فصل دوم
سیگنال‌ها و فضای سیگنال

سیگنال: تابعی است از یک متغیر مستقل (معمولاً زمان)
سیستم: سیگنال ورودی را پردازش می‌کند یا تغییر می‌دهد یا اطلاعاتی از آن استخراج می‌کند. یک سیگنال خروجی می‌دهد.

سایز سیگنال: معیاری کمّی است برای مقایسه قدرت و کارائی یک سیگنال.

۱) انرژی یک سیگنال: انرژی سیگنال $g(t)$ در فاصله t_1 تا t_2 عبارتست از انرژی که این سیگنال در این فاصله به عنوان ولتاژ در یک مقاومت ۱ اهمی تلف می‌کند:

$$E_g(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g^2(t)\mathrm{d}t \qquad E_g(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2\mathrm{d}t$$

انرژی کل سیگنال:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2\mathrm{d}t \qquad E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\mathrm{d}t$$

شرط لازم برای وجود انرژی (انرژی کل): $$\lim_{|t|\to\infty} g(t) = 0$$

که سیگنال‌های مهمی مانند سیگنال‌های متناوب، سیگنال‌های تصادفی و بعضی سیگنال‌های مهم دیگر این خاصیت را ندارند و انرژی‌شان موجود نیست (بی‌نهایت است). در این موارد یک معیار مناسب توان (متوسط) سیگنال است.

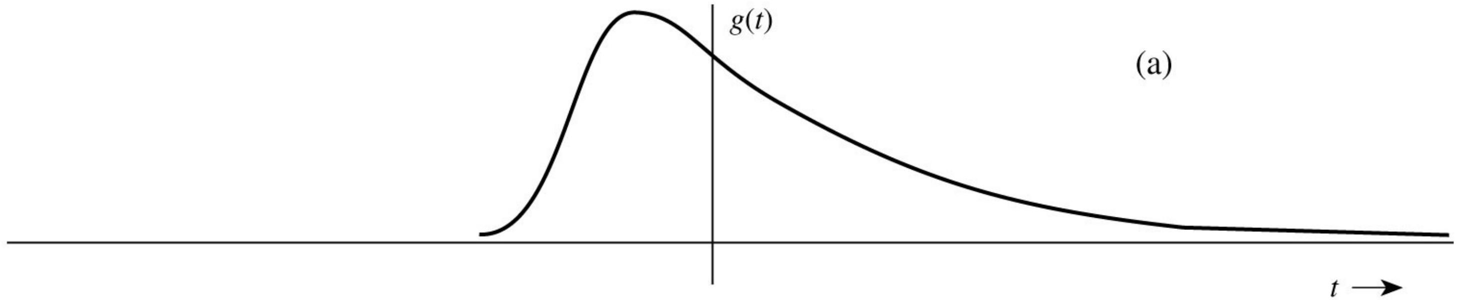
توان بین t_1 و t_2

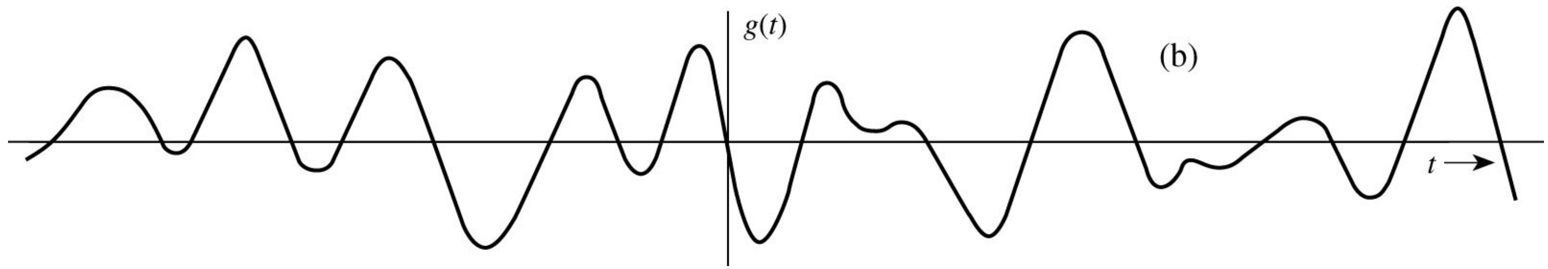
$$P_g(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 \mathrm{d}t$$

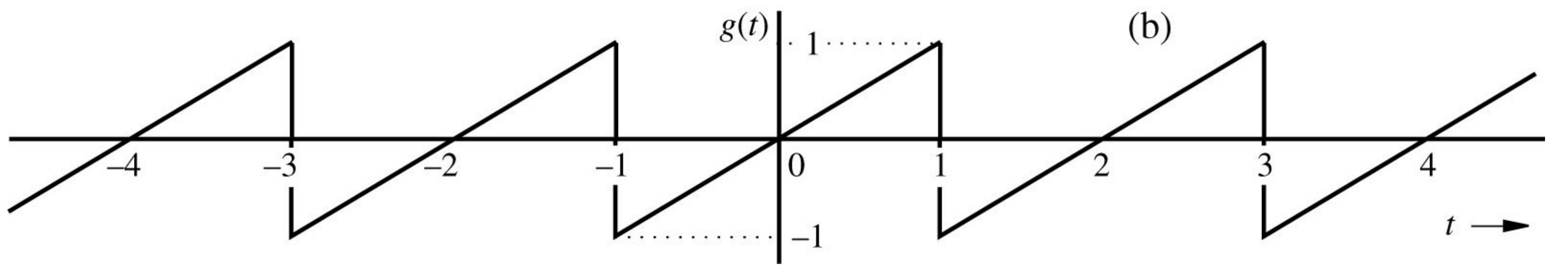
توان کل

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) \mathrm{d}t$$

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 \mathrm{d}t$$







$$g(t) = \cos(t) + 5\cos(\pi t)$$

نکته: $$g_{rms} = \sqrt{P_g}$$

واحدهای توان و انرژی: واحد انرژی ژول (J) و واحد توان وات (W) است. در عمل استفاده از مقیاسهای لگاریتمی dB (دسی بل) و dBm برای توان معمول است:

