دنباله

اگر تعدادی عدد را پشت سر هم بنویسیم آن‌گاه آن تعداد عدد را یک دنباله گویند که اگر تعداد آن اعداد محدود باشد آن دنباله را متناهی و اگر تعداد آن اعداد نامحدود باشد آن دنباله را نامتناهی گویند. هر یک از اعضاء دنباله را یک جمله گویند.

جملات اول، دوم، سوم، ....، nاُم یک دنباله را به ترتیب با a_1، a_2، a_3، ....، a_n نمایش می‌دهند. البته جمله‌ی nاُم دنباله یعنی a_n را معمولاً به صورت $\{a_n\}$ نیز نمایش داده و به آن جمله‌ی عمومی می‌گویند.

به عنوان مثال اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید، این دنباله به هر عدد طبیعی معکوس آن را نسبت می‌دهد. به عبارت دیگر داریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

جمله‌ی اول این دنباله ۱، جمله‌ی دوم $\frac{1}{2}$، جمله‌ی سوم $\frac{1}{3}$ و ... می‌باشند. به این ترتیب به ازای هر n طبیعی می‌توان جمله nاُم را حدس زد. به عنوان مثالی دیگر اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{n+1}{n}$ را در نظر بگیرید، جمله‌ی اول این دنباله با قرار دادن عدد یک به جای n به‌دست می‌آید:

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

و به همین ترتیب داریم:

$$a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}\ , \qquad a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

بنابراین می‌توانیم دنباله را به صورت زیر هم نشان دهیم:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

مثال ۱ چهار جمله‌ی اول یک دنباله به صورت زیر است. جمله‌ی بعدی دنباله چیست؟

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

حل: جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = \frac{1}{2^n}$ می‌باشد. بنابراین جمله‌ی پنجم با قرار دادن عدد ۵ به جای n در جمله‌ی عمومی به‌دست می‌آید:

$$a_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

مثال ۲ جمله‌ی nاُم (جمله‌ی عمومی) دنباله‌های زیر را بنویسید.

$a)\ 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \qquad b)\ 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

حل: $a)\ a_n = (-1)^{n-1} \qquad b)\ b_n = 2n$

* آیا همیشه می‌توان جمله‌ی عمومی یک دنباله را حدس زد؟

پاسخ این پرسش منفی است. زیرا:

اولاً: در بعضی از دنباله‌ها جمله‌ی عمومی مشخص نیست. به عنوان مثال دنباله‌ی اعداد اول، دنباله‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n و ...

ثانیاً: از راه‌های متفاوت می‌توان دنباله‌های اعداد را تشکیل داد و لذا ممکن است که دو یا چند دنباله‌ی مختلف در بعضی از جمله‌ها مشترک باشند.

مثال ۳ چهار جمله‌ی اول دنباله‌ای به صورت روبه‌رو است: $۱, ۱, ۱, ۱$

جمله‌ی بعدی چیست؟

حل. به نظر می‌رسد که جمله‌ی عمومی در این دنباله باید به صورت $a_n = ۱$ و جمله‌ی بعدی در دنباله عدد ۱ باشد ولی ممکن است چهار عدد فوق، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر باشند:

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰, ۰$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود. عدد n را می‌توان به صورت $۸k + r$ نوشت به طوری که

$$r, k \in W \;,\;\; k \geq ۰ \qquad b_n = \begin{cases} ۰ & ۵ \leq r \leq ۸ \\ ۱ & ۱ \leq r \leq ۴ \end{cases}$$

پس اصولاً معرفی دنباله به صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ کامل نیست و حتماً باید جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کرد.

مثال ۴ یک دنباله از عددها به این صورت ساخته می‌شود:

عدد اول این دنباله برابر با ۱ و پس از آن هر عدد برابر با مجموع عددهای قبل از خودش به اضافه‌ی یک است.

nاُمین عنصر این دنباله برابر با چند است؟

الف) n ب) $۲n - ۱$ ج) $۲^n - ۱$ د) ۲^n هـ) $۲^{n-۱}$

حل. دنباله‌ی خواسته شده به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$a_۱ = ۱ \qquad a_۲ = ۱ + ۱ = ۲$$
$$a_۳ = ۱ + ۲ + ۱ = ۴ \qquad a_۴ = ۱ + ۲ + ۴ + ۱ = ۸$$
$$a_۵ = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱ = ۱۶ \qquad \cdots$$
$$\Rightarrow \{a_n\} = ۲^{n-۱}$$

بنابراین گزینه (هـ) صحیح است.

(یادآوری می‌شود که حاصل $۱ + ۲^{n-۲} + \cdots + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰$ با توجه به اتحاد $(x^n - ۱) = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x^۲ + x^۱ + x^۰)$ برابر با $۲^{n-۱}$ به‌دست می‌آید.)

مثال ۵ اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله به شکل $a_n = ۳^n + ۸۶$ تعریف شود آن‌گاه در آن دنباله چند عدد سه‌رقمی وجود دارد؟

حل:

$$100 \le 3^n + 86 < 1000 \Rightarrow 14 \le 3^n < 914 \Rightarrow n = 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6$$

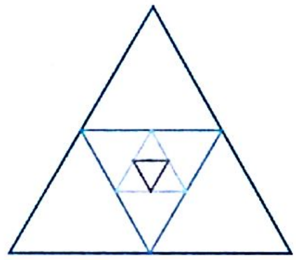
معلوم می‌شود که جملات سوم تا ششم آن دنباله همگی سه‌رقمی هستند.

مثال ۶ **وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری در وسط آن ایجاد شود. در وسط این مثلث نیز به همان ترتیب مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری ایجاد می‌کنیم و این کار را n بار انجام می‌دهیم. می‌دانیم که در شکل حاصل مجموعاً ۴۵ مثلث می‌توان شمرد. n برابر است با:**

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ هـ) ۲۲

حل: دنباله‌ی تعداد مثلث‌های ایجاد شده به شکل مقابل می‌باشد (شکل ۱ـ۱ برای $n = 3$ رسم شده است):

$$5, 9, 13, \cdots$$



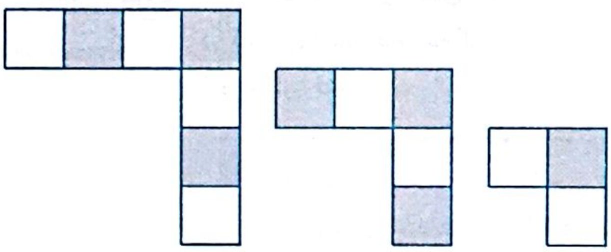
شکل ۱-۱

در هر مرحله ۴ مثلث به تعداد مثلث‌های مرحله‌ی قبل اضافه می‌شود، بنابراین جمله‌ی عمومی آن دنباله به شکل $a_n = 1 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{n\text{تا}}$ یا $a_n = 1 + 4n$ به‌دست می‌آید، پس

$$1 + 4n = 45 \Rightarrow 4n = 44 \Rightarrow n = 11$$

معلوم می‌شود که گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مثال ۷ **شکل‌های زیر با چوب کبریت ساخته شده‌اند:**



شکل ۱-۲

الف. **در ساختن ۲۰اُمین شکل چند چوب کبریت به کار می‌رود و آن شکل چند مربع دارد؟**

ب. **در ساختن چندمین شکل ۷۰ چوب کبریت به کار می‌رود؟**

ج. **اگر کلاً ۱۵۰۰ چوب کبریت داشته باشیم و آن اشکال را از شماره‌ی ۱ تا شماره‌ی i بسازیم آن‌گاه i چند است و کل مربع‌های موجود در آن i شکل چقدر خواهد بود؟**

حل: الف. در ساختن اولین شکل ۱۰ چوب کبریت به کار می‌رود. شکل دوم همان شکل اول است فقط دو شکل به صورت‌های و به آن اضافه شده است، بنابراین شکل دوم دارای ۱۶ چوب کبریت، به همین ترتیب تعداد چوب کبریت‌ها ۶ تا ۶ تا بیش‌تر می‌شود. معلوم می‌شود که تعداد چوب کبریت‌ها در شکل nاُم برابر $6n + 4$ خواهد شد. بنابراین دنباله‌ی تعداد چوب کبریت‌ها به شکل زیر می‌شود:

$$\{a_n\} : 10, 16, 22, \cdots, 6n + 4, \cdots$$

تعداد چوب کبریت‌های ۲۰اُمین شکل برابر ۴ + ۲۰ × ۶ یعنی ۱۲۴ به‌دست می‌آید.

دنباله‌ی مربوط به تعداد مربع‌ها نیز به شکل زیر می‌باشد:

$$\{b_n\} \ : \ ۳, ۵, ۷, \cdots, ۲n + ۱, \ldots$$

بنابراین تعداد مربع‌ها در ۲۰اُمین شکل برابر ۱ + ۲۰ × ۲ یعنی ۴۱ خواهد شد.

$$۶n + ۴ = ۷۰ \ \Rightarrow \ ۶n = ۶۶ \ \Rightarrow \ n = ۱۱$$

ب.

ج.

$$۱۰ + ۱۶ + ۲۲ + \cdots + ۶i + ۴ \leq ۱۵۰۰$$

$$\Rightarrow (۶ \times ۱ + ۴) + (۶ \times ۲ + ۴) + (۶ \times ۳ + ۴) + \cdots + (۶i + ۴) \leq ۱۵۰۰$$

$$\Rightarrow ۶(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + i) + ۴i \leq ۱۵۰۰^{*}$$

$$\Rightarrow ۳i(i + ۱) + ۴i \leq ۱۵۰۰$$

$$\Rightarrow i(۳i + ۷) \leq ۱۵۰۰ \ \Rightarrow \ i_{\max} = ۲۱$$

معلوم است که در ۲۱اُمین شکل، ۱ + ۲۱ × ۲ یعنی ۴۳ مربع وجود دارد، پس:

$$\text{تعداد کل مربع‌ها} = ۳ + ۵ + ۷ + \cdots + ۴۳$$

$$= (۲ \times ۱ + ۱) + (۲ \times ۲ + ۱) + (۲ \times ۳ + ۱) + \cdots + (۲ \times ۲۱ + ۱)$$

$$= ۲ \times \frac{۲۱ \times ۲۲}{۲} + ۲۱ \times (۱) = ۴۸۳$$

مثال ۸ **قرار است با تعدادی کره‌ی مشابه دنباله‌ای از هرم‌های مثلث‌القاعده‌ی منتظم، بسازیم به طوری که در قاعده‌ی اولین هرم، سه کره و در کل آن چهار کره، در قاعده‌ی دومین هرم، شش کره و در کل آن ده کره به کار رفته است:**

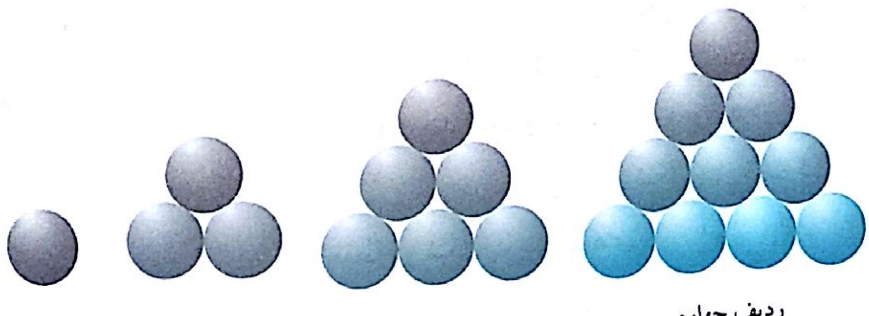
الف. در قاعده‌ی پنجمین هرم چند کره به کار می‌رود؟

ب. در ساختن پنجمین هرم کلاً چند کره به کار می‌رود؟

ج. در قاعده‌ی چندمین هرم ۳۶ کره به کار می‌رود؟

د. در ساختن چندمین هرم کلاً ۱۲۰ کره به کار رفته است؟

حل. الف. اگر از بالا به این هرم نگاه کنیم، شکل هر ردیف به طور مستقل به صورت زیر می‌باشند:



شکل ۱-۳

*) یادآوری می‌شود که مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا m برابر $\frac{m(m+۱)}{۲}$ می‌باشد.

