جنب...

جزوه نویسان برتر

جزوه
هندسه

جزوه یاران :

ارشیا شهبازی
محمدامین عابد
رهام شایان شریف
امیر مهدی انصاری نیا
محمدجواد سلیمانی
کیارش پازوکی

مدیر و ناظر :
آریو عشوری

ویراستار :
آریا شیخی

مجموعه جنب
کلاس های ۷.۱، ۷.۲، ۷.۳

فهرست

جزوه هندسه مجموعه جنب

کلاس های 7.1، 7.2، 7.3

فصل 1: نقطه و خط

نقطه: بطور غیر دقیق، اثر قلم بر روی کاغذ است. اما در اصل نقطه یک مفهوم اولیه و تعریف نشده در هندسه است.

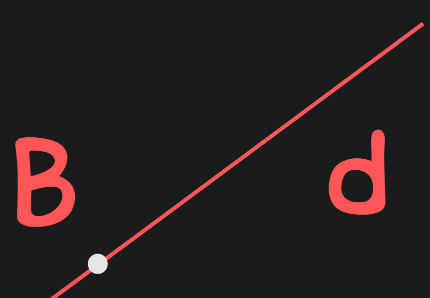
خط: بطور غیر دقیق، خط مجموعه ی تعداد بیشمار نقطه است. این تعریف دقیق نیست زیرا که مفهوم نقطه یک مفهوم تعریف نشده است.

نام گذاری خط و نقطه : همواره خطوط را با حروف کوچک و نقاط را با حروف بزرگ نمایش می‌دهیم.

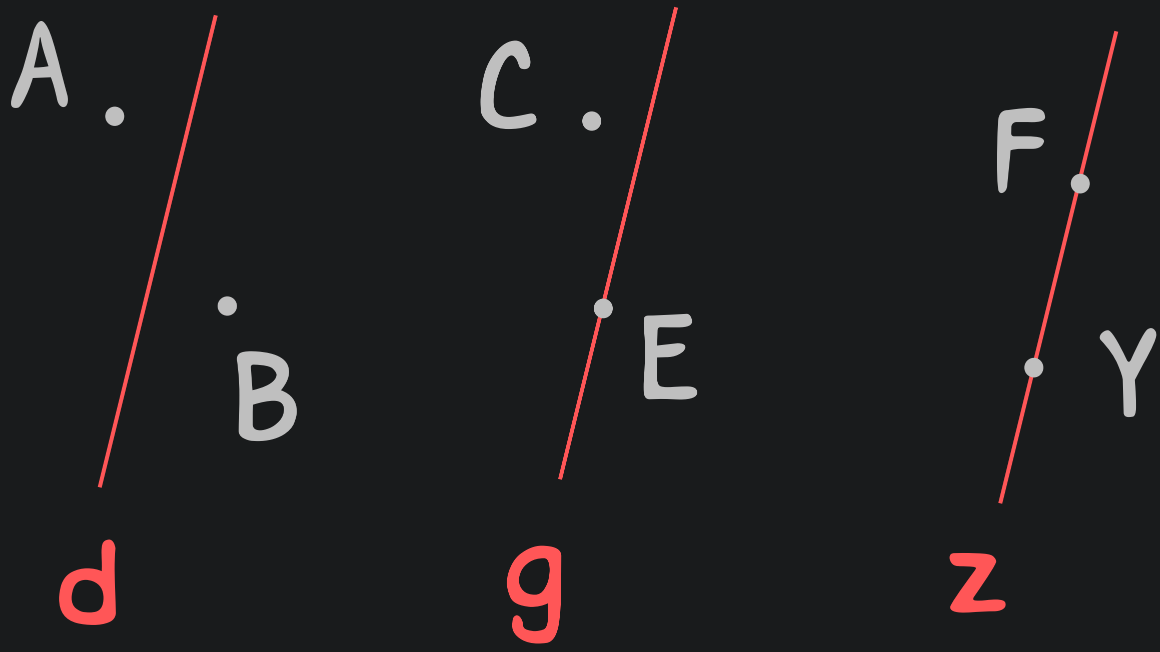
وضعیت نقاط و خطوط نسبت به هم :

1) دو نقطه : دو نقطه یا بر یکدیگر منطبق اند یا منطبق نیستند.

2) یک نقطه و یک خط : یا یک نقطه خارج خط قرار دارد و یا بر خط منطبق است.

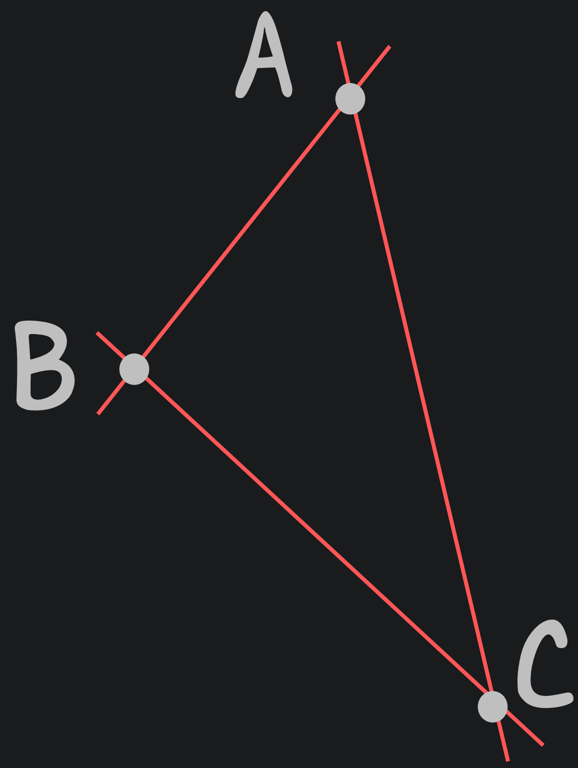


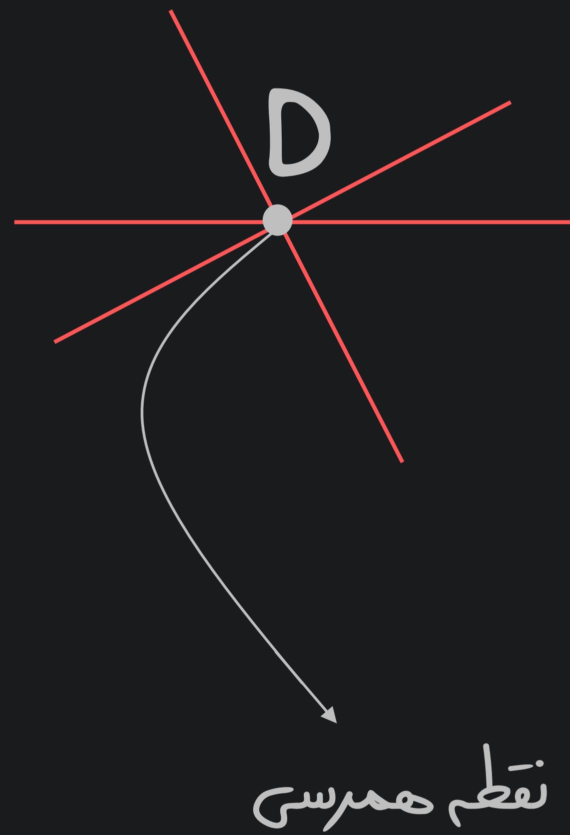
3) دو نقطه و یک خط: یا هر دو نقطه خارج خط قرار دارند یا یکی خارج از خط و دیگری روی خط قرار دارد و یا هر دو نقطه روی خط قرار دارند.

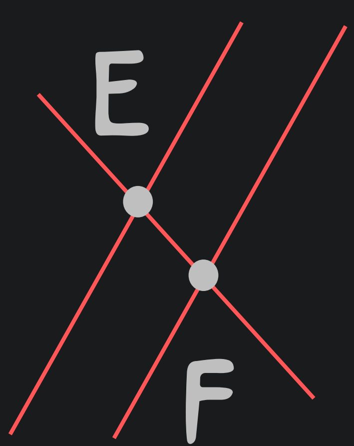


4) دو خط: دو خط یا یکدیگر را قطع می‌کنند (در این حالت میگوییم متقاطع اند.) یا با یکدیگر موازی اند (که در این حالت هیچ نقطه تقاطعی ندارند و میگوییم موازی اند.) و یا بر روی هم قرار دارند (در واقع در تمام نقاط مشترك اند و میگوییم منطبق اند.).