دی‌بی وات:

$$\text{dBW}: \qquad P_{(dBW)} = 10.\log_{10} P_{(W)}$$

$$P_{(W)} = 10^{(\frac{P_{(dBW)}}{10})}$$

دی‌بی ام:

$$\text{dBm}: \qquad P_{(dBm)} = 10.\log_{10} P_{(mW)}$$

$$= 10.\log_{10}(P_{(W)}.10^3)$$

$$= P_{(dBW)} + 30$$

$$P_{(mW)} = 10^{(\frac{P_{(dBm)}}{10})}$$

$$1W = 0dB = 30dBm$$

$$10^{-6}W = -60dB = -30dBm$$

$$20W = 13dB = 43dBm$$

نکته: برای سیگنال‌های متناوب توان سیگنال با توان سیگنال در یک دوره تناوب برابر است. یعنی اگر دوره تناوب سیگنال g(t) برابر T_0 باشد:

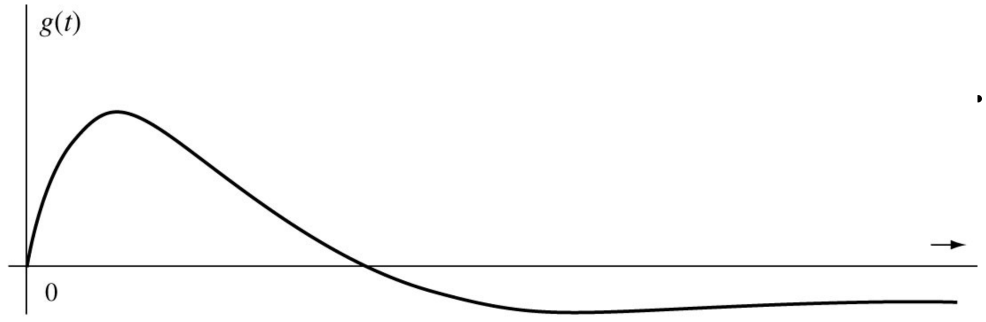
$$P_g = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |g(t)|^2 \mathrm{d}t$$

سیگنال‌های دارای انرژی محدود (که توان‌شان صفر می‌شود)، سیگنال انرژی می‌نامند. سیگنال‌های دارای توان محدود و غیر صفر (که انرژی‌شان بی‌نهایت می‌شود)، سیگنال توان می‌نامند. بعضی سیگنال ها نه سیگنال انرژی‌اند و نه سیگنال توان.

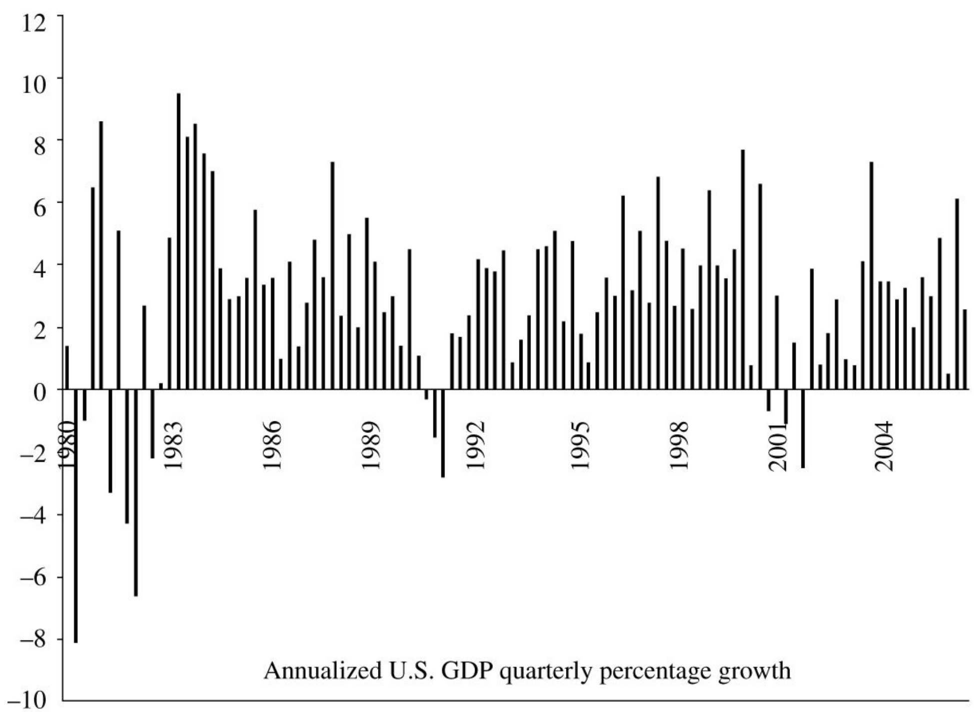
مثال ۱ ـ ۲ صفحه ۱۷ را حل کنید.

طبقه‌بندی سیگنال‌ها

- سیگنال‌ها زمان‌ـ‌پیوسته یا زمان‌گسسته‌اند.



(a)



(b)

- سیگنال‌ها آنالوگ یا دیجیتال‌اند.