بنابراین در هرم nاُم در ردیف اول یک کره، در ردیف دوم $۲ + ۱$ کره، در ردیف سوم $۳ + ۲ + ۱$ کره، در ردیف چهارم $۴ + ۳ + ۲ + ۱$ کره، ... و در ردیف $(n + ۱)$اُم (یعنی قاعده‌ی هرم) $(n + ۱) + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ کره قرار دارد، بنابراین دنباله‌ی تعداد کره‌های موجود در قاعده‌های هرم‌ها به شکل زیر خواهد بود:

$$\{a_i\} \ : \ ۳, ۶, ۱۰, \cdots, \frac{(i+۱)(i+۲)}{۲}, \cdots \Rightarrow a_۵ = \frac{۶ \times ۷}{۲} = ۲۱$$

ب. با توجه به توضیحات قسمت قبل معلوم می‌شود که در ردیف‌های اول تا ششمِ پنجمین هرم به ترتیب ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵ و ۲۱ کره موجود است که مجموع آن‌ها ۵۶ می‌شود.

ج. $\frac{(i+۱)(i+۲)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow (i+۱)(i+۲) = ۷۲ \Rightarrow (i+۱) = ۸ \Rightarrow i = ۷$

د. فرض می‌کنیم در mاُمین هرم ۱۲۰ کره به کار رفته باشد، پس:

$$۱ + (۱ + ۲) + (۱ + ۲ + ۳) + \cdots + (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (m + ۱)) = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow ۱ + \frac{۲ \times ۳}{۲} + \frac{۳ \times ۴}{۲} + \cdots + \frac{(m+۱)(m+۲)}{۲} = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{m+۱} \frac{i(i+۱)}{۲} = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m+۱} i^۲ + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m+۱} i = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)(m+۲)(۲m+۳)}{۱۲} + \frac{(m+۱)(m+۲)}{۴} = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)(m+۲)(۲m+۶)}{۱۲} = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m+۲)(m+۳) = ۷۲۰ \Rightarrow m + ۱ = ۸ \Rightarrow m = ۷$$

رابطه‌های بازگشتی

در تعدادی از دنباله‌ها بین هر جمله و جمله‌های قبل از آن رابطه‌ای برقرار است که به آن «**رابطه‌ی بازگشتی**» می‌گویند. در چنین دنباله‌هایی با معلوم بودن بعضی از جملات می‌توان به کمک رابطه‌ی بازگشتی موجود، جمله‌های دیگر را به‌دست آورد.

مثال ۹ دنباله‌ی زیر را مشخص کنید:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-۱} + ۱ \\ u_۱ = ۱ \end{cases}$$

حل. جمله‌ی اول این دنباله عدد ۱ و هر جمله یک واحد از جمله‌ی قبلی‌اش بیش‌تر است. لذا $\{u_n\}$ همان دنباله‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

$$u_۲ = u_۱ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$u_۳ = u_۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

$$u_۴ = u_۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$$

مثال ۱۰ دنباله‌ی زیر دارای رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد. آن را مشخص کنید.

$$۷, ۱۲, ۱۸, ۲۵, ۳۳, \ldots$$

حل. در این دنباله اختلاف هر دو جمله ۳ تا بیش‌تر از شماره‌ی جمله‌ی بزرگ‌تر است؛ یعنی:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-۱} + (n+۳) \\ u_۱ = ۷ \end{cases}$$

مثال ۱۱ فاکتوریل* هر عدد را می‌توان به صورت بازگشتی تعریف کرد. آن را مشخص کنید.

حل. $n! = n(n-۱)!$

بنابراین دنباله‌ای که شامل فاکتوریل اعداد طبیعی باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u_n = n.(u_{n-۱}) \\ u_۱ = ۱ \end{cases} \qquad ۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, \ldots$$

مثال ۱۲ دنباله‌ی فیبوناچی به شکل زیر تعریف می‌شود. ده جمله‌ی اول آن را بنویسید.

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \\ a_۲ = ۱ \\ a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \quad n \geq ۳ \end{cases}$$

حل.

$$a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۱ \Rightarrow a_۳ = ۱ + ۱ = ۲ \quad , \quad a_۴ = ۲ + ۱ = ۳$$

$$a_۵ = ۳ + ۲ = ۵ \quad , \quad a_۶ = ۵ + ۳ = ۸ \quad , \quad a_۷ = ۸ + ۵ = ۱۳$$

$$a_۸ = ۱۳ + ۸ = ۲۱ \quad , \quad a_۹ = ۲۱ + ۱۳ = ۳۴ \quad , \quad a_{۱۰} = ۳۴ + ۲۱ = ۵۵$$

مثال ۱۳ n نقطه در یک صفحه چنانند که هیچ سه‌تایی از آن‌ها در یک راستا نیستند. چند پاره‌خط وجود دارد که آن نقاط را دوبه‌دو به هم وصل می‌کند؟ *

حل. تعداد خطوط مربوط به i نقطه را a_i در نظر می‌گیریم. با اضافه شدن نقطه‌ی $(i+۱)$اُم به خطوط قبلی به تعداد i خط اضافه می‌شود چون آن نقطه به تمام i نقطه‌ی قبلی وصل می‌شود، بنابراین رابطه‌ی بازگشتی $a_{i+۱} = a_i + i$ برقرار است و چون $a_۱ = ۰$ بنابراین خواهیم داشت:

$$a_۱ = ۰$$

$$a_۲ = a_۱ + ۱$$

$$a_۳ = a_۲ + ۲$$

$$a_۴ = a_۳ + ۳$$

$$\vdots$$

*) $n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$

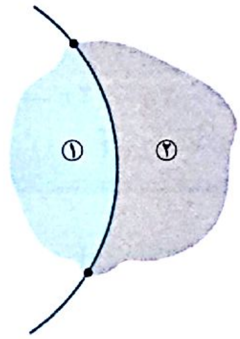
*) صورت سؤال را به این شکل نیز می‌توان مطرح کرد: «یک nضلعی محدب روی هم چند ضلع و قطر دارد؟»

$$a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)$$
$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

با جمع کردن طرفین تساوی‌های به‌دست آمده و حذف عبارت‌های یکسان از طرفین تساوی، به تساوی $a_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$ خواهیم رسید. بنابراین:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1) \times n}{2}$$

مثال ۱۴ از تلاقی ۱۰ دایره در یک صفحه حداکثر چند ناحیه ایجاد می‌شود؟



شکل ۱-۴

حل: می‌دانیم دو دایره حداکثر در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. فرض می‌کنیم از ترسیم k دایره در یک صفحه حداکثر a_k ناحیه ایجاد شده باشد، با ترسیم دایره‌ی $(k+1)$اُم اولاً k دایره‌ی قبلی را حداکثر در $2k$ نقطه قطع می‌کند و ثانیاً از یک نقطه تلاقی تا نقطه‌ی تلاقی بعدی یک ناحیه به دو ناحیه تقسیم می‌شود (همانند شکل ۱ـ۴)، بنابراین به تعداد نقاط تلاقی به نواحی قبلی، ناحیه اضافه می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی $a_{k+1} = a_k + 2k$ برقرار می‌باشد. از آن‌جا که $a_1 = 2$، خواهیم داشت:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + 2(1)$$
$$a_3 = a_2 + 2(2)$$
$$a_4 = a_3 + 2(3)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-2)$$
$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

با جمع کردن طرفین تساوی‌های به‌دست آمده و حذف عبارت‌های یکسان از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$a_n = 2 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2$$
$$\Rightarrow a_{10} = 10^2 - 10 + 2 = 92$$

دنباله‌ی حسابی (تصاعد حسابی)

دنباله‌ای را که تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی آن مقداری ثابت مانند d باشد، تصاعد حسابی یا تصاعد عددی می‌نامیم و d را قدرنسبت تصاعد می‌گوییم.

به عبارت دیگر اگر در دنباله‌ای هر جمله برابر باشد با حاصل‌جمع جمله‌ی قبل و یک مقدار ثابت، به آن دنباله یک تصاعد حسابی می‌گوییم. بنابراین یک تصاعد حسابی به قدرنسبت d دنباله‌ای به صورت $a_1, a_2, a_3, \cdots$ است به طوری که:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{یا} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

به عنوان مثال، دنباله‌ی اعداد طبیعی یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱ می‌باشد و همچنین دنباله‌ی اعداد طبیعی که بر ۳ بخش‌پذیرند یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۳ است.

مثال ۱۵ قدرنسبت تصاعدهای عددی زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱, \frac{۷}{۶}, \frac{۴}{۳}, \ldots$

ب) $۱۲/۵, ۹/۲۵, ۶, \ldots$

ج) $۳ - ۲y, ۳ + ۲y, ۳ + ۶y, \ldots$

د) $۲x - ۳y, ۳x - ۲y, ۴x - y, ۵x, \ldots$

ه) $\sqrt{۲} - ۱, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲} + ۱, \ldots$

حل:

الف) $d = \frac{۷}{۶} - ۱ = \frac{۱}{۶}$

ب) $d = ۹/۲۵ - ۱۲/۵ = -۳/۲۵$

ج) $d = ۳ + ۲y - (۳ - ۲y) = ۴y$

د) $d = ۳x - ۲y - (۲x - ۳y) = x + y$

ه) $d = ۲\sqrt{۲} - (\sqrt{۲} - ۱) = \sqrt{۲} + ۱$

نکته ۱. اگر سه عدد a، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک تصاعد حسابی باشند، خواهیم داشت:

$$b - a = c - b \Rightarrow b = \frac{a + c}{۲}$$

«عدد b را واسطه‌ی عددی دو عدد a و c می‌نامند.»

مثال ۱۶ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه عدد $\frac{m - ۱}{۲}$، $-۲m$ و $\frac{۲m + ۱}{۲}$ تشکیل یک تصاعد عددی بدهند.

حل:

$$-۴m = \frac{۲m + ۱}{۲} + \frac{m - ۱}{۲} \Rightarrow -۸m = ۳m \Rightarrow m = ۰$$

نکته ۲. اگر قدرنسبت یک تصاعد حسابی مثبت باشد، آن تصاعد **صعودی** است.

اگر قدرنسبت یک تصاعد حسابی منفی باشد، آن تصاعد **نزولی** است.

جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی

اگر $a_۱$ جمله‌ی اول و d قدرنسبت یک تصاعد عددی باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
a_۲ &= a_۱ + d \\
a_۳ &= a_۲ + d = a_۱ + ۲d \\
a_۴ &= a_۳ + d = a_۱ + ۳d \\
a_۵ &= a_۴ + d = a_۱ + ۴d \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_n &= a_{n-۱} + d = a_۱ + (n - ۱)d
\end{aligned}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی به صورت $a_n = a_۱ + (n - ۱)d$ می‌باشد.

مثال ۱۷ جمله‌ی عمومی تصاعد عددی را بنویسید که جمله‌ی اول آن ۵− و قدرنسبت آن ۳ باشد.

حل:
$$a_n = -۵ + (n-۱)(۳) \Rightarrow a_n = ۳n - ۸$$

مثال ۱۸ تصاعد عددی روبه‌رو را در نظر بگیرید: $-۲, ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, \ldots$

جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

حل: جمله‌ی اول این تصاعد ۲− بوده و قدرنسبت آن به شکل زیر یافت می‌شود:

$$d = ۳ - (-۲) = ۵$$

بنابراین جمله‌ی عمومی این تصاعد به صورت زیر است:

$$a_n = -۲ + (n-۱)(۵) \Rightarrow a_n = ۵n - ۷$$

مثال ۱۹ جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی به صورت $a_n = ۳n - ۲$ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:
$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۳ \times ۱ - ۲ = ۱ \\ a_۲ = ۳ \times ۲ - ۲ = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = ۴ - ۱ = ۳$$

مثال ۲۰ در یک تصاعد حسابی قدرنسبت $(-\frac{۱}{۲})$ و جمله‌ی پانزدهم ۱۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و جمله‌ی عمومی این تصاعد را بنویسید.

حل:
$$a_{۱۵} = a_۱ + (۱۵-۱)(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۱۰ = a_۱ + (-۷) \Rightarrow a_۱ = ۱۷$$

$$\text{جمله‌ی عمومی} = a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۱۷ + (n-۱)(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow a_n = -\frac{۱}{۲}n + \frac{۳۵}{۲}$$

مثال ۲۱ در یک تصاعد عددی جمله‌ی اول و دوازدهم به ترتیب ۷− و ۱۵ می‌باشد، قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟

حل:
$$a_۱ = -۷ \ , \ a_{۱۲} = ۱۵$$
$$a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d \Rightarrow d = \frac{a_{۱۲} - a_۱}{۱۱} = \frac{۱۵ - (-۷)}{۱۱} = ۲$$

مثال ۲۲ در یک تصاعد عددی قدرنسبت ۱۱ و جمله‌ی اول ۱− است. چندمین جمله‌ی این تصاعد برابر ۲۱۹ است؟

حل:
$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$
$$۲۱۹ = -۱ + (n-۱)(۱۱) \Rightarrow (n-۱) = \frac{۲۲۰}{۱۱} = ۲۰ \Rightarrow n = ۲۱$$

مثال ۲۳ در یک تصاعد عددی جمله‌ی بیستم و جمله‌ی سی‌وپنجم به ترتیب ۷− و ۲۳ می‌باشند، قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} a_{۲۰} = a_۱ + ۱۹d \\ a_{۳۵} = a_۱ + ۳۴d \end{cases}$$

$$a_{۳۵} - a_{۲۰} = (۳۴ - ۱۹)d \Rightarrow d = \frac{۲۳ - (-۷)}{۳۴ - ۱۹} = \frac{۳۰}{۱۵} = ۲$$

نکته ۳. اگر جمله‌ی mاُم و جمله‌ی nاُم یک تصاعد حسابی به ترتیب a_m و a_n باشند، قدرنسبت این تصاعد برابر است با: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

یعنی: قدرنسبت تصاعد حسابی برابر است با نسبت تفاضل دو جمله‌ی دلخواه آن بر تفاضل مرتبه‌های این دو جمله.

مثال ۲۴ در یک تصاعد عددی جمله‌ی هفدهم و جمله‌ی بیست‌وچهارم به ترتیب ۱۰ و ۱۳− می‌باشند. قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟

حل:

$$d = \frac{a_{۲۴} - a_{۱۷}}{۲۴ - ۱۷} = \frac{-۱۳ - ۱۰}{۷} = -\frac{۲۳}{۷}$$

نکته ٤. اگر a_m، a_n، a_p و a_q چهار جمله‌ی متفاوت از یک تصاعد حسابی باشند به طوری که $m + n = p + q$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

اثبات:

$$\begin{aligned} a_m + a_n &= a_۱ + (m - ۱)d + a_۱ + (n - ۱)d \\ &= ۲a_۱ + (m + n)d - d - d \\ &= ۲a_۱ + (p + q)d - d - d \\ &= a_۱ + (p - ۱)d + a_۱ + (q - ۱)d = a_p + a_q \end{aligned}$$

مثال ۲۵ جمله‌ی بیستم و جمله‌ی سی‌وهشتم یک تصاعد حسابی به ترتیب ۱۵− و ۲۳ می‌باشند. جمله‌ی ۲۹اُم این تصاعد چقدر است؟

حل:

$$۲۹ + ۲۹ = ۲۰ + ۳۸ \Rightarrow a_{۲۹} + a_{۲۹} = a_{۲۰} + a_{۳۸}$$

$$\Rightarrow a_{۲۹} = \frac{۲۳ - ۱۵}{۲} = ۴$$

واسطه‌های حسابی

اگر a و b دو عدد حقیقی مفروض باشند، همواره می‌توان تعداد m عدد به صورت c_1، c_2، c_3، ... ، c_m یافت به طوری که دنباله‌ی $a, c_1, c_2, \cdots, c_m, b$ یک تصاعد حسابی باشد. در این صورت c_iها را **واسطه‌های حسابی** یا **واسطه‌های عددی** دو عدد a و b می‌نامند.

مثلاً دو عدد ۴− و ۸ را در نظر بگیرید. عدد ۲ می‌تواند یک واسطه عددی بین آن‌ها باشد، همچنین اعدد ۰ و ۴ می‌توانند دو واسطه‌ی عددی بین ۴− و ۸ باشند و اعداد ۱− ، ۲ و ۵ می‌توانند سه واسطه‌ی عددی بین ۴− و ۸ باشند.

درج واسطه‌های حسابی

برای این‌که m واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b درج کنیم، کافی است که قدرنسبت تصاعد حسابی را که با این $m+2$ عدد به‌دست می‌آید، محاسبه کنیم. اگر جمله‌ی اول را a_1 و قدرنسبت را d در نظر بگیریم، طبق نکته‌ی ۳ خواهیم داشت:

$$d = \frac{a_{m+2} - a_1}{m+2-1} \Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1}$$

مثال ۲۶ بین ۷− و ۱۵ ده واسطه‌ی حسابی درج کنید.

حل:

$$d = \frac{15-(-7)}{10+1} = 2 \Rightarrow -7, \underbrace{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}_{\text{ده واسطه‌ی حسابی}}, 15$$

مجموع جملات یک تصاعد عددی

تصاعد عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

می‌توانیم مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

داریم:

$$\text{I)}\ S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + (a_1+(n-1)d)$$

همچنین اگر جملات تصاعد را از آخر به اول بنویسیم:

$$\text{II)}\ S_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \cdots + (a_n-(n-1)d)$$

از جمع طرفین دو عبارت I و II داریم:

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n)}_{n\ \text{بار}}$$

یعنی:
$$۲S_n = n(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_۱ + a_n)}{۲}$$

حال اگر در رابطه‌ی فوق، $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ قرار دهیم، داریم:

$$S_n = \frac{n(a_۱ + a_۱ + (n-۱)d)}{۲} = \frac{n[۲a_۱ + (n-۱)d]}{۲}$$

مثال ۲۷ مجموع اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۱۰ را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم دنباله‌ی ۱۰۹ , $۱,۲,۳,\cdots$ یک تصاعد عددی با قدرنسبت ۱ است، بنابراین:

$$S_{۱۰۹} = \frac{۱۰۹(۱+۱۰۹)}{۲} = ۵۹۹۵$$

مثال ۲۸ قدرنسبت یک تصاعد حسابی ۳ و جمله‌ی nاُم آن ۲۳ و مجموع n جمله‌ی اول آن ۹۸ است. آن تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{array}{l} a_n = ۲۳ \Rightarrow \\ S_n = ۹۸ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} ۲۳ = a_۱ + ۳(n-۱) \\ ۹۸ = \frac{n}{۲}(a_۱ + ۲۳) \end{cases} \Rightarrow n = ۷ \,,\ a_۱ = ۵$$

یعنی تصاعد به صورت ۲۳ , ۲۰ , ۱۷ , ۱۴ , ۱۱ , ۸ , ۵ می‌باشد.

دنباله‌ی هندسی (تصاعد هندسی)

اگر در یک دنباله هر جمله (از جمله‌ی دوم به بعد) مساوی حاصل‌ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت باشد، آن دنباله یک تصاعد هندسی و آن عدد ثابت قدرنسبت تصاعد نامیده شده و با حرف q نشان داده می‌شود. بنابراین:

$$a_{n+۱} = a_n . q \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+۱}}{a_n} = q$$

مثال ۲۹ در تصاعد هندسی $-۱۲, ۶, -۳, \cdots$، قدرنسبت را به‌دست آورید.

حل:
$$q = \frac{۶}{-۱۲} = -\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۰ تصاعد هندسی را مشخص کنید که جمله‌ی اول آن $\frac{۱}{۲}$ و قدرنسبت آن (-۲) باشد.

حل:
$$\frac{۱}{۲}, -۱, ۲, -۴, ۸, \cdots$$

مثال ۳۱ قدرنسبت تصاعدهای زیر را تعیین کنید.

الف. $\sqrt{۲}, \sqrt{۶}, ۳\sqrt{۲}, \cdots$

ب. $\frac{۵}{۲}, -۵, ۱۰, -۲۰, \cdots$

حل. الف) $q=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}$ ب) $q=-\frac{۵}{\frac{۵}{۲}}=-۲$

✓ **نکته ۵.** اگر سه عدد a، b و c تشکیل یک تصاعد هندسی دهند، داریم:

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow b^{۲}=a.c \Rightarrow b=\pm\sqrt{ac}$$

«عدد b را واسطه هندسی دو عدد a و c می‌نامند.»

مثال ۳۲ m را طوری تعیین کنید که سه عدد $m+۱$ و $\sqrt{\frac{۳m}{۲}}$ و $m-۱$ جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند.

$$\frac{۳m}{۲}=(m-۱)(m+۱) \Rightarrow ۳m=۲(m^{۲}-۱) \Rightarrow ۲m^{۲}-۳m-۲=۰$$

$$\Rightarrow m=۲\ ,\ m=-\frac{۱}{۲}$$

جواب $m=-\frac{۱}{۲}$ غیرقابل قبول است. چون $\sqrt{\frac{۳m}{۲}}$ به ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ تعریف نشده است.

جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی

اگر $a_۱$ جمله‌ی اول تصاعد هندسی و q قدرنسبت آن باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
a_۲&=a_۱q\\
a_۳&=a_۲q=a_۱q^{۲}\\
a_۴&=a_۳q=a_۱q^{۳}\\
a_۵&=a_۴q=a_۱q^{۴}\\
&\vdots\\
a_n&=a_{n-۱}q=a_۱q^{n-۱}
\end{aligned}$$

یعنی جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی به صورت $a_n=a_۱.q^{n-۱}$ می‌باشد.