5) سه خط : سه خط چهار وضع متفاوت نسبت به یکدیگر دارند، یا دو به دو متقاطع اند یا در یک نقطه همرس هستند یا دو خط موازی و خط دیگر به صورت مورب آن دو را قطع می‌کند و یا هر سه موازی هستند.


A
B
C


D
نقطه همرسی


E
F


n m z

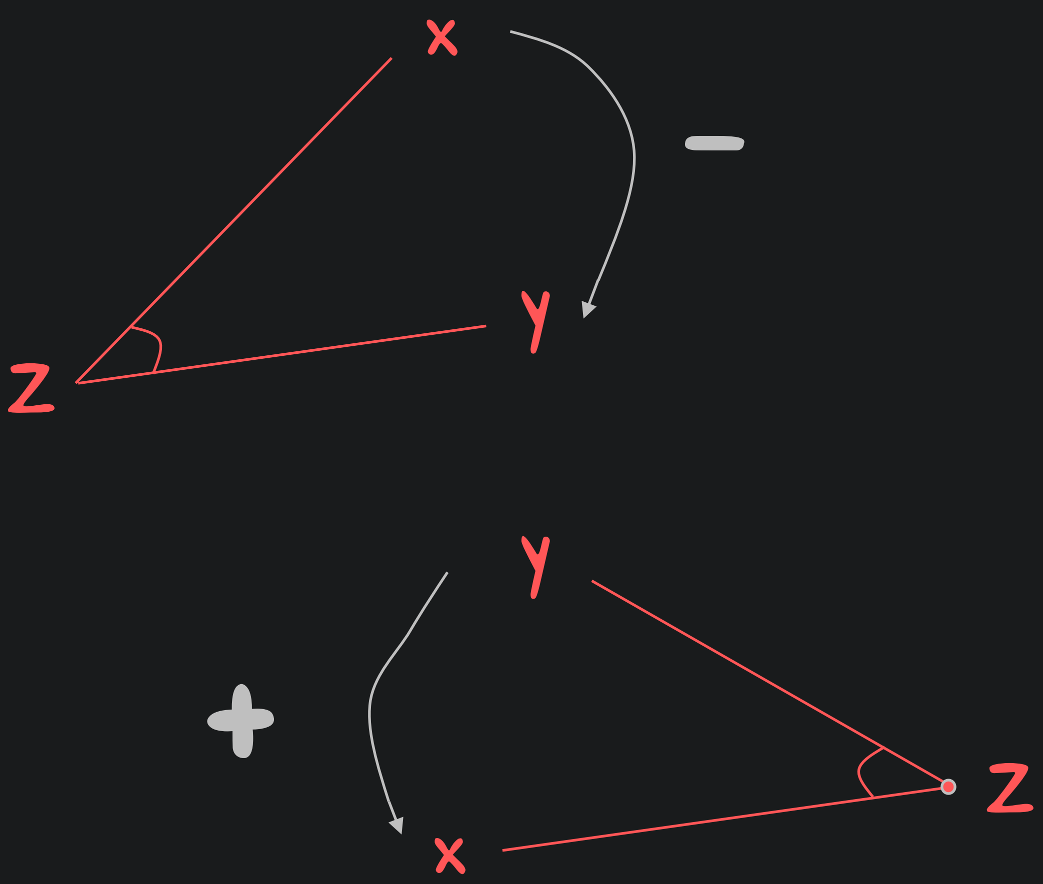
نکته : اگر سه نقطه داشته باشیم و بخواهیم خطی از این سه نقطه عبور دهیم دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد، می‌دانیم از دو نقطه یک و تنها یک خط عبور می‌کند پس یا نقطه سوم خارج از این خط قرار دارد و یا بر روی خط واقع است. (در این حالت می‌گوییم سه نقطه هم خط هستند.)

نکته : تمامی مباحثی که مطرح شد، خط ها، خط صاف در نظر گرفته شده اند و خطوط خمیده محاسبه نشده اند.

فصل 2: زاویه

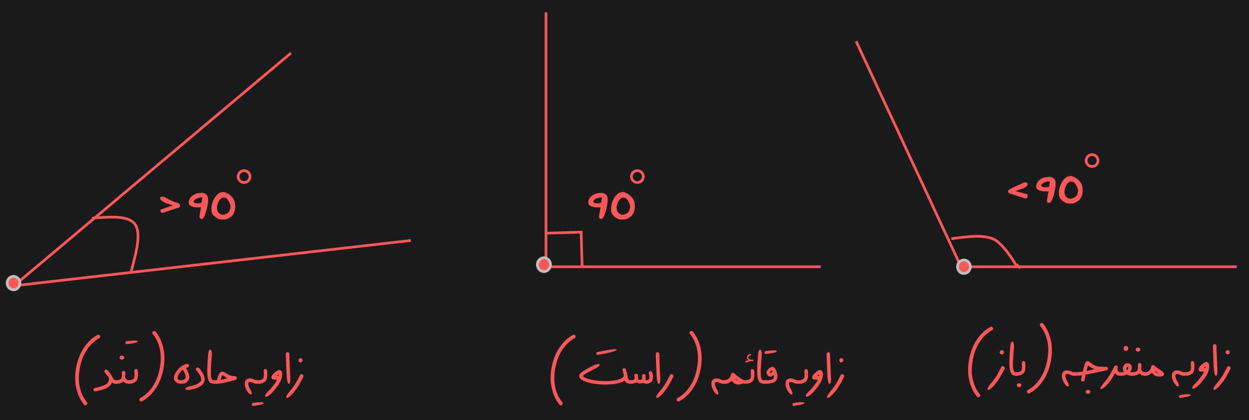
زاویه: زاویه را می‌توانیم فضایی تعریف کنیم که از برخورد دو نیم خط پدید می‌آید. گرچه این تعریف کاملاً دقیق نیست و می‌توان به آن ایراد وارد کرد.

نکته : دقت کنید که اگر بر خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم (پاد ساعتگرد) زاویه را مثبت و اگر در جهت عقربه ها حرکت کنیم زاویه را منفی می‌نامیم.



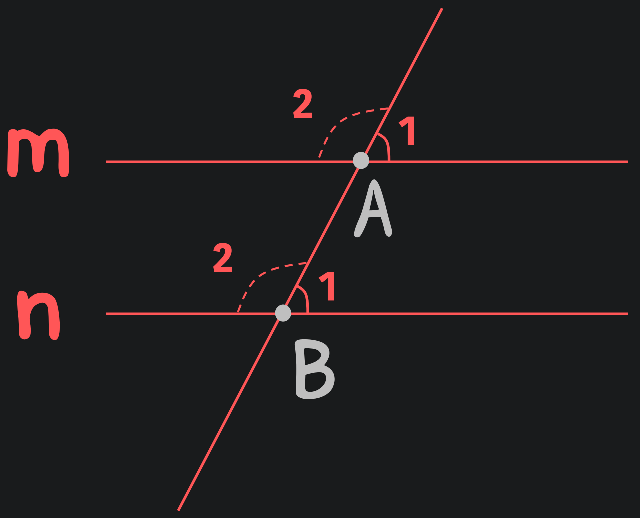
نکته : به نقطه Z در زوایای بالا راس زاویه و به Zx و Zy اضلاع زاویه می‌گوییم. دقت کنید که راس زاویه را با حروف بزرگ و اضلاع زاویه را با حروف کوچک نمایش داده ایم. (به این دلیل که راس یک نقطه و اضلاع نوعی خط هستند و خطوط با حروف کوچک و نقاط با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند.)