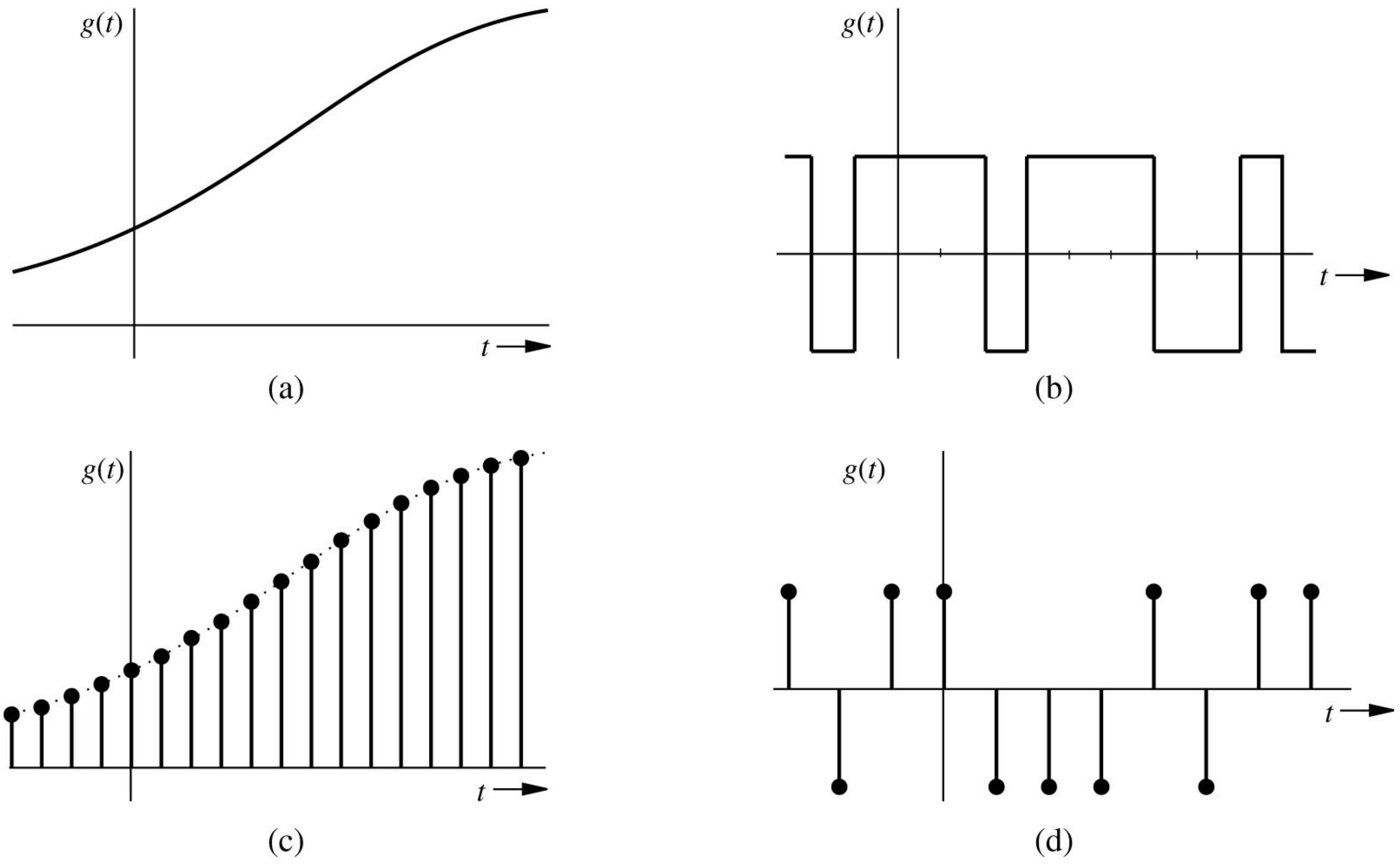
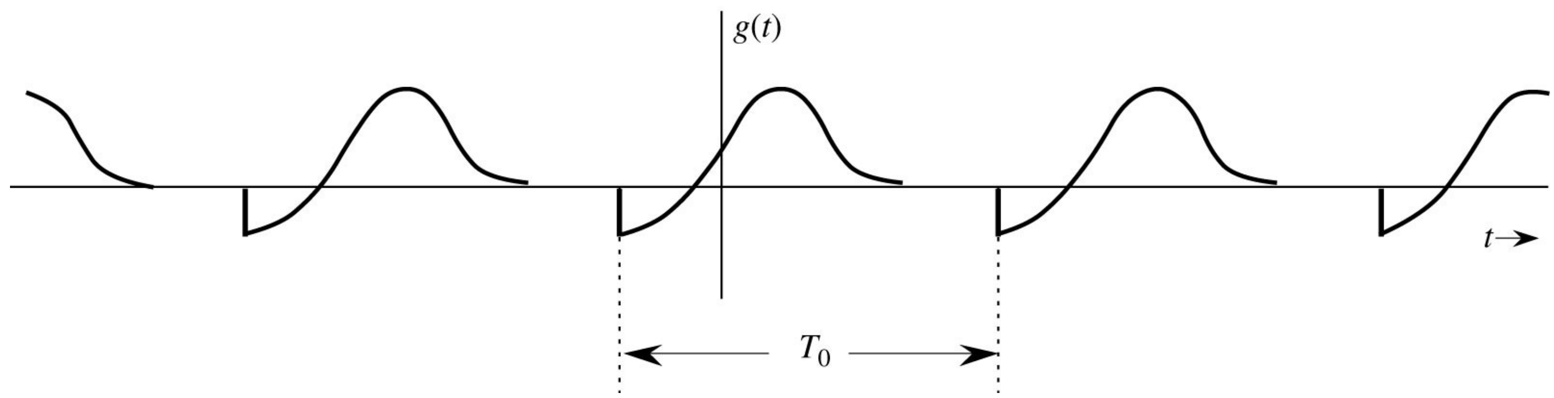


Figure 2.4 Examples of signals: (a) analog and continuous time; (b) digital and continuous time;
(c) analog and discrete time; (d) digital and discrete time.