مثال ۳۳ جمله‌ی عمومی تصاعد هندسی را بنویسید که جمله‌ی اول آن ۲− و قدرنسبت آن $\frac{۳}{۲}$ باشد.

حل. $a_n=(-۲)(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$

مثال ۳۴ تصاعد هندسی $\dots,-\frac{۲۷}{۲},-۹,-۶,-۴$ را در نظر بگیرید، جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

حل. جمله‌ی اول این تصاعد ۴− و قدرنسبت آن $q=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$ می‌باشد بنابراین جمله‌ی عمومی این تصاعد به صورت زیر می‌باشد:

$$a_n=(-۴)(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$$

مثال ۳۵ جمله‌ی عمومی یک تصاعد هندسی به صورت $a_n = (-۳)(\frac{۱}{۲})^n$ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = \frac{-۳}{۲} \\ a_۲ = \frac{-۳}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۶ در یک تصاعد هندسی قدرنسبت ۲− و جمله‌ی پنجم ۹۶− می‌باشد. جمله‌ی اول و جمله‌ی عمومی این تصاعد را بنویسید.

حل:

$$a_۵ = a_۱ \times q^۴ \Rightarrow a_۱ = \frac{a_۵}{q^۴} = \frac{-۹۶}{۱۶} = -۶$$

جمله‌ی عمومی $a_n = a_۱.q^{n-۱} \rightarrow a_n = (-۶)(-۲)^{n-۱}$

مثال ۳۷ در یک تصاعد هندسی جمله‌ی اول و جمله‌ی ششم به ترتیب $-\frac{۱}{۲}$ و ۱۶ می‌باشد. قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟

حل:

$$a_۱ = -\frac{۱}{۲} \ , \ a_۶ = ۱۶$$

$$a_۶ = a_۱q^۵ \Rightarrow q = \sqrt[۵]{\frac{a_۶}{a_۱}} = \sqrt[۵]{\frac{۱۶}{-\frac{۱}{۲}}} = \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$$

مثال ۳۸ در یک تصاعد هندسی قدرنسبت $-\frac{۳}{۲}$ و جمله‌ی اول ۱− است. جمله‌ی چندم این تصاعد برابر $-\frac{۷۲۹}{۶۴}$ است؟

حل:

$$a_n = a_۱q^{n-۱}$$

$$-\frac{۷۲۹}{۶۴} = (-۱)(-\frac{۳}{۲})^{n-۱} \Rightarrow (-\frac{۳}{۲})^{n-۱} = \frac{۷۲۹}{۶۴} = (-\frac{۳}{۲})^۶$$

$$\Rightarrow n-۱ = ۶ \Rightarrow n = ۷$$

مثال ۳۹ در یک تصاعد هندسی جمله‌ی بیستم و جمله‌ی بیست‌وچهارم به ترتیب $\frac{۱}{۹}$ و ۹ می‌باشد. قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_{۲۴} = a_۱.q^{۲۳} \\ a_{۲۰} = a_۱.q^{۱۹} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_{۲۴}}{a_{۲۰}} = q^۴ \Rightarrow q = \pm\sqrt[۴]{\frac{a_{۲۴}}{a_{۲۰}}} = \pm\sqrt[۴]{۸۱} = \pm۳$$

نکته ۶. اگر جمله‌ی mاُم و جمله‌ی nاُم یک تصاعد هندسی به ترتیب a_m و a_n باشند، قدرنسبت این تصاعد برابر است با:

$$q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}} \qquad m > n$$

بدیهی است اگر $m - n$ زوج باشد، خواهیم داشت:

$$q = \pm \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$$

مثال ۴۰ در یک تصاعد هندسی جمله‌ی هفدهم و جمله‌ی بیست‌ویکم به ترتیب ۱ و $\frac{۱}{۱۶}$ می‌باشند. قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟

حل:
$$q = \pm \sqrt[۲۱-۱۷]{\frac{a_{۲۱}}{a_{۱۷}}} = \pm \sqrt[۴]{\frac{\frac{۱}{۱۶}}{۱}} = \pm \frac{۱}{۲}$$

نکته ۷. اگر a_m، a_n، a_k و a_l چهار جمله‌ی متفاوت از یک تصاعد هندسی باشند، به طوری که $m + n = k + l$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_m . a_n = a_k . a_l$$

اثبات:

$$\begin{aligned} a_m . a_n &= a_۱ q^{m-۱} . a_۱ q^{n-۱} = a_۱^۲ q^{m+n} . q^{-۲} \\ &= a_۱^۲ q^{k+l} . q^{-۲} = a_۱ q^{k-۱} . a_۱ q^{l-۱} = a_k . a_l \end{aligned}$$

مثال ۴۱ جمله‌ی پنجم و نهم یک تصاعد هندسی به ترتیب ۳– و ۱۲– می‌باشند، جمله‌ی هفتم این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:
$$۷ + ۷ = ۵ + ۹ \Rightarrow a_۷ . a_۷ = a_۵ . a_۹ \Rightarrow a_۷ = \pm\sqrt{(-۳)(-۱۲)} = \pm ۶$$

واسطه‌های هندسی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و یا دو عدد حقیقی منفی مفروض باشند همواره می‌توان تعداد m عدد به صورت $c_۱$، $c_۲$، … ، c_m یافت، به طوری که دنباله‌ی b و a و $c_۱, c_۲, \cdots, c_m$ یک تصاعد هندسی باشد. در این صورت c_i ها را واسطه‌های هندسی دو عدد a و b می‌نامند.

مثلاً دو عدد ۲ و ۳۲ را در نظر بگیرید. می‌توان سه واسطه‌ی هندسی به صورت زیر بین این دو عدد در نظر گرفت:

$$۲, \underbrace{۴, ۸, ۱۶}, ۳۲$$

البته اگر یکی از دو عدد a یا b منفی و دیگری مثبت باشد آن‌گاه بین آن دو عدد فقط زوج تا واسطه‌ی هندسی می‌توان درج کرد.

درج واسطه‌های هندسی

برای این‌که m واسطه هندسی بین دو عدد a و b درج کنیم کافی است که قدرنسبت تصاعد هندسی را که با این $m+۲$ عدد به‌دست می‌آید، محاسبه کنیم. اگر جمله‌ی اول را a و قدرنسبت را q در نظر بگیریم طبق نکته‌ی ۶ خواهیم داشت:

$$q = \sqrt[m+۲-۱]{\frac{a_{m+۲}}{a_۱}} = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$$

بدیهی است اگر $m+۱$ زوج باشد، خواهیم داشت:

$$q = \pm \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$$

مثال ۴۲ بین دو عدد ۵− و ۱۶۰، چهار واسطه‌ی هندسی درج کنید.

حل:

$$q = \sqrt[۵]{\frac{۱۶۰}{-۵}} = \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$$

$$\text{یعنی} : -۵, \underbrace{۱۰, -۲۰, ۴۰, -۸۰}, ۱۶۰$$

مجموع جملات یک تصاعد هندسی

تصاعد هندسی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n, \cdots$$

می‌توانیم مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

$$\text{یعنی} : S_n = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \cdots + a_۱q^{n-۱}$$

$$S_n = a_۱(۱ + q + q^۲ + \cdots + q^{n-۱})$$

عبارت فوق را در $(۱-q)$ ضرب کرده و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q)(۱+q+q^۲+\cdots+q^{n-۱})}{(۱-q)}$$

بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{(۱-q)}$$

توضیح: حال اگر در رابطه‌ی فوق، $a_n = a_۱q^{n-۱}$ را قرار دهیم داریم:

$$S_n = \frac{a_۱ - a_nq}{۱-q}$$

مثال ۴۳ در یک تصاعد هندسی مجموع شش جمله‌ی نخست ۹ برابر مجموع سه جمله‌ی نخست است. قدرنسبت این تصاعد را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{9a_1(1-q^3)}{1-q}\Rightarrow 1-q^6=9(1-q^3)$$

$$(1-q^3)(1+q^3)=9(1-q^3)\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

مثال ۴۴ در یک تصاعد هندسی جمله‌ی اول ۴ و قدرنسبت ۳− است. مجموع ۸ جمله‌ی نخست را به‌دست آورید.

حل:

$$S_8=\frac{4(1-(-3)^8)}{1-(-3)}=1-6561=-6560$$

✓ **نکته ۸.** اگر $|q|<1$ باشد و تعداد جملات یک تصاعد بسیار زیاد شود، یعنی n یک عدد خیلی بزرگ باشد، داریم:

$$|q|<1\Rightarrow |q|^n\approx 0$$

$$S_n=\frac{a(1-0)}{1-q}\Rightarrow S=\frac{a}{1-q}$$

که در این حالت به S حد مجموع گفته می‌شود.

مثال ۴۵ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

حل: همان طور که ملاحظه می‌کنید A مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$A=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

نزدیک شدن یک دنباله به یک عدد

دنباله‌ی $a_n=\frac{n+20}{n+19}$ را در نظر بگیرید که جملات آن به شکل زیر است:

$$\frac{21}{20},\frac{22}{21},\frac{23}{22},\frac{24}{23},\cdots$$

اگر عدد ۱ را از جملات آن دنباله کم کنیم به دنباله‌ی $\{b_n\}$ به شکل زیر خواهیم رسید:

$$\{b_n\}:\ \frac{1}{20},\frac{1}{21},\frac{1}{22},\frac{1}{23},\cdots$$

معلوم است که هر چه n بزرگ‌تر می‌شود جملات b_n به صفر نزدیک‌تر می‌شوند و در نتیجه جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز به عدد ۱ نزدیک خواهند شد.

نکته ۹. اگر عدد m را از هر یک از جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک و نزدیک‌تر شوند آن‌گاه گوییم جملات آن دنباله به m نزدیک می‌شوند (به سمت m میل می‌کنند).

مثال ۴۶ دنباله‌ی $\{a_n\} = \frac{n+۷}{۲n+۱}$ را در نظر بگیرید.

الف) نخستین جمله‌ی دنباله که کوچک‌تر از $\frac{۳}{۵}$ باشد جمله‌ی چندم دنباله است؟

ب) نخستین جمله‌ی دنباله که کوچک‌تر از $\frac{۵}{۹}$ باشد جمله‌ی چندم دنباله است؟

ج) نخستین جمله‌ی دنباله که کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد جمله‌ی چندم دنباله است؟

د) جملات صدم به بعد آن دنباله را نوشته و از هر یک از آن‌ها عدد $\frac{۱}{۲}$ را کم کرده و نتیجه‌گیری لازم را انجام دهید.

حل. الف)

$$\frac{n+۷}{۲n+۱} < \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۶n+۳ > ۵n+۳۵$$

$$\Rightarrow n > ۳۲ \Rightarrow n_{\min} = ۳۳$$

یعنی از جمله‌ی ۳۳اُم به بعد همگی از $\frac{۳}{۵}$ کوچک‌ترند.

ب)

$$\frac{n+۷}{۲n+۱} < \frac{۵}{۹} \Rightarrow ۱۰n+۵ > ۹n+۶۳$$

$$\Rightarrow n > ۵۸ \Rightarrow n_{\min} = ۵۹$$

یعنی از جمله‌ی ۵۹اُم به بعد همگی از $\frac{۵}{۹}$ کوچک‌ترند.

