quad u_{mn}(x,y,t) = W_{mn}(x,y)\, T_{mn}(t)$

$$= \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \left[A_{mn}\cos\lambda_{mn}ct + B_{mn}\sin\lambda_{mn}ct\right]$$

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad \begin{matrix} n=1,2,\dots \\ m=1,2,\dots \end{matrix}$$

ترکیب خطی جوابها : $\quad u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\lambda_{mn}ct + B_{mn}\sin\lambda_{mn}ct\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

شرایط اولیه :

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y = f(x,y) \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\lambda_{mn}c\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y = g(x,y) \end{cases}$$

سری فوریه دوبعدی :

$f(x,y)$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y = f(x,y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{n\pi}{b}y = k_m(y) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin\frac{m\pi}{a}x = f(x,y)$$

$$\Rightarrow k_m(y) = \frac{\langle f(x,y), \sin\frac{m\pi}{a}x\rangle}{a/2} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

$$A_{mn} = \frac{\langle k_m(y), \sin\frac{n\pi}{b}y\rangle}{b/2} = \frac{2}{b}\int_0^b k_m(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

پس $$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

$$B_{mn}\lambda_{mn}c = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$