- سیگنال‌ها متناوب و یا غیر متناوب‌اند.



سیگنال‌های متناوب در تمام مقادیر متغیر باید تعریف شده‌باشند.

تابع متناوب با دوره T_0 با دوره mT_0 هم متناوب است.

- سیگنال‌ها، یا سیگنال انرژی‌اند و یا سیگنال توان.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

نکته: تمام سیگنال‌ها، در عالم واقع، سیگنال انرژی‌اند.

- سیگنال‌ها قطعی (یقینی، معیّن) (deterministic) و یا تصادفی (stochastic) یا (random) هستند.

سیگنال‌های نویز، سیگنال‌های تصادفی هستند.

سیگنال‌های ضربه واحد و پله واحد

سیگنال ضربه واحد:

$$\delta(t) = 0 \quad , t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)\mathrm{d}t = \int_{T^-}^{T^+} \delta(t-T)\mathrm{d}t = 1$$

ضرب کردن یک تابع در یک ضربه:

به فرض تابع $\varphi(t)$ در t=0 (در t=T)، پیوسته باشد:

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$

$$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

در نتیجه: خاصیت غربالی یا نمونه‌برداری تابع ضربه به‌دست می‌آید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t = \phi(T)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)\mathrm{d}t = \phi(T)$$

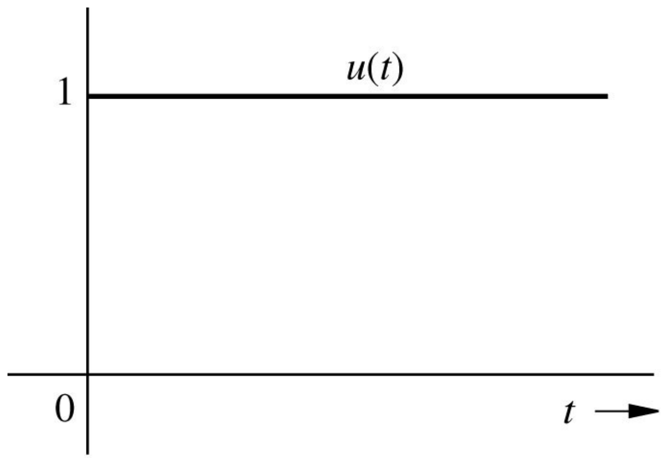
$$\int_{T^-}^{T^+} \phi(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t = \phi(T)\int_{T^-}^{T^+} \delta(t-T)\mathrm{d}t = \phi(T)$$

و می‌توان ثابت کرد:

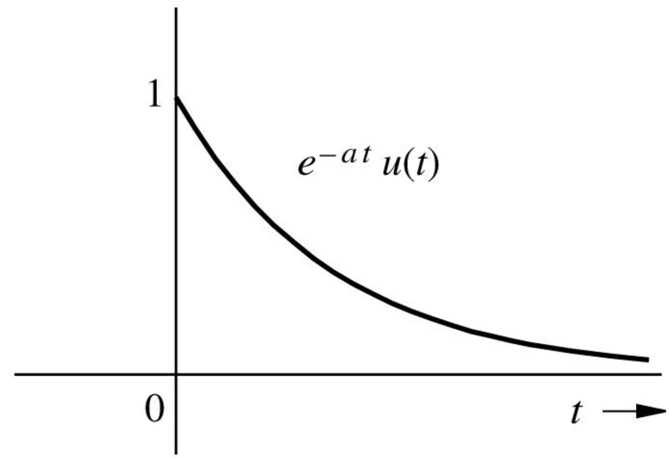
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

سیگنال پله واحد:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



(a)



(b)

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \delta(t)$$

فضای ضرب داخلی سیگنال‌ها

تعریف: ضرب داخلی دو سیگنال مختلط $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در فاصله t_1 و t_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)\mathrm{d}t$$

دو سیگنال در فاصله t_1 و t_2 متعامد (orthogonal) هستند، اگر ضرب داخلی‌شان در این فاصله صفر شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x_1^*(t)x_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

تعریف نُرم (norm) یک تابع (به‌جای طول یک بردار):

$$||x(t)|| = [\langle x(t), x(t)\rangle]^{1/2}$$
$$= \left[\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$$
$$= \sqrt{E_x(t_1, t_2)}$$

$$||x(t)||^2 = E_x(t_1, t_2)$$

قضیه: اگر دو سیگنال x و y، دو سیگنال **متعامد** باشند، انرژی مجموع این دو سیگنال با مجموع انرژی‌های هر یک برابر است. یعنی اگر z=x+y :

$$||z(t)||^2 = ||x(t)||^2 + ||y(t)||^2$$

نکته: این قضیه برای مجموع هر تعداد سیگنال دو به دو بر هم متعامد برقرار است.

قضیه و نکته را اثبات کنید.

سری‌های فوریه نمایی

مجموعه زیر یک مجموعه از توابع متناوب با دوره تناوب T_0 و در فاصله‌ای به طول T_0، دو به دو بر هم متعامدند.

$$\left\{\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\right\} \quad ,\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad ,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

اثبات کنید.

ثابت می‌شود (قضیه دیریکله) که هر سیگنال متناوب با بعضی شرایط (شرایط دیریکله) را می‌توان به‌صورت سری فوریه نمایی نمایش داد.