ج)

$$\frac{n+۷}{۲n+۱} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲n+۱ > ۲n+۱۴ \Rightarrow ۱ > ۱۴$$

عبارت به‌دست آمده یک عبارت غیرممکنی است، به این معنا که هیچ یک از جملات دنباله از $\frac{۱}{۲}$ کوچک‌تر نیستند.

د)

$$\{a_n\} : \cdots , \underbrace{\frac{۱۰۷}{۲۰۱}, \frac{۱۰۸}{۲۰۳}, \frac{۱۰۹}{۲۰۵}, \frac{۱۱۰}{۲۰۷}, \cdots}_{\text{جملات صدم به بعد}}$$

$$\{b_n\} : \cdots , \frac{۱۳}{۴۰۲}, \frac{۱۳}{۴۰۶}, \frac{۱۳}{۴۱۰}, \frac{۱۳}{۴۱۴}, \cdots$$

معلوم است که جملات b_n رفته‌رفته به صفر نزدیک می‌شوند بنابراین با افزایش n جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد $\frac{۱}{۲}$ نزدیک می‌شوند.

مثال ۴۷ نخستین جمله‌ی دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۳n+۱}{n^۲+۶}$ که کوچک‌تر از $\frac{۱}{۶}$ باشد را بیابید.

حل:

$$\frac{3n+1}{n^2+6} < \frac{1}{6} \Rightarrow n^2+6 > 18n+6 \Rightarrow n^2 - 18n > 0$$

$$\Rightarrow n(n-18) > 0 \Rightarrow n > 18 \Rightarrow n_{\min} = 19$$

از جمله‌ی نوزدهم به بعد همگی کم‌تر از $\frac{1}{6}$ می‌باشند.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

اگر عدد ۳ را به عدد ۷ تقسیم کرده و مقدار آن را به ترتیب یک رقم بعد از اعشار، دو رقم بعد از اعشار، سه رقم بعد از اعشار، ... بنویسیم، به دنباله‌ی زیر خواهیم رسید:

$$\{a_n\} : 0/4, 0/42, 0/428, 0/4285, 0/42857, 0/428571, \cdots$$

دنباله‌ی به‌دست آمده را دنباله‌ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{3}{7}$ گویند.

مثال ۴۸ اگر دنباله‌ی u_n دنباله‌ی تقریبات اعشاری تقسیم عدد ۵ به ۹ باشد، آن‌گاه حاصل $u_5 - u_3$ را بیابید.

حل: اعضاء دنباله‌ی u_n به شکل زیر می‌باشد:

$$u_n : 0/5, 0/55, 0/555, 0/5555, 0/55555, \cdots$$

$$\Rightarrow u_5 - u_3 = 0/55555 - 0/555 = 0/00055$$

مثال ۴۹ اگر دنباله‌ی t_n دنباله‌ی تقریبات اعشاری تقسیم عدد ۸ به ۱۳ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام عدد $10^{2010}(u_{2010} - u_{1389})$ را بیابید.

حل: ارقام بعد از ممیز عدد اعشاری $\frac{8}{13}$ با دوره‌ی تناوی ۶ تکرار می‌شود:

$$\frac{8}{13} = 0/615384\,615384\,615384\cdots$$

$$\Rightarrow u_{2010} = 0/\underbrace{615384\,615384\,615384\cdots615384}_{\text{۲۰۱۰ رقم}}$$

$$u_{1389} = 0/\underbrace{615384\,615384\,615384\cdots615}_{\text{۱۳۸۹ رقم}}$$

$$\Rightarrow u_{2010} - u_{1389} = 0/\underbrace{000\cdots00}_{\text{۱۳۸۹تا}}\underbrace{384\,615384\cdots615384}_{\text{۶۲۱ رقم}}$$

$$\Rightarrow (u_{2010} - u_{1389}) \times 10^{2010} = \underbrace{384\,615384\,615384\cdots615384}_{\text{۶۲۱ رقم}}$$

عدد به‌دست آمده شامل ۱۰۳ بسته به شکل ۶۱۵۳۸۴ و یک بسته به شکل ۳۸۴ می‌باشد، بنابراین مجموع ارقام عدد به‌دست آمده برابر $(4+8+3+5+1+6) \times 103 + (4+8+3) \times 1$ یعنی ۲۷۹۶ می‌باشد.

توان‌رسانی و ریشه‌گیری اعداد حقیقی

مخاطبین این کتاب که عمدتاً دانش‌آموزان ممتاز می‌باشند با این عناوین به خوبی آشنا هستند فقط لازم است یادآوری شود که طبق تعریف در توان‌رسانی اعداد به توانی حقیقی و غیرصحیح پایه همواره عددی مثبت فرض می‌شود. شما مخاطبین گرامی اگر بتوانید اشتباه موجود در پارادوکس زیر را بیابید آن‌گاه تمام نکات ریز و درشت موجود در این قسمت را یاد گرفته‌اید:

$$۲ = \sqrt[۳]{۸} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = ۸^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۶]{۸^۲} = \sqrt[۶]{(-۸)^۲}$$
$$= (-۸)^{\frac{۲}{۶}} = (-۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

مسائل نمونه

فصل اول

۱ دنباله‌ی $a_n = 2n^2 + n$ مفروض است. چه تعداد از اعضاء آن دنباله دو رقمی هستند؟

۲ دنباله‌ی $a_n = \dfrac{3n^2 + 2n + 1}{n + 2}$ مفروض است. چه تعداد از اعضاء آن عددی صحیح است؟

۳ دنباله‌ی $u_n = 4n^2 + 2n + 1$ مفروض است. کدام‌یک از اعداد زیر عضوی از آن دنباله هستند؟

I) ۱۴۸ II) ۱۵۷ III) ۱۹۱

۴ دنباله‌ی $\{a_n\}$ چنان است که $a_n = 5 + 3a_{n-1}$ و $a_1 = 1$. پنج‌جمله‌ای اول آن دنباله را بنویسید.

۵ دنباله‌ی $\left\{\dfrac{4n+1}{3n+2}\right\}$ مفروض است. پنج‌جمله‌ی اول آن را یافته و نمودار آن پنج جمله را در محورهای مختصات دوبعدی رسم کنید.

۶ تعداد قطرهای یک nضلعی محدب را بیابید.

۷ جمله‌ی ۱۳۸۰اُم در دنباله‌ی زیر برابر چند است؟

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \cdots$$

الف) ۵۰ ب) ۵۱ ج) ۵۲ د) ۵۳ هـ) ۵۴

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۸۰»

۸ قورباغه‌ای در نقطه‌ی صفر محور نشسته است. این قورباغه در مرحله‌ی nاُم، یک پرش بلند به طول n سانتی‌متر و سپس $n - 1$ پرش به طول ۱ سانتی‌متر انجام می‌دهد ($1, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, \cdots$). این قورباغه به کدام‌یک از اعداد زیر نخواهد رسید؟

الف) ۲۰۰۶ ب) ۱۳۸۴ ج) ۱۴۲۶ د) ۱۰۲۳ هـ) ۱۹۸۱

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۸۴»

۹ عددهای طبیعی a_1، a_2، a_3، … به این صورت تعریف شده‌اند که $a_1 = 1$، $a_{n+1} = 2a_n + 5$. کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند در بین a_iها ظاهر شود؟

الف) ۵۶۲۳۰۱ ب) ۷۸۶۴۲۷ ج) ۱۶۴۸۵ د) ۳۱۲۳ هـ) ۵۱۵۱۹

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۸»

۱۰ دنباله‌های زیر داده شده‌اند.

$$a_n = \sqrt{123 + n^2} \text{ و } b_n = n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

فرض کنید که r کوچک‌ترین عدد صحیح باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد که $a_s > b_s + 1$. در این صورت $r + s$ برابر است با:

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ هـ) ۳۸

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۵»

۱۱ دنباله‌ای از اعداد حقیقی بدین شکل تعریف می‌شوند. $x_0 = 3$ و $x_1 = 8$ و برای هر $n \geq 1$، $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1}$. به طور مثال $x_2 = 12, x_3 = 4,000$. در بین ۲۰۰۱ جمله‌ی ابتدای این دنباله از x_0 تا x_{2000} چند مضرب ۳ داریم؟

الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ هـ) ۱۵۰۱

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۹»

۱۲ یک کره به وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

الف) 2^8 ب) 2^9 ج) ۷۶ د) ۸۱ هـ) ۷۴

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۴»

۱۳ دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = na_n + a_n + n \end{cases}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم a_{101} بر ۱۰۲ چند است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ هـ) ۱۰۱

«المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۷»

۱۴ اعداد طبیعی را مطابق الگوی داده شده در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان ۱۳۷۷ کدام است؟

۱	۲	۶	۷	۱۵	۱۶	۲۸	۲۹	۴۵
۳	۵	۸	۱۴	۱۷	۲۷	۳۰	۴۴	
۴	۹	۱۳	۱۸	۲۶	۳۱	۴۳		
۱۰	۱۲	۱۹	۲۵	۳۲	۴۲			
۱۱	۲۰	۲۴	۳۳	۴۱				
۲۱	۲۳	۳۴	۴۰					
۲۲	۳۵	۳۹						
۳۶	۳۸							
۳۷								

شکل ۱-۵

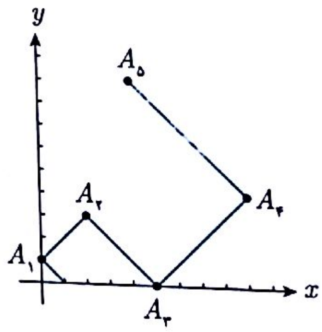
الف) سطر ۲، ستون ۵۲ ب) سطر ۵۲، ستون ۲

ج) سطر ۲، ستون ۵۱ د) سطر ۵۱، ستون ۲

ه) هیچ‌کدام

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۷•

۱۵ یک نفر روی نقطه‌ی $(۱,۰)$ علامت می‌گذارد. در حرکت بعدی به ترتیب روی $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ و $A_۵$ علامت می‌گذارد. اگر روند ادامه یابد، مختصات $A_{۱۰}$ چه خواهد بود؟ (همان طور که دیده می‌شود، طول پاره‌خط $A_kA_{k-۱}$ برابر $k\sqrt{۲}$ است.)



شکل ۱-۶

۱۶ دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ دارای این ویژگی است که برای هر دو عدد طبیعی m و n تساوی $a_{mn} = a_m + a_n$ برقرار است. اگر $a_۶ = ۷$، $a_{۱۵} = ۹$ و $a_{۱۰۰۰} = ۳۶$ آنگاه مقدار $a_{۳۰}$ را بیابید.

۱۷ اگر در یک تصاعد حسابی رابطه‌ی $S_n = ۳n^۲ + ۲n$ برقرار باشد، آنگاه رابطه‌ی مربوط به جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

۱۸ مجموع جمله‌های سوم، بیست‌ودوم، سی‌وسوم و چهل‌وچهارم یک تصاعد حسابی ۳۱۰ می‌باشد. مجموع پنجاه جمله‌ی اول آن را بیابید.

۱۹ ثابت کنید در هر تصاعد حسابی رابطه‌ی $S_n = an^۲ + bn$ برقرار است که در آن a برابر نصف قدرنسبت و b برابر جمله‌ی اول منهای نصف قدرنسبت می‌باشد.