انواع زاویه:



قضیه خطوط موازی مورب:

اگر دوخط با هم موازی باشند و خطی به صورت مورب آن دو خط را قطع کند در اینصورت زوایا به صورت زیر برابر هستند (خطوط n و m موازی اند) :



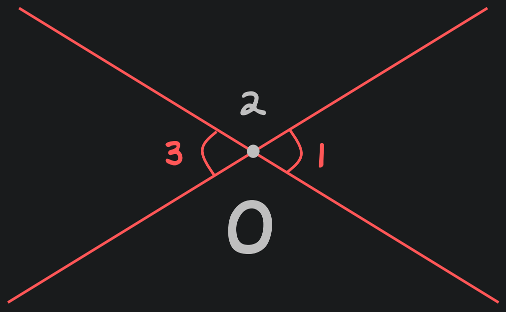
$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

نکته : با تغییر مکان خط این قانون بازهم برقرار است، در واقع، این یک قضیه در هندسه است که به قضیه خطوط موازی و مورب معروف است.

زوایای متقابل به راس :

هرگاه دو زاویه راس مشترك داشته باشند و مقابل یکدیگر باشند با هم برابرند.



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

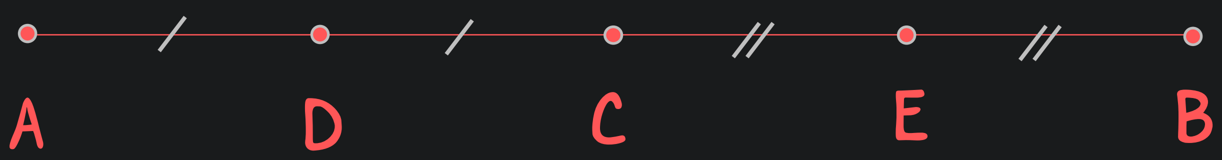
براي اینکه بدانیم چرا این تساوی برقرار است کافیست دقت کنیم که $O_1 + O_2 = 180^\circ$ و همچنین $O_3 + O_2 = 180^\circ$ بنا بر این تساوی زیر برقرار است :

$$\hat{O}_3 + \cancel{\hat{O}_2} = \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_1$$

فصل 3: استنتاج و برهان

مسئله : پاره خط $\overline{AB}$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم نقطه **C** وسط این پاره خط باشد، همچنین نقطه **D** وسط پاره خط $\overline{AC}$ باشد. به علاوه فرض کنیم نقطه **E** وسط پاره خط $\overline{CB}$ باشد، در اینصورت مقدار عددی نسبت $\frac{AD}{AE}$ را محاسبه کنید.

حل : باید سعی کنیم به کمک فرضیاتی که در دست داریم به حکم برسیم، کلید کار در این است که اولاًصورت مسئله را بطور کامل متوجه شویم، سپس سعی کنیم در صورت امکان فهرست گونه ای از فرضیات و حکم بسازیم تا مسیر حل مسئله را برایمان هموار کند.



$$AC = CB \qquad \frac{AD}{AE} = ?$$

با توجه به فرضیات مسئله، از آنجایی که D وسط $\overline{AC}$ است، $\overline{AD} = \overline{DC}$ ، بنا بر این، $\overline{AC} = 2\overline{AD}$ ، به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{CB} = 2\overline{CE}$. پس داریم :

$$AC = CB \Rightarrow 2AD = 2CE \Rightarrow AD = CE$$

$$AE = 3AD \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{3AD} = \frac{1}{3}$$

نکته: هرگاه مانند مسئله فوق با استفاده از فرضیات مسئله و دانسته های قبلی خود حکم را نتیجه بگیریم، از استدلال استنتاجی

یا همان استنتاج استفاده کرده ایم.

فرض : به اطلاعاتی که درست هستند و مسئله آن را به ما داده، فرض می‌گوییم.

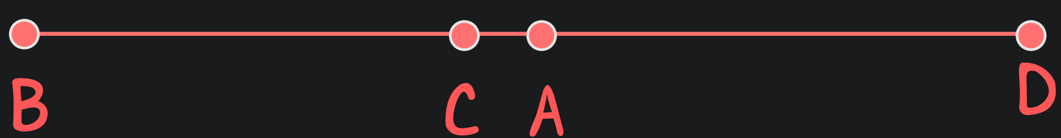
حکم : به پاسخ یا چیزهایی که ما به آن فکر می‌کنیم و آن‌ها را به دست می‌آوریم اما مسئله آن را به ما نداده، حکم می‌گوییم.

مسئله : نقاط A,B,C,D روی یک خط راست هستند و $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=11$, $\overline{CD}=14$, $\overline{DA}=12$ سانتی متر است. فاصله بین دو نقطه که بیشترین فاصله را دارند، کدام است ؟؟

پاسخ : از آنجایی که $\overline{CD}=14$ است ابتدا $\overline{CD}$ را در نظر بگیریم. در این صورت اگر به نقطه A توجه کنیم، 3 وضعیت را میتوانیم برای آن در نظر بگیریم. اول اینکه نقطه A خارج از پاره خط CD و سمت C باشد،که در اینصورت

$\overline{DA}$ از 12 بیشتر می‌شود که متناقض از فرض مسئله است. دوم اینکه نقطه A خارج از پاره خط و سمت D باشد که در اینصورت $\overline{BC}$ از 11 بیشتر خواهد شد که باز با فرض مسئله در تناقض است. بنا بر این نقطه A روی پاره خط $\overline{CD}$ واقع است. حال برای نقطه B مشابه A سه حالت می‌توان در نظر گرفت که اگر مسابه بالا عمل کنیم فقط می‌تواند خارج از پاره خط و سمت C باشد، بنا بر این بیشترین فاصله میان B و D و برابر با 25 است.

$\overline{BD} = 25$



نکته : دیدیم که در این مسئله با رد حالت‌های نادرست به حالت درست رسیدیم، به این شیوه استدلال، برهان خلف می‌گوییم.

فصل 4 : سخن بزرگان

گالیله

در ریاضیات آنچه مهم
است، فکر کردن است!
ریاضیات الفبایی است
که خداوند جهان را بر
مبنای آن خلق کرد.

مریم میرزاخانی

پرارزش ترین بخش مطالعه ریاضی لحظه اي است که می گویی آها! ذوق کشف و لذت فهمیدن چیزي جدید، احساس ایستادن بالاي یک بلندي و رسیدن به دیدي شفاف وواضح.

کارل فریدریش گاوس

ریاضیات، ملکه علوم است.