$g(t)$ متناوب با دوره تناوب T_0 :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \mathrm{e}^{jn2\pi f_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

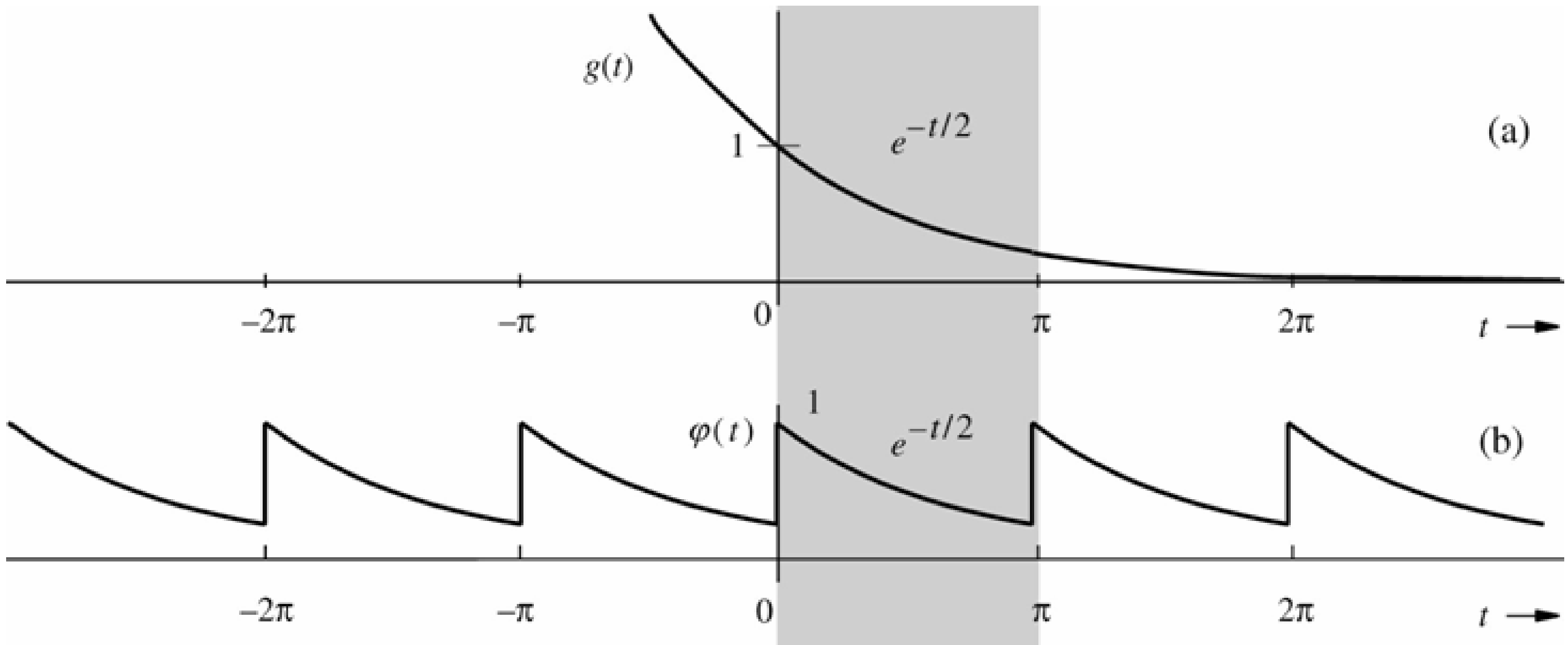
که D_nها، ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال $g(t)$، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) \mathrm{e}^{-jn2\pi f_0 t} \mathrm{d}t$$

روشن است که اگر سیگنال g(t) **حقیقی** باشد، ضرایب سری فوریه آن خاصیت تقارن مزدوج دارند:

$$D_{-n} = D_n^* \quad \Rightarrow \begin{cases} |D_{-n}| = |D_n| \\ \sphericalangle D_{-n} = -\sphericalangle D_n \end{cases}$$

مثال: ضرایب سری فوریه تابع شکل (b) زیر را به‌دست آورید:



$$\varphi(t) = g(t) = \mathrm{e}^{-t/2}, \quad 0 < t < \pi, \quad T_0 = \pi$$

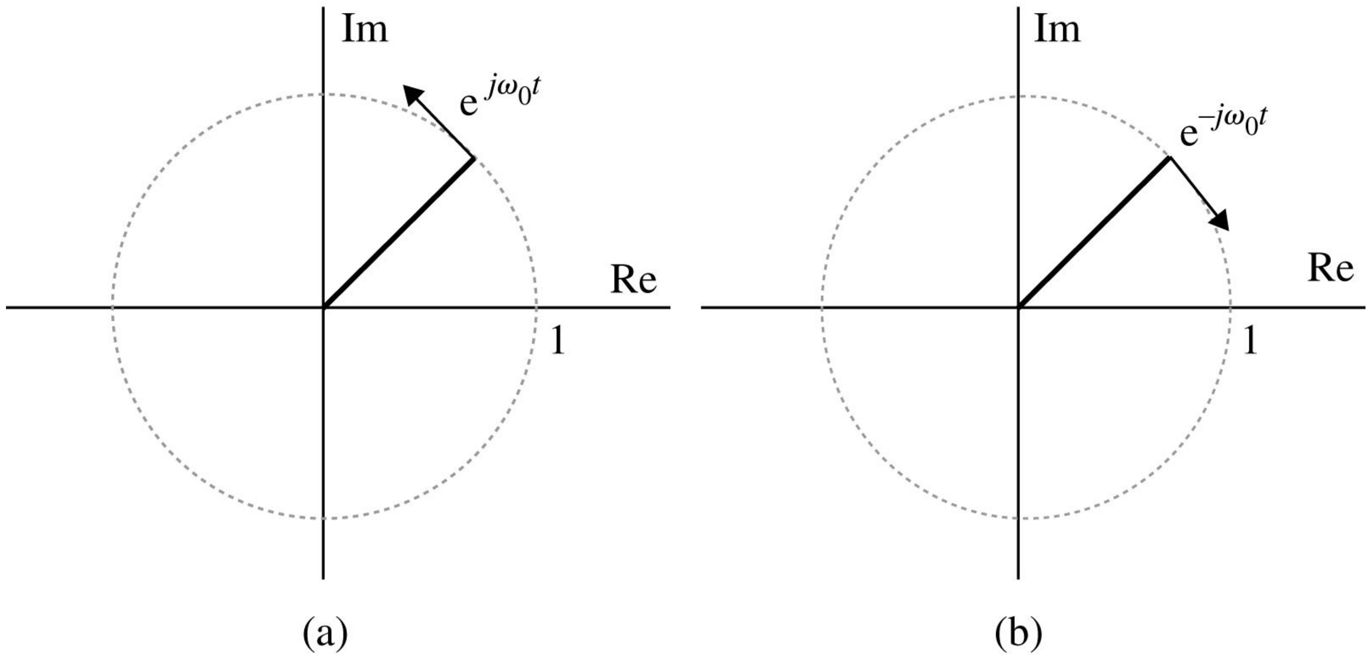
تعبیر فرکانس منفی:

$$e^{j\omega_0 t} : \ |e^{j\omega_0 t}| = 1, \quad \sphericalangle e^{j\omega_0 t} = \omega_0 t$$

با فرکانس زاویه‌ای ω_0 در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت می‌گردد.

$$e^{-j\omega_0 t} : \ |e^{-j\omega_0 t}| = 1, \quad \sphericalangle e^{-j\omega_0 t} = -\omega_0 t$$

با فرکانس زاویه‌ای ω_0 در جهت چرخش عقربه‌های ساعت می‌گردد.



هر دو مؤلفه توابع متناوب با فرکانس ω_0 هستند. ولی در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند. پس با اینکه فرکانس فیزیکی یک کمیت مثبت است، برای نمایی مختلط $e^{-j\omega_0 t}$ ، که جهت چرخششان خلاف $e^{j\omega_0 t}$ است، از تعبیر فرکانس منفی $-\omega_0$ استفاده می‌کنیم.

$$D_0 : \quad D_0 = 0.504, \quad \omega = \omega_0 = 0 \,\mathrm{rad/sec}$$

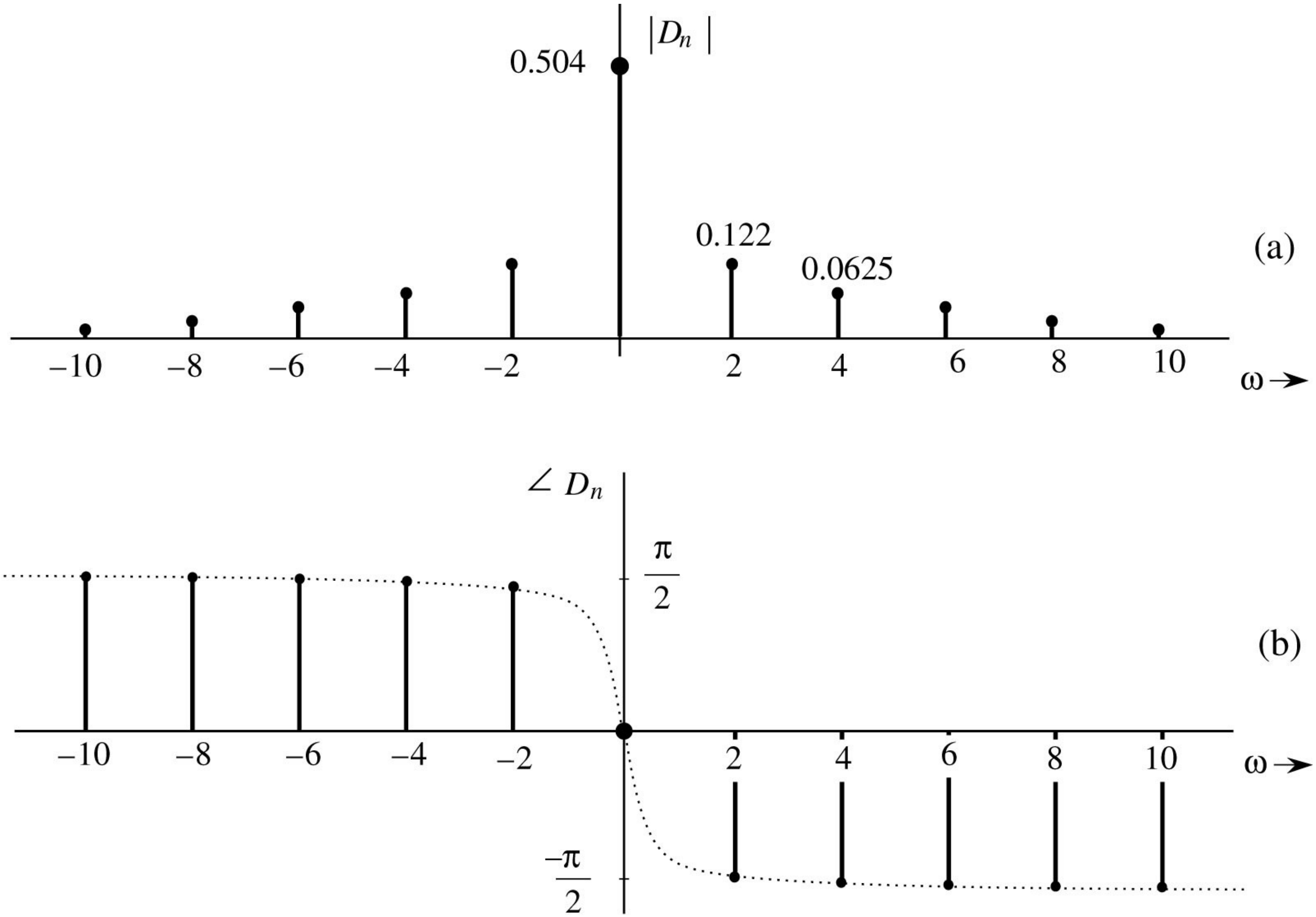
$$D_1 \mathrm{e}^{j\omega_0 t} : \; D_1 = \frac{0.504}{1+j4} = 0.122\mathrm{e}^{-j75.96^\circ}, \quad \omega = \omega_0 = 2 \,\mathrm{rad/sec}$$