۲۰ در یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ بین جملات $-\frac{۳}{۲}$ و ۱۲ چند جمله وجود دارد؟

۲۱ بین اعداد ۲ و $(m^۲ + ۲m + ۳)$ به تعداد m واسطه‌ی حسابی درج شده است. اگر واسطه دهم برابر ۱۱۲ باشد، آنگاه تعداد واسطه‌ها، قدرنسبت و واسطه‌ی پنجم را بیابید.

۲۲ هرگاه جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $u_n = n^۲ - ۳n + ۷$ باشد، آنگاه مجموع بیست جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

۲۳ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

الف)

$$A = ۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + ۵^۲ - ۶^۲ + \cdots + ۹۹^۲ - ۱۰۰^۲$$

ب)

$$B = (a + \frac{۱}{a})^۲ + (a^۲ + \frac{۱}{a^۲})^۲ + \cdots + (a^n + \frac{۱}{a^n})^۲$$

۲۴ سه عدد x، y و z تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند، به طوری که مجموع آن‌ها ۵۲ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۴۵۶ می‌باشد. این سه عدد را بیابید.

۲۵ در یک تصاعد هندسی جمله‌ی دوم برابر ۶ و حد مجموع جملات آن برابر $\frac{۱}{۸}$ حد مجموع مربعات آن تصاعد می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت تصاعد را بیابید.

۲۶ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)

$$A = ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \cdots + \underbrace{۹۹۹\cdots۹۹۹}_{n \text{ تا } ۹}$$

ب)

$$B = ۴ + ۴۴ + ۴۴۴ + \cdots + \underbrace{۴۴۴\cdots۴۴۴۴}_{n \text{ تا } ۴}$$

۲۷ مجموع مربعات n جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q را بیابید.

۲۸ در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله‌ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله‌ی اول ۱۲۶ می‌باشد. قدرنسبت تصاعد را بیابید.

۲۹ ثابت کنید که اگر اندازه‌ی زاویه‌های یک ۵ضلعی محدب تشکیل تصاعد حسابی بدهند، آنگاه یکی از زاویه‌ها برابر ۱۰۸° می‌باشد.

۳۰ اگر اعداد a، b و c جملات متوالی یک تصاعد حسابی باشند، آنگاه ثابت کنید اعداد $a^۲ + ac + c^۲$، $b^۲ + bc + c^۲$ و $a^۲ + ab + b^۲$ نیز تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

۳۱ اگر در یک تصاعد حسابی رابطه‌ی $m^{۲} .S_n = n^{۲}.S_m$ برقرار باشد، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{t_m}{t_n} = \frac{۲m - ۱}{۲n - ۱}$$

۳۲ اگر $a_{۱}, a_{۲}, \cdots, a_n$ جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_{۱}} + \sqrt{a_{۲}}} + \frac{۱}{\sqrt{a_{۲}} + \sqrt{a_{۳}}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{a_{n-۱}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n - ۱}{\sqrt{a_{۱}} + \sqrt{a_n}}$$

۳۳ از ۱۲۰ کره‌ی مشابه یک هرم مثلث‌القاعده منتظم ساخته‌ایم. در قاعده‌ی هرم چند کره قرار می‌گیرد؟

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۴•

۳۴ کوچک‌ترین عدد طبیعی که بتوان آن را هم به صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی، کدام است؟

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ ه) ۴۹۵

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۴•

۳۵ چند تا عدد صحیح x با شرط $۱۵ > x > ۹$ وجود دارد به طوری که دنباله‌ی متناهی:

$$۱, ۲, ۶, ۷, ۹, x, ۱۵, ۱۸, ۲۰$$

مشتمل بر هیچ سه‌جمله‌ای نباشد که تشکیل یک تصاعد عددی با قدرنسبت صحیح بدهند؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۸•

۳۶ دنباله‌ی $a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, \cdots$ «برگشتی خطی» نامیده می‌شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q موجود باشند که $a_{n+۲} = pa_{n+۱} + qa_n$. دو جمله‌ی بعدی در دنباله‌ی $۲, ۵, ۱۴, ۴۱, \cdots$ کدام‌یک از دو عدد زیر است با این شرط که این دنباله «برگشتی خطی» باشد؟

الف) ۲۸ و ۸۲
ب) ۲۸ و ۱۲۳
ج) ۱۳۶ و ۳۲۸
د) ۱۲۲ و ۳۶۵
ه) ۲۴۴ و ۴۸۷

•المپیاد ریاضی ایران در سال ۱۳۷۸•

پاسخ مسائل نمونه فصل اول

۱ معلوم است که جملات $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ به ترتیب برابر ۱۰، ۲۱، ۳۶، ۵۵ و ۷۸ همگی دورقمی‌اند و $a_۷$ با مقدار ۱۰۵ اولین عدد بزرگ‌تر از دورقمی است و از $a_۷$ به بعد همگی از ۹۹ بزرگ‌ترند.

۲

$$a_n = \frac{۳n^۲ + ۲n + ۱}{n + ۲} = \frac{۳n^۲ + ۶n - ۴n + ۱}{n + ۲} = ۳n - \frac{۴n - ۱}{n + ۲}$$
$$= ۳n - \frac{۴n + ۸ - ۹}{n + ۲} = ۳n - ۴ + \frac{۹}{n + ۲}$$

شرط لازم و کافی برای آن‌که a_n با مقدار $\left(۳n - ۴ + \frac{۹}{n + ۲}\right)$ عددی صحیح باشد آن است که $\frac{۹}{n + ۲}$ عددی صحیح باشد و آن عبارت به ازای $n = ۱$ و $n = ۷$ صحیح می‌شود. یادآوری می‌شود که عدد ۹ در مجموعه اعداد طبیعی فقط سه مقسوم‌علیه ۱، ۳ و ۹ را دارد که $n + ۲$ نمی‌تواند ۱ باشد و فقط به ازای ۳ و ۹ برای $n + ۲$ مقادیر طبیعی برای n یافت می‌شود.

۳ معلوم است که u_n همیشه عددی است فرد، بنابراین u_n نمی‌تواند ۱۴۸ باشد. اگر u_n را برابر ۱۵۷ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$۴n^۲ + ۲n + ۱ = ۱۵۷ \Rightarrow ۴n^۲ + ۲n - ۱۵۶ = ۰ \Rightarrow n = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۲۴۹۶}}{۸}$$
$$\Rightarrow n = \frac{-۲ \pm ۵۰}{۸} \Rightarrow n = ۶$$

بنابراین ششمین عضو دنباله‌ی داده شده برابر ۱۵۷ است. اگر u_n را برابر ۱۹۱ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$۴n^۲ + ۲n + ۱ = ۱۹۱ \Rightarrow ۴n^۲ + ۲n - ۱۹۰ = ۰$$
$$\Rightarrow n = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۳۰۴۰}}{۸}$$

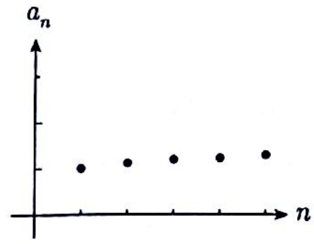
چون ۳۰۴۴ مربع کامل نیست پس جوابی برای n به‌دست نمی‌آید.

۴

$$a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۵ + ۳a_۱ = ۵ + ۳ \times ۱ = ۸$$
$$a_۳ = ۵ + ۳a_۲ = ۵ + ۳ \times ۸ = ۲۹ \quad , \quad a_۴ = ۵ + ۳a_۳ = ۵ + ۳ \times ۲۹ = ۹۲$$
$$a_۵ = ۵ + ۳a_۴ = ۵ + ۳ \times ۹۲ = ۲۸۱$$
$$\Rightarrow \{a_n\} = ۱, ۸, ۲۹, ۹۲, ۲۸۱, \cdots$$

۵

$$a_۱ = \frac{۴(۱) + ۱}{۳(۱) + ۲} = ۱ \quad , \quad a_۲ = \frac{۴(۲) + ۱}{۳(۲) + ۲} = \frac{۹}{۸}$$
$$a_۳ = \frac{۴(۳) + ۱}{۳(۳) + ۲} = \frac{۱۳}{۱۱} \quad , \quad a_۴ = \frac{۴(۴) + ۱}{۳(۴) + ۲} = \frac{۱۷}{۱۴}$$
$$a_۵ = \frac{۴(۵) + ۱}{۳(۵) + ۲} = \frac{۲۱}{۱۷}$$



شکل ۱-۷

۶ تعداد قطرهای یک iضلعی محدب را a_i در نظر می‌گیریم. با اضافه شدن رأس $(i + ۱)$اُم به شکل، $(i - ۱)$ قطر به تعداد کل قطرها اضافه می‌شود به این صورت که از رأس اضافه شده به تمام i رأس قبلی می‌توان قطر رسم کرد به غیر از دو رأس مجاور و نیز یکی از اضلاع iضلعی قبلی در $(i + ۱)$ضلعی به قطر تبدیل می‌شود به این معنا که تعداد اقطار اضافه شده برابر $۱ + (i - ۲)$ یعنی $(i - ۱)$ می‌باشد، پس:

$$a_{i+۱} = a_i + (i - ۱)$$

چون $a_۳ = ۰$ پس تمام روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$a_۳ = ۰$$

$$a_۴ = a_۳ + ۲$$

$$a_۵ = a_۴ + ۳$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-۱} + (n - ۲)$$

اگر طرفین روابط فوق را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$a_n = ۲ + ۳ + ۴ + \cdots + (n - ۲) = \frac{(n - ۱)(n - ۲)}{۲} - ۱ = \frac{n(n - ۳)}{۲}$$

۷ در نوشتن آن دنباله یک‌تا «۱»، دوتا «۲»، سه‌تا «۳»، چهارتا «۴»، ... به کار رفته است بنابراین به عنوان مثال آخرین «۲۰» نوشته شده در دنباله دویست‌ودهمین عضو دنباله است (همان طور که آخرین «۴» نوشته شده دهمین عضو دنباله است) زیرا:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۲۰ = \frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که آخرین «k» نوشته شده در آن دنباله به عنوان i اُمین جمله است به طوری که:

$$i = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k = \frac{k(k + ۱)}{۲}$$

پس: $$\frac{k(k + ۱)}{۲} \leq ۱۳۸۰ \Rightarrow k(k + ۱) \leq ۲۷۶۰ \Rightarrow k \leq ۵۲/۵$$

آخرین ۵۲ به عنوان ۱۳۷۸اُمین جمله است زیرا:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۵۲ = \frac{۵۲ \times ۵۳}{۲} = ۱۳۷۸$$

بنابراین جملات ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰ (و به همراه ۵۱ جمله‌ی دیگر) همگی برابر ۵۳ می‌باشند.