مایکل عطیه

ریاضیدان
بریتانیایی-لبنانی

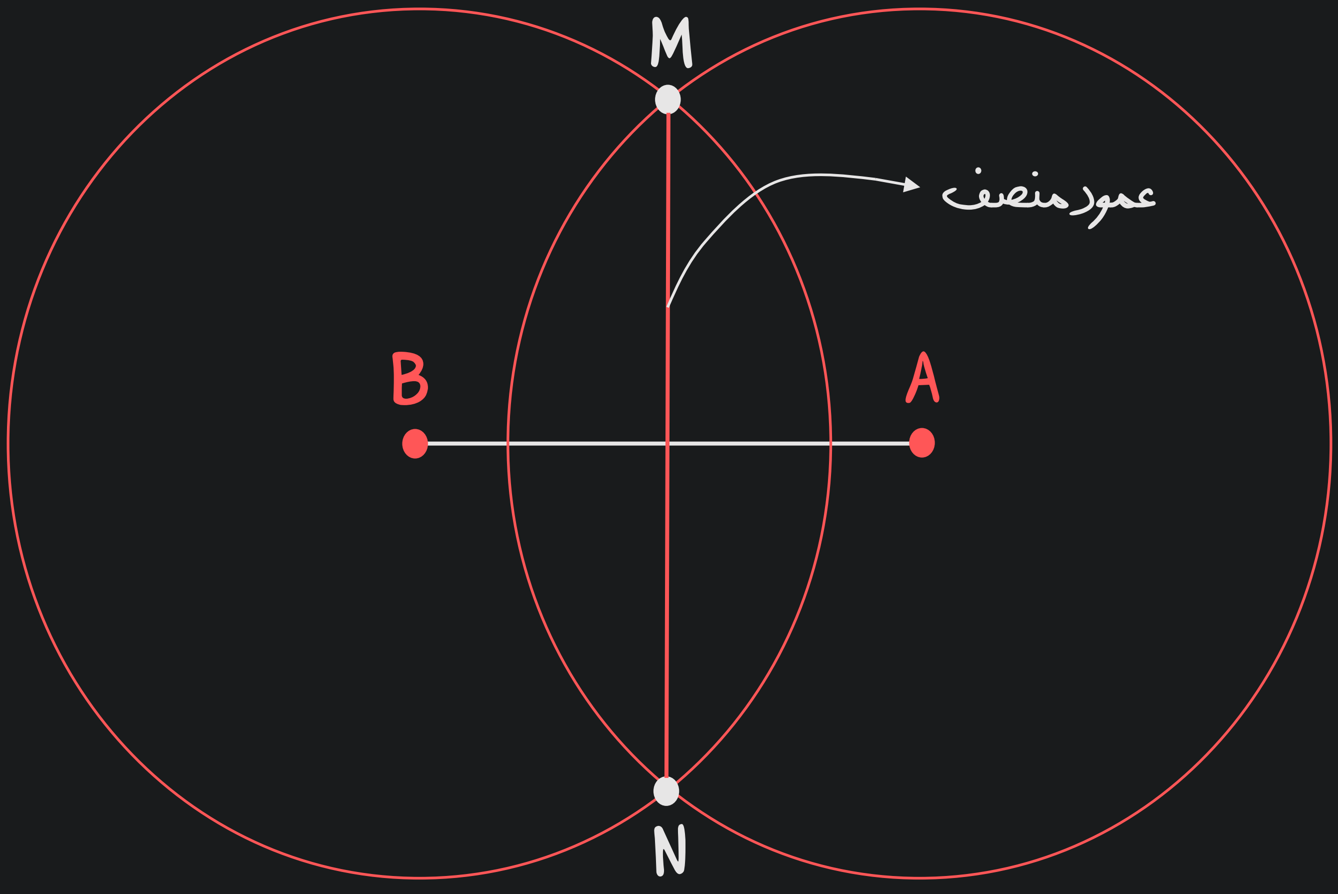
رای درک اینکه چرا یک اثبات درست است، باید جرئت ابراز واکنش شهودی خود را نسبت به چیزها، داشته باشید. باید اثبات را حس کنید.

فصل 5: برخی تعاریف

عمود منصف : خطی است که بر یک پاره خط عمود است و فاصله هر نقطه بر روی آن از دو سر پاره خط برابر است.

رسم عمود منصف یک پاره خط :
فرض کنیم پاره خط AB داده شده باشد، اگر بتوانیم دو نقطه در صفحه پیدا کنیم که فاصله آنها تا دو سر پاره خط یکسان باشد، آنگاه آن دو نقطه بر روی عمود منصف AB قرار دارند. در این صورت می‌توانیم عمود منصف AB را رسم کنیم.
(توضیح بیشتر رسم عمود منصف در صفحه بعد)

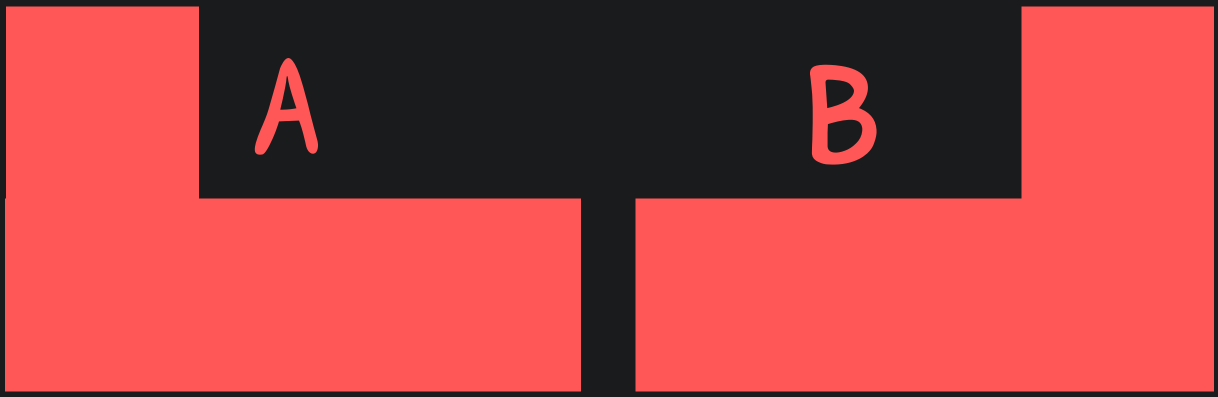
براي اين منظور، كافى است دهانه پرگار را بیش از نصف AB باز کنیم و به مرکز A کمانی بزنیم. سپس بدون تغییر دهانه پرگار، به مرکز B کمان دیگری بزنیم به گونه ای که دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. حال فاصله هاي دو نقطه از دو سر پاره خط یکسان است، بنابراین بر روی عمود منصف پاره خط واقع هستند و خط گذرنده از آنها عمود منصف AB است.

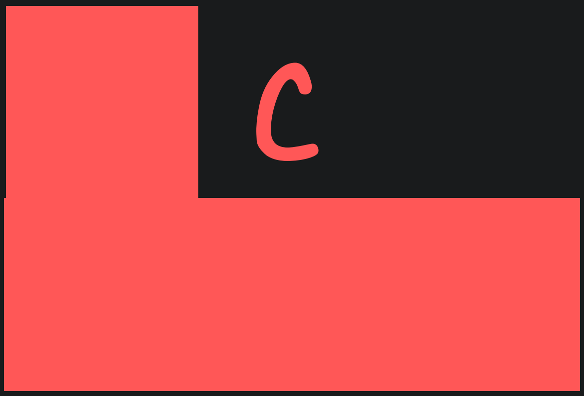


نکته : دقت کنید که در شکل اسلاید در انجام آن مراحل، اگر دهانه پرگار را به اندازه پاره خط AB باز کنیم، مثلث AMB مثلثی متساوی الاضلاع خواهد بود.

نکته : اگر صفحه کاغذ را دقیقاً از روی خط گذرا از AB نصف کنیم، شکل اسلاید قبل، یک کپی از شکل زیر خط خواهد بود، به این عمل تقارن و به خط گذرا از AB که عمل تقارن نسبت به آن انجام شده، خط یا محور تقارن می‌گوییم.

تذکر : دقت کنیم که تقارن محوری جهت شکل را تغییر می‌دهد و دوران انجام نمی‌دهد.