$$D_{-1} \mathrm{e}^{-j\omega_0 t} : \; D_{-1} = \frac{0.504}{1-j4} = 0.122\mathrm{e}^{j75.96^\circ}, \quad \omega = -\omega_0 = -2 \,\mathrm{rad/sec}$$

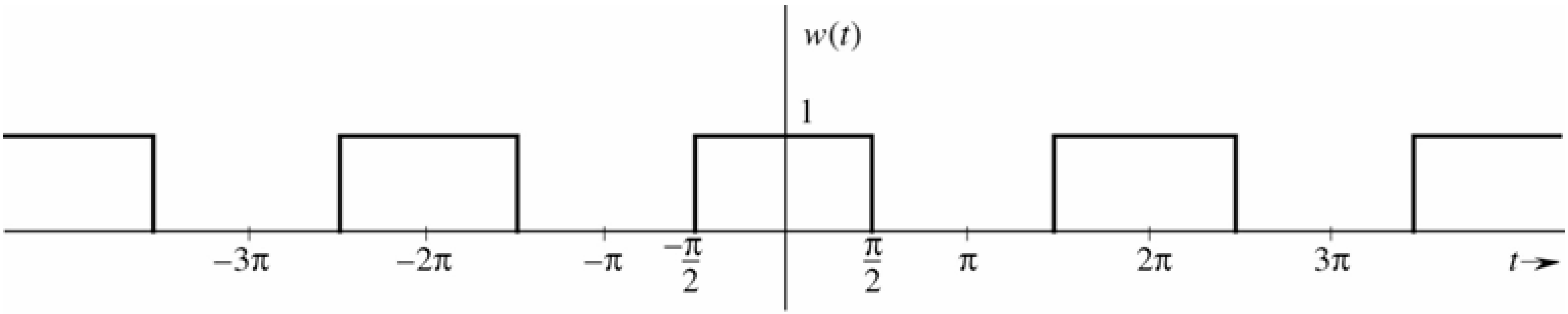
$$D_2 \mathrm{e}^{j2\omega_0 t} : \; D_2 = \frac{0.504}{1+j8} = 0.0625\mathrm{e}^{-j82.87^\circ}, \quad \omega = 2\omega_0 = 4 \,\mathrm{rad/sec}$$

$$D_{-2} \mathrm{e}^{-j2\omega_0 t} : \; D_{-2} = \frac{0.504}{1-j8} = 0.0625\mathrm{e}^{j82.87^\circ}, \quad \omega = -2\omega_0 = -4 \,\mathrm{rad/sec}$$