۸ دنباله‌ای که قورباغه در آن نقاط قرار می‌گیرد به شکل زیر می‌باشد:

$$S : ۱, ۳, ۴, ۷, ۸, ۹, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۳۱, ۳۲, \ldots$$

اگر اعداد رنگی در دنباله‌ی فوق را به ترتیب با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... نام‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$a_۱ = ۱ \ , \ \ a_n = a_{n-۱} + (n-۲) + n$$

فرمول اخیر از آن‌جا به‌دست آمده است که در حرکت $(n-۱)$اُم، پس از نوشتن عدد رنگی $a_{n-۱}$ قورباغه به تعداد $(n-۲)$ پرش به طول ۱ انجام داده است و پس از رسیدن به نقطه‌ی $[a_{n-۱}+(n-۲)]$ می‌خواهد حرکت nاُم را انجام دهد که اولین قسمت از آن، پرش به طول n و رسیدن به نقطه‌ی رنگیِ $a_{n-۱}+(n-۲)+n$ یا $a_{n-۱}+۲(n-۱)$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
a_۱ &= ۱\\
a_۲ &= a_۱ + ۲(۱)\\
a_۳ &= a_۲ + ۲(۲)\\
a_۴ &= a_۳ + ۲(۳)\\
&\vdots\\
a_{k-۱} &= a_{k-۲} + ۲(k-۲)\\
a_k &= a_{k-۱} + ۲(k-۱)
\end{aligned}$$

اگر طرفین تساوی‌های به‌دست آمده را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$a_k = ۲(۱+۲+۳+\cdots+(k-۱)) + ۱ = k^۲ - k + ۱$$

بنابراین دنباله‌ی رنگی به شکل زیر خواهد بود:

$$\delta : ۱, ۳, ۷, ۱۳, ۲۱, ۳۱, ۴۳, ۵۷, \cdots, k^۲ - k + ۱, \cdots$$

در دنباله‌ی S نیز بعد از نوشته شدن عدد رنگیِ a_k اعداد بعد از آن به تعداد $k-۱$تا نوشته می‌شود، یعنی دنباله‌ی S بعد از a_k به شکل زیر می‌باشد:

$$k^۲ - k + ۱, k^۲ - k + ۲, k^۲ - k + ۳, \cdots, k^۲ - k + k$$

حال اگر دنباله‌ی به‌دست آمده را از چپ به راست نگاه کنید متوجه می‌شوید که عدد $k^۲$ به همراه $k-۱$ عدد متوالی بعد از آن در دنباله‌ی S هستند، به این معنا که اگر $۲(n-۱)$ عدد موجود در بین دو مربع کامل $(n-۱)^۲$ و $n^۲$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم اعداد موجود در نیمه‌ی اول در دنباله‌ی S نیستند ولی همه‌ی اعداد موجود در نیمه‌ی دوم به همراه خودِ $n^۲$ در دنباله‌ی S هستند. مربع کامل‌های بعد و قبل از اعداد داده شده در گزینه‌ها را پیدا کرده و بررسی می‌کنیم که هر یک از گزینه‌ها در نیمه‌ی اول قرار دارند و یا در نیمه‌ی دوم:

$۲۰۰۶ : ۴۴^۲ < ۲۰۰۶ < ۴۵^۲ \Rightarrow ۱۹۳۶ < ۲۰۰۶ < ۲۰۲۵ \Rightarrow$ نیمه‌ی دوم

$۱۳۸۴ : ۳۷^۲ < ۱۳۸۴ < ۳۸^۲ \Rightarrow ۱۳۶۹ < ۱۳۸۴ < ۱۴۴۴ \Rightarrow$ نیمه‌ی اول

$۱۴۲۶ : ۳۷^۲ < ۱۴۲۶ < ۳۸^۲ \Rightarrow ۱۳۶۹ < ۱۴۲۶ < ۱۴۴۴ \Rightarrow$ نیمه‌ی دوم

$۱۰۲۳ : ۳۱^۲ < ۱۰۲۳ < ۳۲^۲ \Rightarrow ۹۶۱ < ۱۰۲۳ < ۱۰۲۴ \Rightarrow$ نیمه‌ی دوم

$۱۹۸۱ : ۴۴^۲ < ۱۹۸۱ < ۴۵^۲ \Rightarrow ۱۹۳۶ < ۱۹۸۱ < ۲۰۲۵ \Rightarrow$ نیمه‌ی دوم

پس فقط عدد ۱۳۸۴ در نیمه‌ی اول بوده و جواب مورد نظر می‌باشد.

۹ ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1 = 1 , \ a_2 = 7 , \ a_3 = 19 , \ a_4 = 43 , \cdots$$

اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که هر یک از آن اعداد در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند و به راحتی ثابت می‌شود که همه‌ی جملات آن دنباله همین ویژگی را دارد:

$$a_5 = 2a_4 + 5 = 2(3k+1) + 5 = 3k' + 7 = 3k'' + 1$$
$$a_6 = 2a_5 + 5 = 2(3k''+1) + 5 = 3l' + 7 = 3l'' + 1$$
$$\vdots$$

در بین اعداد داده شده فقط عدد موجود در گزینه‌ی (ب) در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۱۰

$$a_r < b_r \Rightarrow \sqrt{123 + r^2} < r + 3$$
$$\Rightarrow 123 + r^2 < r^2 + 6r + 9 \Rightarrow r > 19$$

کوچک‌ترین عدد صحیح r که از ۱۹ بزرگ‌تر است $r = 20$ می‌باشد.
حال $a_s > b_s + 1$ را بررسی می‌کنیم:

$$a_s > b_s + 1 \Rightarrow \sqrt{123 + s^2} > s + 4$$
$$\Rightarrow 123 + s^2 > s^2 + 8s + 16 \Rightarrow s < 13{,}4$$

بزرگ‌ترین عدد صحیح s که کوچک‌تر از ۱۳٫۴ باشد عدد ۱۳ می‌باشد. با توجه به اعداد به‌دست آمده، جواب مطلوب $r + s = 20 + 13 = 33$ می‌باشد.

۱۱ چند جمله‌ی نخست دنباله را می‌نویسیم:

$$x_0 = 3 , \ x_1 = 8 , \ x_2 = 12 , \ x_3 = 4 , \ x_4 = -36 \ \cdots$$

اگر دقت کنید x_iها وقتی مضرب ۳ هستند که i زوج باشد.

$$x_6 = 3x_5 - 4x_4 = 3l - 4(l') = 3l''$$
$$x_8 = 3x_7 - 4x_6 = 3m - 4(3l') = 3m''$$
$$\cdots$$

در بین اعداد ۰، ۱، ۲، ...، ۲۰۰۰ به تعداد ۱۰۰۱ عدد زوج وجود دارد.

۱۲ فرض می‌کنیم تعداد نواحی ایجاد شده از رسم i صفحه a_i باشد. با رسم صفحه‌ی $(i+1)$اُم دایره‌ی ایجاد شده بر روی کره توسط آن، هر یک از دایره‌های ایجاد شده از رسم i صفحه‌ی قبلی را

دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین $2i$ نقطه‌ی تلاقی ایجاد می‌شود. به ازای هر نقطه‌ی تلاقی دقیقاً یک ناحیه به نواحی قبلی می‌شود بنابراین رابطه‌ی بازگشتی زیر برقرار است:

$$a_{i+1} = a_i + 2i$$

با توجه به این‌که $a_1 = 2$، سایر جملات دنباله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4 \quad , \quad a_3 = a_2 + 4 = 4 + 4 = 8$$
$$a_4 = a_3 + 6 = 8 + 6 = 14 \quad , \quad a_5 = a_4 + 8 = 14 + 8 = 22$$
$$a_6 = a_5 + 10 = 22 + 10 = 32 \quad , \quad a_7 = a_6 + 12 = 32 + 12 = 44$$
$$a_8 = a_7 + 14 = 44 + 14 = 58 \quad , \quad a_9 = a_8 + 16 = 58 + 16 = 74$$

۱۳

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} = (n+1)a_n + n \\
\Rightarrow\ & a_{n+1} + 1 = (n+1)(a_n + 1) \\
\Rightarrow\ & \frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = (n+1) \\
\Rightarrow\ & \frac{a_1 + 1}{a_0 + 1} = (0+1) \\
& \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1} = (1+1) \\
& \frac{a_3 + 1}{a_2 + 1} = (2+1) \\
& \vdots \\
& \frac{a_{101} + 1}{a_{100} + 1} = (100+1)
\end{aligned}$$

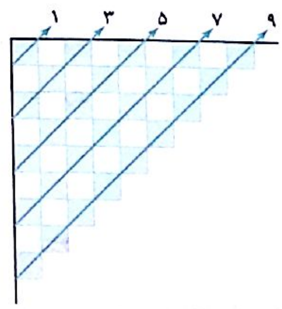
طرفین رابطه‌های به‌دست آمده را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{a_{101} + 1}{a_0 + 1} = (101)! \Rightarrow a_{101} = (101)! - 1$$

معلوم است که عدد $(101)!$ مضرب 102 می‌باشد پس:

$$\begin{aligned}
a_{101} &= 102k - 1 = 102k + 101 - 102 \\
&= 102(k-1) + 101 = 102k' + 101
\end{aligned}$$

۱۴ قطرها را مطابق شکل ۱ـ۸ شماره‌گذاری می‌کنیم:



شکل ۱-۸

بزرگ‌ترین عدد موجود در قطر i برابر $\frac{i(i+1)}{2}$ می‌باشد و اگر i فرد باشد آن عدد در بالاترین نقطه‌ی قطر قرار دارد و اگر i زوج باشد آن عدد در پایین‌ترین نقطه‌ی قطر قرار دارد:

$$1377 \leq \frac{i(i+1)}{2} \Rightarrow 2754 \leq i(i+1) \Rightarrow i_{\min} = 52$$

یعنی عدد ۱۳۷۷ در قطر ۵۲ قرار دارد. بزرگ‌ترین عدد موجود در قطر ۵۲ برابر $\frac{۵۳ \times ۵۲}{۲}$ یعنی ۱۳۷۸ می‌باشد که در پایین‌ترین نقطه‌ی قطر قرار دارد بنابراین ۱۳۷۷ یکی بالاتر از آن یعنی در سطر پنجاه‌ویکم و ستون دوم قرار دارد.