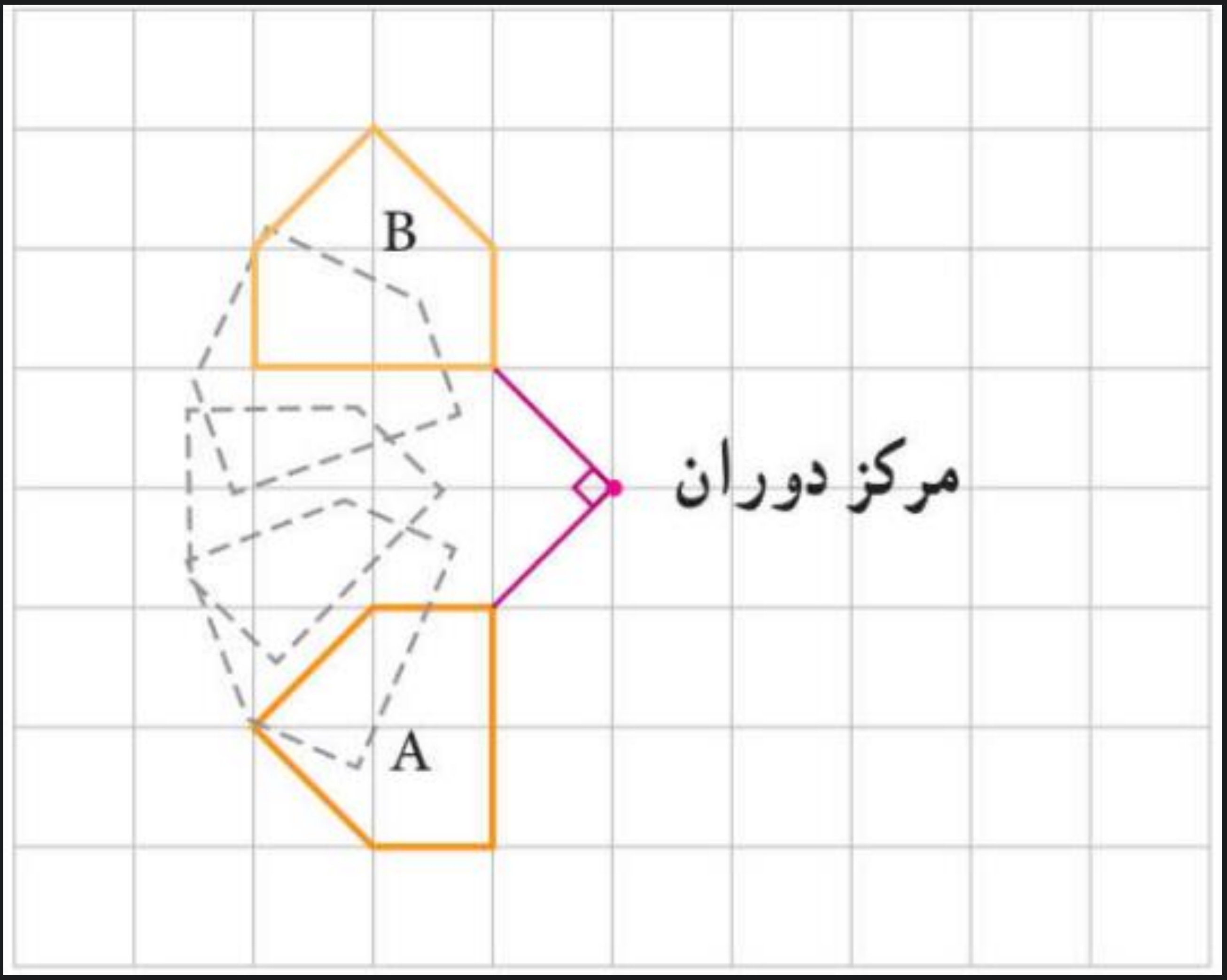




در اشکال بالا، B ، تقارن یافته A، و C، انتقال یافته A هست.

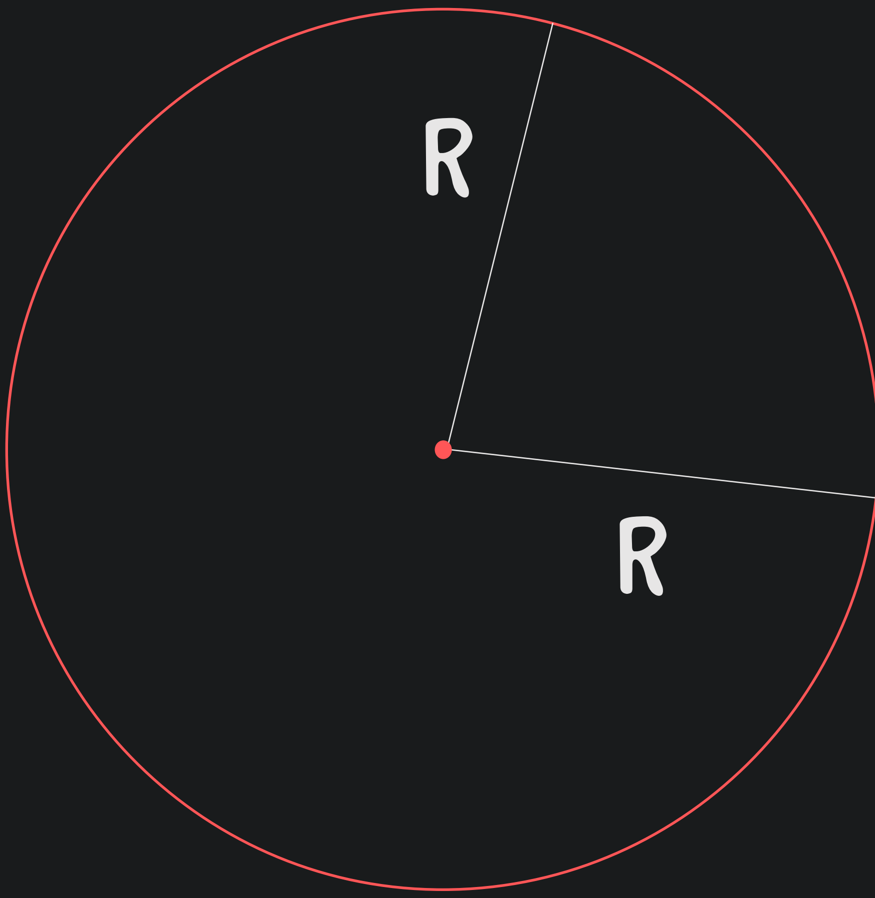
دقت کنید:

در این شکل، شکل A ، به اندازه 90 درجه حول یک نقطه ثابت که به آن مرکز دوران می‌گوییم چرخیده است. در این حالت، شکل B را دوران-یافته شکل A می‌گوییم. (شکل در اسلاید بعد.)



تبدیلات هندسی:
به سه عمل انتقال، دوران و تقارن، تبدیلات هندسی می‌گوییم.

دایره: "مجموعه" ای از نقاط که فاصله آنها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره برابر با عددی ثابت به نام شعاع دایره باشد.

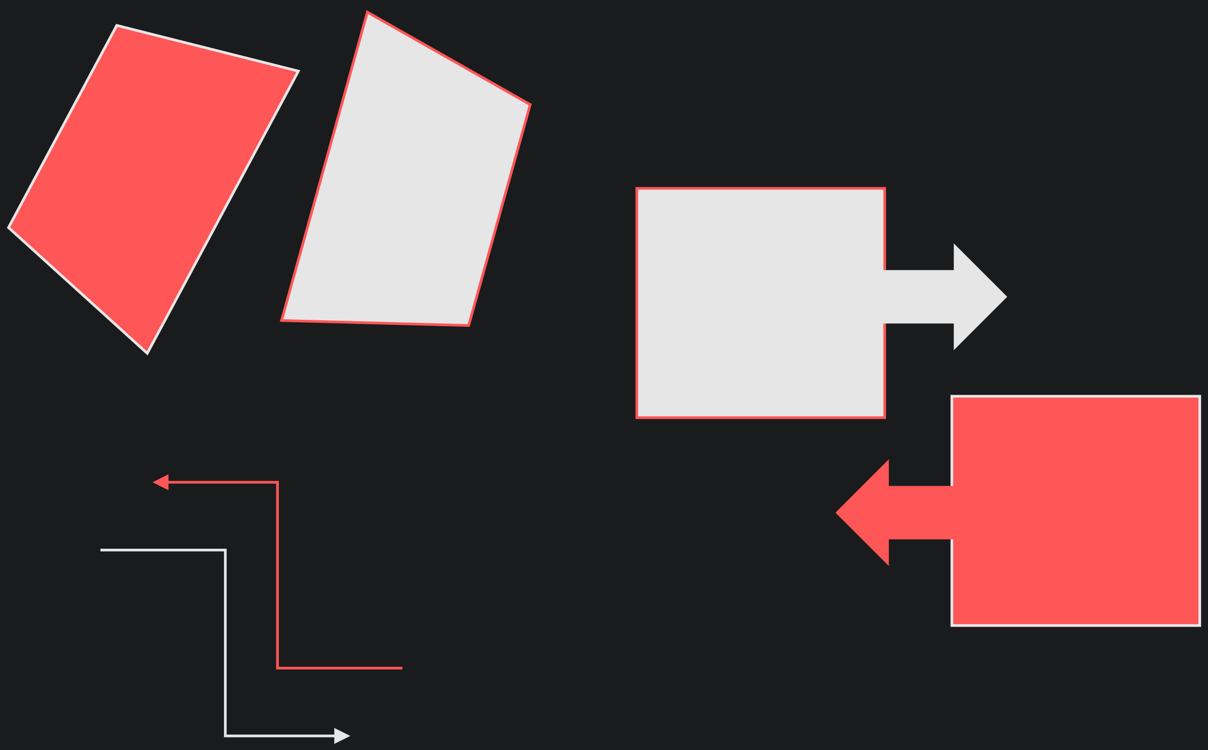


نکته: در حل یک مسئله اساسی ترین نکته درک صحیح صورت مسئله است، پس اگر لازم است صورت مسئله را چندین بار بخوانید تا به درک درستی از مسئله برسید و سپس اقدام به حل کنید.