طیف فوریه نمایی سیگنال متناوب: (a) طیف اندازه و (b) طیف فاز

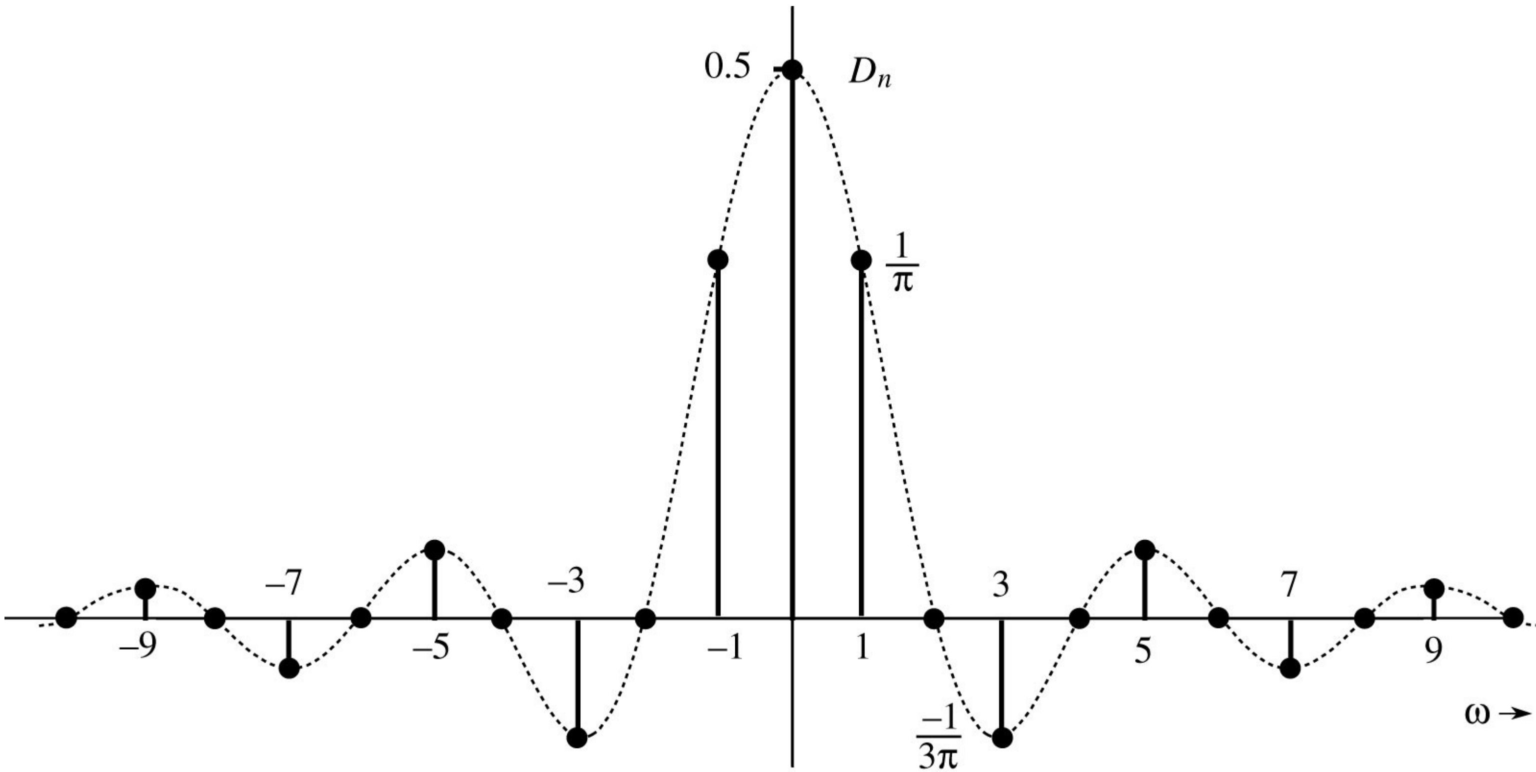


مثال: ضرایب سری فوریه موج مربعی متناوب w(t) زیر را به‌دست آورید:

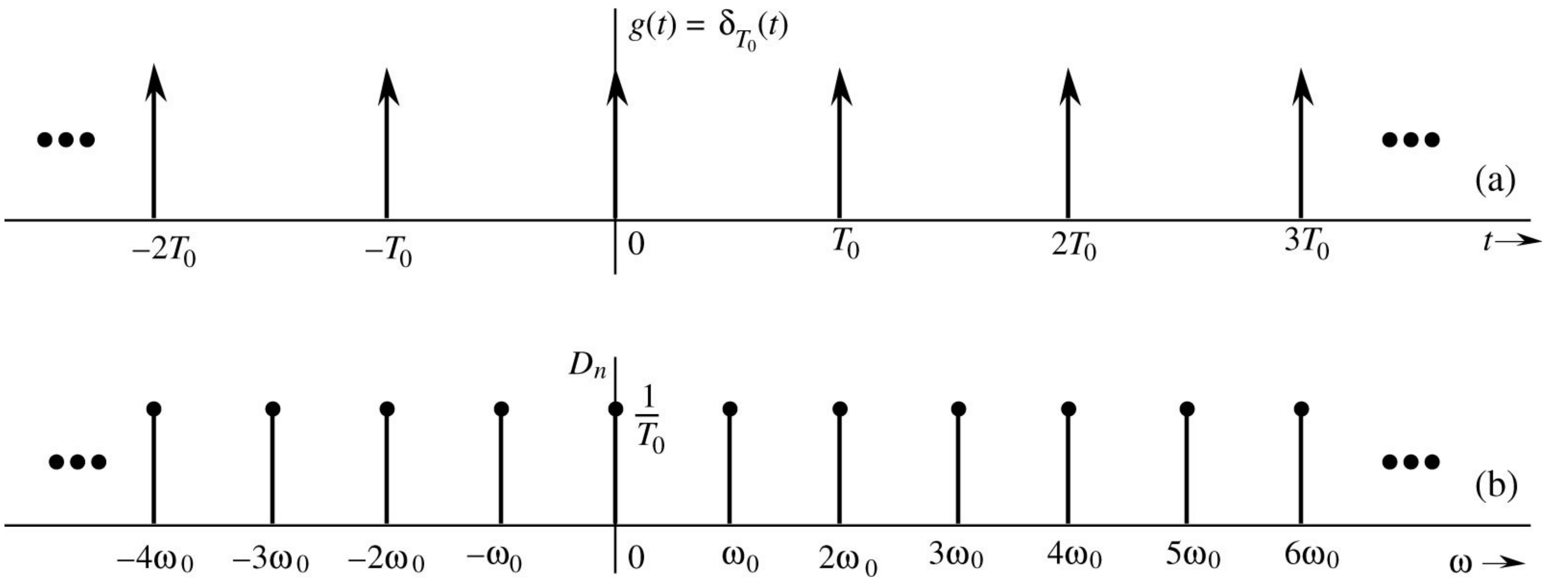


(a)

طیف فوریه نمایی:



مثال: ضرایب سری فوریه قطار ضربه شکل زیر را به‌دست آورید:



قضیه پارسوال:

با توجه به تعامد توابع در سری فوریه، به سادگی دیده می‌شود که:

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |D_n|^2$$

برای سیگنال حقیقی:

$$P_g = |D_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|^2$$

تعریف تابع همبستگی: برای مقایسه میزان شباهت میان دو سیگنال از مفهوم همبستگی (correlation) دو سیگنال استفاده می‌شود.

ضریب همبستگی (correlation coefficient) بین سیگنال‌های حقیقی z(t) و g(t):

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_z}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)z(t)\mathrm{d}t$$

تابع همبستگی متقابل(cross correlation function):

$$\psi_{gz}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)z(t+\tau)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)z(t)\mathrm{d}t$$

تابع خود همبستگی (autocorrelation function):

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t$$