۱۵ هر یک از مؤلفه‌های نقاط سه بار افزایش و یک بار کاهش می‌یابد، بنابراین مختصات نقاط $A_۱$ تا $A_{۱۰}$ به ترتیب به شکل زیر می‌باشند:

$$(۰,۱)\ ,\ (۲,۳)\ ,\ (۵,۰)\ ,\ (۹,۴)$$
$$(۴,۹)\ ,\ (۱۰,۱۵)\ ,\ (۱۷,۸)\ ,\ (۲۵,۱۶)$$
$$(۱۶,۲۵)\ ,\ (۲۶,۳۵)$$

۱۶

$$a_{۱۰۰۰} = a_{۱۰۰} + a_{۱۰} = a_{۱۰} + a_{۱۰} + a_{۱۰} \Rightarrow ۳۶ = ۳a_{۱۰} \Rightarrow a_{۱۰} = ۱۲$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_{۱۵} = ۹ & \Rightarrow & a_۵ + a_۳ = ۹ \\ a_{۱۰} = ۱۲ & \Rightarrow & a_۵ + a_۲ = ۱۲ \\ a_۶ = ۷ & \Rightarrow & a_۲ + a_۳ = ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲(a_۲ + a_۳ + a_۵) = ۲۸$$

$$\Rightarrow a_۲ + a_۳ + a_۵ = ۱۴$$
$$\Rightarrow a_{۳۰} = ۱۴$$

۱۷

$$t_n = S_n - S_{n-۱} \Rightarrow t_n = ۳n^۲ + ۲n - [۳(n-۱)^۲ + ۲(n-۱)]$$
$$= ۳n^۲ + ۲n - ۳n^۲ + ۶n - ۳ - ۲n + ۲ = ۶n - ۱$$

۱۸

$$t_۳ + t_{۲۲} + t_{۳۳} + t_{۴۴} = ۳۱۰ \Rightarrow (t_۱ + ۲d) + (t_۱ + ۲۱d)$$
$$+ (t_۱ + ۳۲d) + (t_۱ + ۴۳d) = ۳۱۰$$
$$\Rightarrow ۴t_۱ + ۹۸d = ۳۱۰ \Rightarrow ۲t_۱ + ۴۹d = ۱۵۵$$
$$S_{۵۰} = \frac{۵۰}{۲}[t_۱ + t_{۵۰}] = \frac{۵۰}{۲}[t_۱ + t_۱ + ۴۹d] = ۲۵ \times ۱۵۵ = ۳۸۷۵$$

۱۹

$$\text{سمت راست تساوی} = an^۲ + bn = (\frac{d}{۲})n^۲ + (t_۱ - \frac{d}{۲})n$$
$$= \frac{n}{۲}[nd + ۲t_۱ - d] = \frac{n}{۲}[t_۱ + t_۱ + (n-۱)d] = \frac{n}{۲}[t_۱ + t_n]$$
$$= S_n = \text{سمت چپ تساوی}$$

۲۰

$$t_۱ = -\frac{۳}{۲}\ ,\ t_n = ۱۲\ ,\ d = \frac{۱}{۲}$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 12 = -\frac{3}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 24 = -3 + (n-1)$$
$$\Rightarrow n = 28$$

بین t_1 و t_{28} به تعداد ۲۶ جمله وجود دارد.

۲۱

$$t_1 = 2\ ,\ t_{m+2} = m^2 + 2m + 3\ ,\ t_{11} = 112$$
$$t_{11} = t_1 + 10d \Rightarrow 112 = 2 + 10d \Rightarrow d = 11$$
$$\text{واسطه پنجم} = t_6 = t_1 + 5d = 2 + 55 = 57$$
$$t_{m+2} = m^2 + 2m + 3 \Rightarrow t_1 + (m+1)d = m^2 + 2m + 3$$
$$\Rightarrow 2 + (m+1) \times 11 = m^2 + 2m + 3 \Rightarrow m^2 - 9m - 10 = 0$$
$$\Rightarrow (m-10)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 10$$

۲۲

$$\sum_{i=1}^{20} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$$
$$= (1^2 - 3 \times 1 + 7) + (2^2 - 3 \times 2 + 7) + \cdots + (20^2 - 3 \times 20 + 7)$$
$$= (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) + 20 \times 7$$
$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 3 \times \frac{20 \times 21}{2} + 140 = 2380$$

یادآوری می‌شود که تساوی‌های:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n برقرار است و این تساوی‌ها با قرار دادن n, $1, 2, \cdots$ در اتحادهای $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$ و $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ به‌دست می‌آیند.

۲۳ الف)

$$A = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots + (99-100)(99+100)$$
$$= (-3) + (-7) + \cdots + (-199) = \frac{50}{2}[-3 - 199] = -5050$$

ب)

$$B = (a^2 + a^{-2} + 2) + (a^4 + a^{-4} + 2) + \cdots + (a^{2n} + a^{-2n} + 2)$$
$$= (a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n}) + (a^{-2} + a^{-4} + \cdots + a^{-2n}) + 2n$$

$$= \frac{a^{2n+2}-1}{a^2-1} - 1 + \frac{a^{-2n-2}-1}{a^{-2}-1} - 1 + 2n$$

۲۴

$$y = x.q \ , \ z = x.q^2$$

$$x+y+z = 52 \Rightarrow x(1+q+q^2) = 52 \Rightarrow \frac{x(1-q^3)}{(1-q)} = 52$$

$$x^2+y^2+z^2 = 1456 \Rightarrow x^2(1+q^2+q^4) = 1456 \Rightarrow \frac{x^2(1-q^6)}{(1-q^2)} = 1456$$

$$\Rightarrow \frac{x(1+q^3)}{1+q} = 28 \Rightarrow x(1+q^2-q) = 28$$

$$\Rightarrow \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{52}{28} = \frac{13}{7} \Rightarrow q = 3 \text{ یا } q = \frac{1}{3}$$

$$1)\ q = 3 \Rightarrow x = 4 \ , \ y = 12 \ , \ z = 36$$

$$2)\ q = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 36 \ , \ y = 12 \ , \ z = 4$$

۲۵

$$t_2 = 6 \ , \ S_n = \frac{1}{8}(S'_n)$$

$$t_1 \times \frac{1}{1-q} = \frac{1}{8}t_1^2\frac{1}{1-q^2} \Rightarrow 8 = t_1\frac{1}{1+q}$$

$$t_2 = 6 \Rightarrow t_1.q = 6 \Rightarrow 8(1+q)q = 6 \Rightarrow 4q^2+4q-3 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ یا } q = -\frac{3}{2} \text{ غیرقابل قبول}$$

$$t_1.q = 6 \Rightarrow t_1 = 12$$

۲۶ الف)

$$A = (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1) = \frac{10^{n+1}-10}{10-1} - n$$

ب)

$$B = \frac{4}{9}A \Rightarrow B = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{10-1} - n\right)$$

۲۷

$$S'_n = (t_1^2+t_2^2+t_3^2+\cdots+t_n^2) = (a^2+a^2q^2+a^2q^4+\cdots+a^2q^{2n-2})$$

$$= a^2(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n-2}) = a^2\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}$$

۲۸

$$t_1+t_2+t_3 = 112 \quad , \quad t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6 = 126$$

$$\Rightarrow t_1+t_1q+t_1q^2 = 112 \quad , \quad t_1q^3+t_1q^4+t_1q^5 = 126-112 = 14$$

$$\Rightarrow t_1(1+q+q^2) = 112 \quad , \quad t_1q^3(1+q+q^2) = 14$$

$$\Rightarrow \frac{t_1q^3(1+q+q^2)}{t_1(1+q+q^2)} = \frac{14}{112} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۲۹

$$t_۱ + (t_۱ + d) + (t_۱ + ۲d) + (t_۱ + ۳d) + (t_۱ + ۴d) = ۳ \times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵t_۱ + ۱۰d = ۵۴۰ \Rightarrow ۵(t_۱ + ۲d) = ۵۴۰^\circ \Rightarrow t_۱ + ۲d = ۱۰۸^\circ$$

بنابراین معلوم می‌شود که جمله‌ی وسط برابر ۱۰۸° می‌باشد.

۳۰ برای آن‌که x، y و z سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی باشند، لازم و کافی است که رابطه‌ی $۲y = x + z$ برقرار باشد، بنابراین با توجه به تساوی $۲b = a + c$ باید ثابت کنیم تساوی $۲(a^۲ + ac + c^۲) = (a^۲ + ab + b^۲) + (b^۲ + bc + c^۲)$ نیز برقرار است:

$$(a^۲ + ab + b^۲) + (b^۲ + bc + c^۲) = a^۲ + a(\frac{a+c}{۲}) + ۲(\frac{a+c}{۲})^۲ + (\frac{a+c}{۲})c + c^۲$$

$$= a^۲ + \frac{a^۲}{۲} + \frac{ac}{۲} + \frac{a^۲}{۲} + ac + \frac{c^۲}{۲} + \frac{ac}{۲} + \frac{c^۲}{۲} + c^۲$$

$$= ۲a^۲ + ۲ac + ۲c^۲ = ۲(a^۲ + ac + c^۲)$$

۳۱

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^۲}{n^۲} \Rightarrow \frac{\frac{m}{۲}(۲t_۱ + (m-۱)d)}{\frac{n}{۲}(۲t_۱ + (n-۱)d)} = \frac{m^۲}{n^۲}$$

$$\Rightarrow ۲(n-m)t_۱ = (n-m)d \Rightarrow ۲t_۱ = d$$

$$\frac{t_m}{t_n} = \frac{t_۱ + (m-۱)d}{t_۱ + (n-۱)d} = \frac{t_۱ + (m-۱) \times ۲t_۱}{t_۱ + (n-۱) \times ۲t_۱} = \frac{(۲m-۱)t_۱}{(۲n-۱)t_۱} = \frac{۲m-۱}{۲n-۱}$$

۳۲

$$\frac{۱}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+۱}}} = \frac{\sqrt{a_{i+۱}} - \sqrt{a_i}}{a_{i+۱} - a_i} = \frac{\sqrt{a_{i+۱}} - \sqrt{a_i}}{d}$$

بنابراین

$$\text{سمت چپ تساوی} = \left(\frac{\sqrt{a_۲} - \sqrt{a_۱}}{d}\right) + \cdots + \left(\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-۱}}}{d}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_۱}}{d} = \frac{a_n - a_۱}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_۱})} = \frac{(n-۱)d}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_۱})}$$

$$= \frac{n-۱}{\sqrt{a_۱} + \sqrt{a_n}} = \text{سمت راست تساوی}$$

۳۳ اگر تعداد کره‌های موجود در ردیف nاُم را t_n در نظر بگیریم، آن‌گاه تعداد کره‌های ردیف $(n+۱)$اُم، یعنی $t_{n+۱}$ برابر $t_n + (n+۱)$ خواهد شد:

$$\left.\begin{array}{l} t_۲ = t_۱ + ۲ \\ t_۳ = t_۲ + ۳ \\ \vdots \\ t_n = t_{n-۱} + n \end{array}\right\} \Rightarrow t_n = t_۱ + (۲ + ۳ + \cdots + n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۱ \,,\, t_۲ = ۳ \,,\, t_۳ = ۶ \,,\, t_۴ = ۱۰ \,,\, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = ۱۲۰ \Rightarrow n = ۸ \Rightarrow t_۸ = \frac{۸ \times ۹}{۲} = ۳۶$$

۳۴

$$a = n + (n+۱) + (n+۲) + \cdots + (n+۸) = ۹n + ۳۶$$

$$a = m + (m+۱) + (m+۲) + \cdots + (m+۹) = ۱۰m + ۴۵$$

$$\Rightarrow ۹n + ۳۶ = ۱۰m + ۴۵ \Rightarrow ۱۰m = ۹(n-۱)$$

چون سمت راست تساوی مضرب ۹ است، بنابراین سمت چپ تساوی و در نتیجه m باید مضرب ۹ باشد. کوچک‌ترین عددی که مضرب ۹ باشد خودِ ۹ می‌باشد، بنابراین $m = ۹$ و $a = ۱۳۵$.

۳۵ فقط به ازای $x = ۱۴$ تصاعد عددی مورد نظر به‌دست خواهد آمد، بنابراین گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۶

$$\left.\begin{array}{l} a_۳ = pa_۲ + qa_۱ \Rightarrow ۱۴ = ۵p + ۲q \\ a_۴ = pa_۳ + qa_۲ \Rightarrow ۴۱ = ۱۴p + ۵q \end{array}\right\} \Rightarrow p = ۴ \,,\, q = -۳$$

$$\Rightarrow a_۵ = ۴a_۴ - ۳a_۳ = (۴ \times ۴۱) - (۳ \times ۱۴) = ۱۲۲$$

$$a_۶ = ۴a_۵ - ۳a_۴ = (۴ \times ۱۲۲) - (۳ \times ۴۱) = ۳۶۵$$