نکته: موضوع مهم دیگری که بهتر است حتما رعایت کنید ، رسم شکل وساخت فهرست گونه ای از فرض و حکم است. دقت کنید که این کار باعث انتظام فکری می‌شود و کلید حل یک مسئله را در اختیار شما قرار می‌دهد.

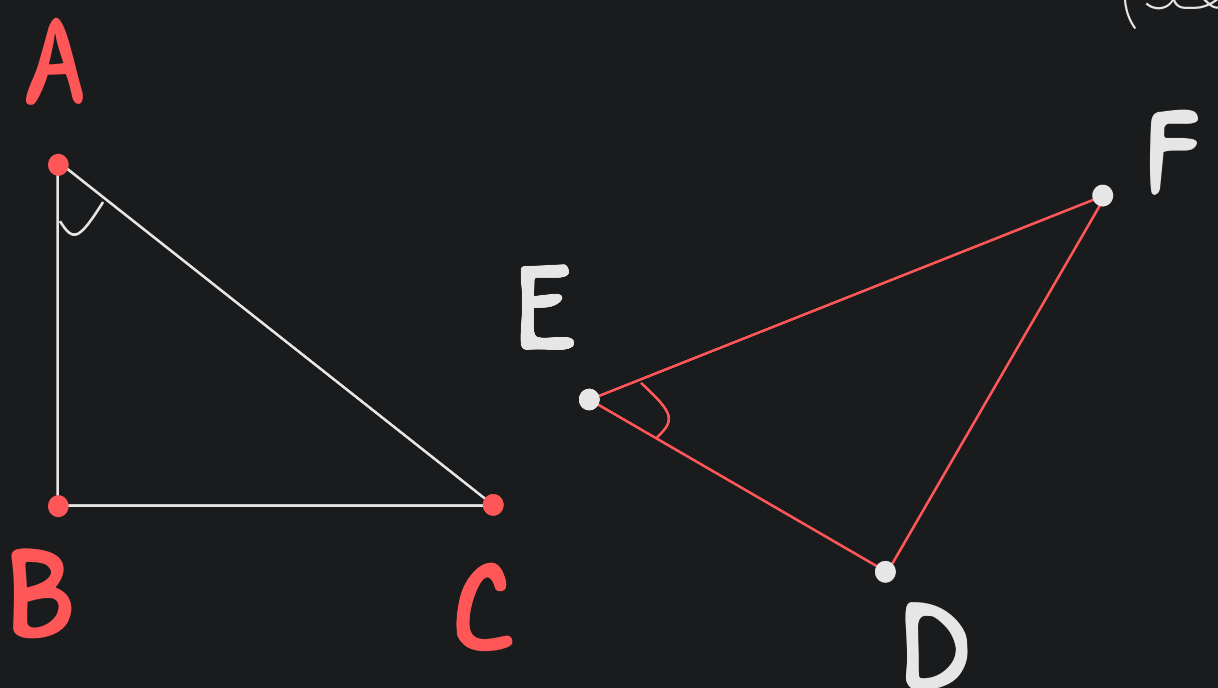
فصل 6: همنهشتی

همنهشتی : دو شکل هندسی را همنهشت گوییم هرگاه قابل انطباق باشند. (یعنی توسط تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن و دوران) بتوانیم آنها را بر یکدیگر منطبق کنیم.)



همنهشتی : دو شکل هندسی را همنهشت گوییم هرگاه قابل انطباق باشند. (یعنی توسط تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن و دوران) بتوانیم آنها را بر یکدیگر منطبق کنیم.)

همنهشتی مثلث ها : هرگاه دو مثلث همنهشت باشند تمامی اجزای آنها با یکدیگر قابل انطباق است : (حل در صفحه بعد)



$$\left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} \\ AC = EF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{array}\right.$$

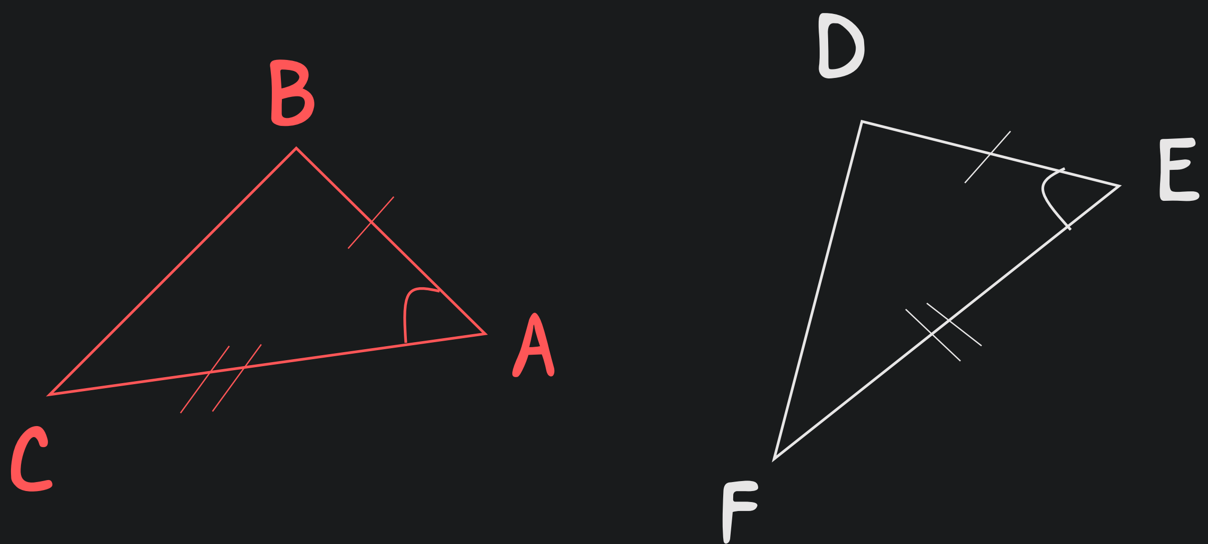
اجزای همنهشت

$$\left.\begin{array}{r} \hat{B} = \hat{D} \\ AB = ED \\ BC = DF \end{array}\right]$$

اجزای متناظر

حالات همنهشتی : همنهشتی میان دو مثلث به سه حالت سه ضلع (ض ض ض)، دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض) و دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) ممکن است اتفاق بیافتد.

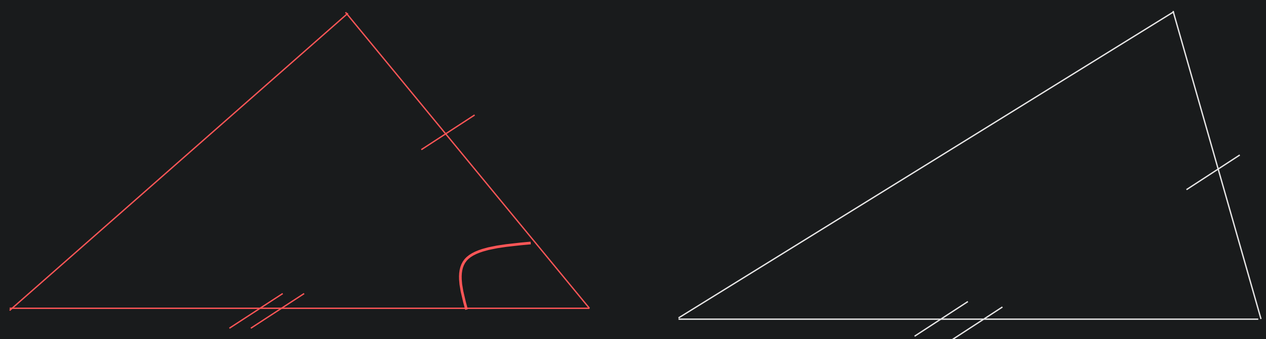
1- حالت دو ضلع و زاویه بین:



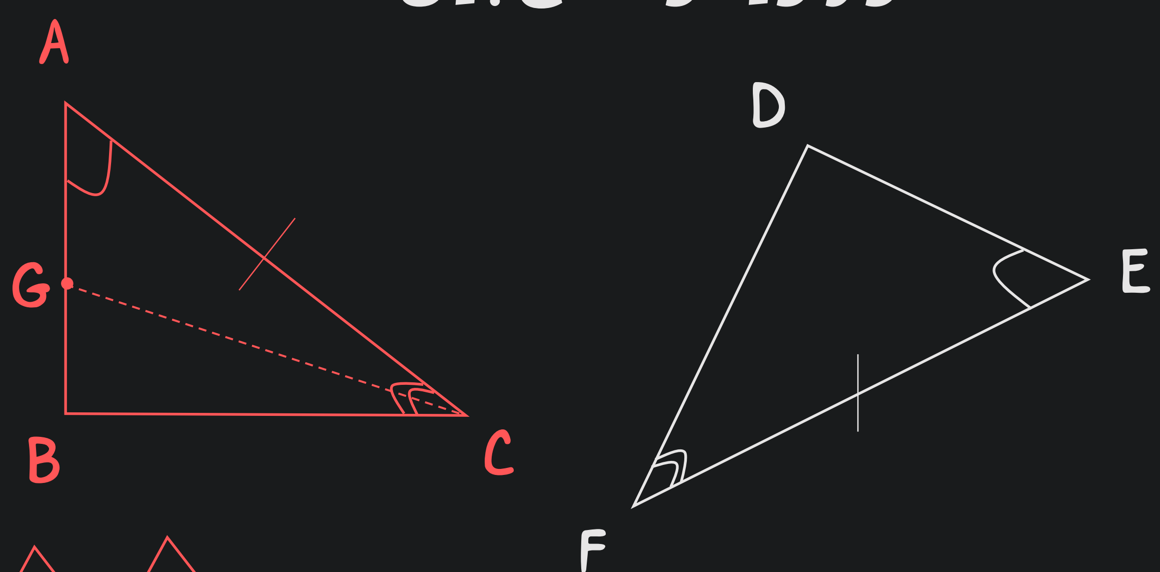
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} \\ AC = EF \\ AB = ED \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

(ض ز ض)

نکته : دقت کنیم که در این حالت شرط زاویه بین ضروری است زیرا :



2- حالت دو زاویه و ضلع بین :



$$\left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} \\ AC = EF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{array}\right. \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$$

(ض ز ض)

برهان : به برهان خلف فرض کنیم مه دو مثلث ABC و DEF همنهشت نباشند. بنابراین، AB برابر با ED نیست. (حالت برابر نبودن DF و BC مشابه است.) اگر AB>ED، نقطه G را روی AB بگونه ای در نظر می‌گیریم که AG=ED . بنا بر این داریم :

$$\left[\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{E}\\ AC=EF\\ AG=DE\end{array}\right. \Rightarrow \triangle AGC=\triangle EDF$$

(ض ز ض)

$$\Downarrow$$

$$\triangle AGC=\hat{F}<\hat{C}$$

که رابطه اخیر با فرض در تناقض است.
(ادامه در اسلاید بعدی)

گزاره : در مثلث متساوی الساقین، زوایای مجور به ساق برابرند.

برهان : فرض کنیم AD نیمساز زاویه A باشد در اینصورت :

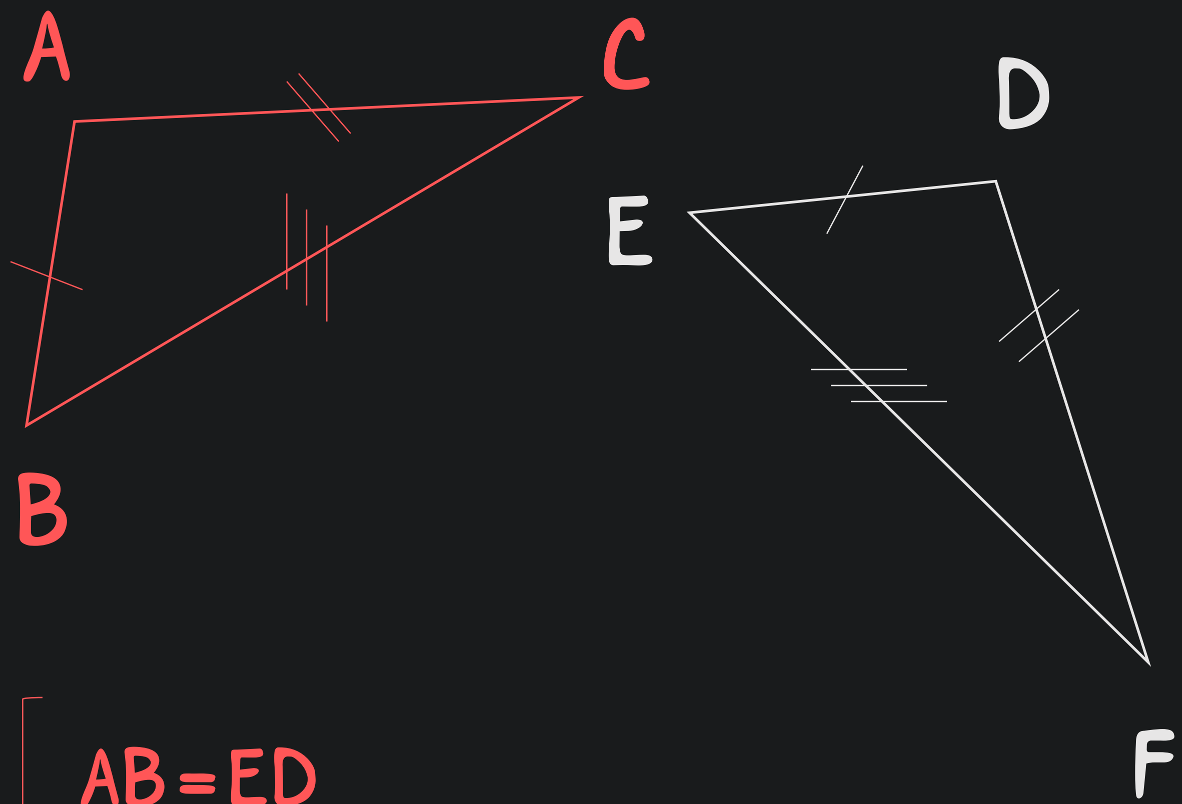
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \widehat{BAD} = \widehat{DAC} \\ AD \text{ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ADC$$

(ض ز ض)

$$\Downarrow$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

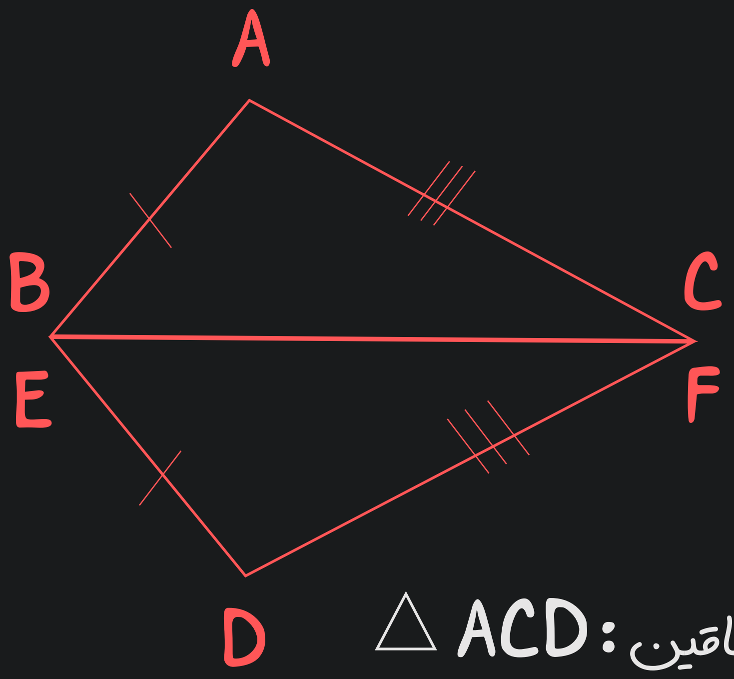
3- حالت 3 ضلع :



$$\begin{cases} AB = ED \\ BC = EF \\ AC = DF \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDF$$

برهان در صفحه بعد...

برهان: مثلث ها را بر هم منطبق میکنیم



$\triangle ACD$: متساوی الساقین $\Rightarrow D\hat{A}C = A\hat{D}F$

$\triangle ABD$: متساوی الساقین $\Rightarrow B\hat{A}D = E\hat{D}A$

$$\left[\begin{array}{l} D\hat{A}C = A\hat{D}E \\ B\hat{A}D = E\hat{D}A \end{array}\right. \Rightarrow B\hat{A}D + D\hat{A}C = E\hat{D}A + A\hat{D}F \Rightarrow B\hat{A}C = E\hat{D}F$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = AC \\ AC = DF \end{array}\right. \Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDF$$

(ض زض)

چند تعریف:

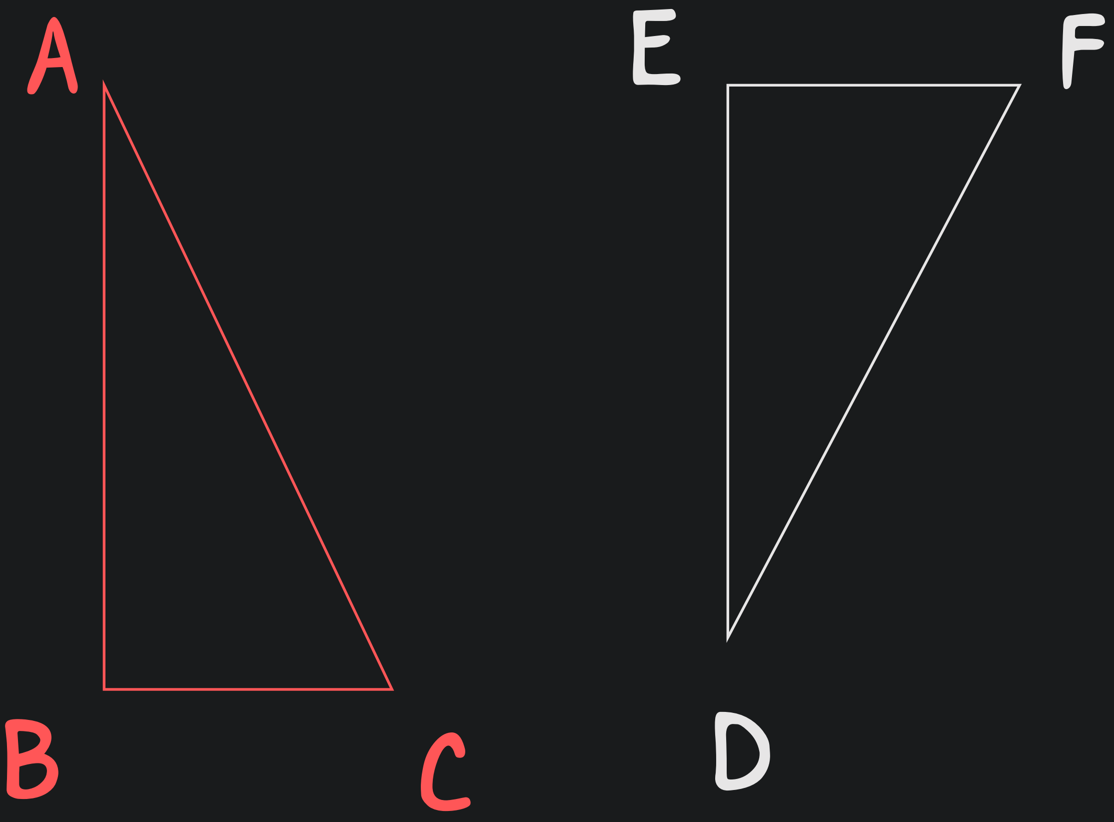
1-میانه : پاره خط مرسوم از یک راس مثلث که ضلع رو به رو را نصف می‌کند.

2-ارتفاع : پاره خط مرسوم از یک راس که بر ضلع رو به رو یا امتداد آن عمود است.

3-وتر (در مثلث قائم الزاویه) : ضلع رو به رو زاویه قائمه که بزرگترین ضلع نیز هست.

دو حالت خاص همنهشتی...

1-وتر و یک زاویه حاده (در صفحه بعد...)



$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle E = 90 \\ AC = DF \\ \angle A = \angle D \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

برهان در اسلاید بعد...

برهان ...

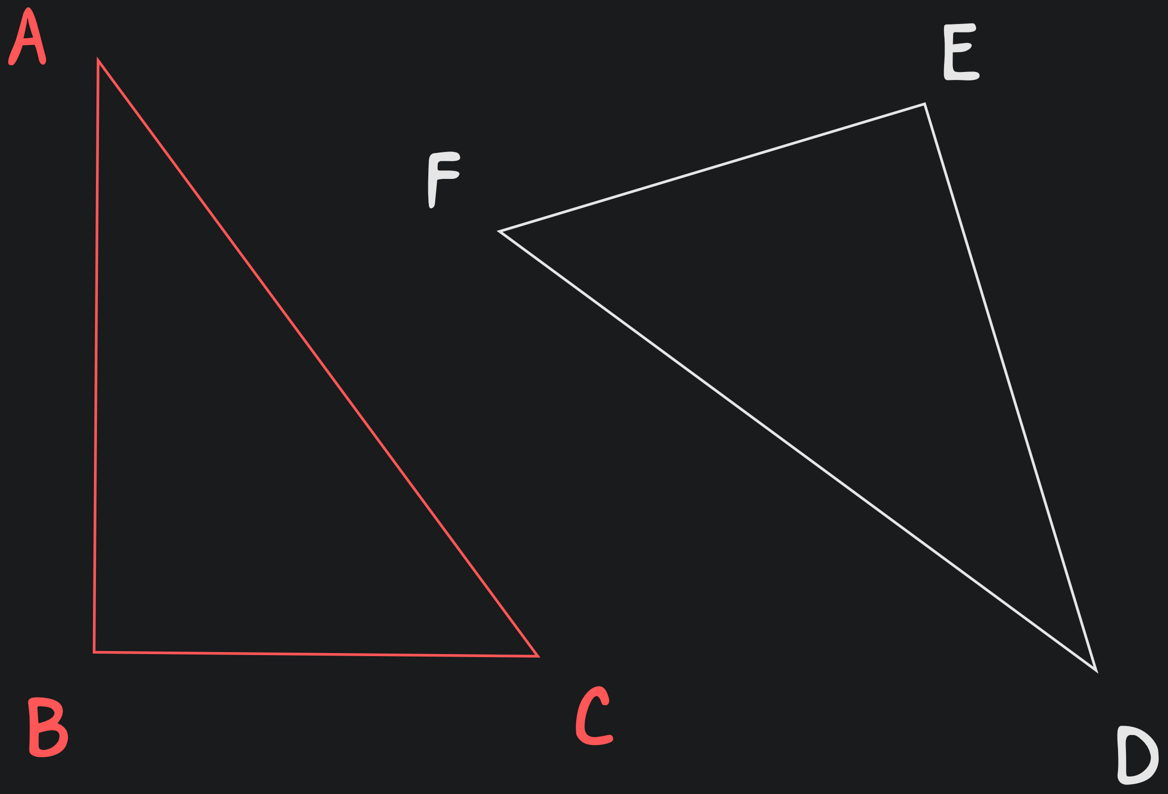
$$\angle A + \angle B + \angle C + = \angle D + \angle E + \angle F$$

$$\Longrightarrow \angle C = \angle F$$

$$\left[\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ AC = DF \\ \angle C = \angle F \end{array}\right. \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

(زضز)

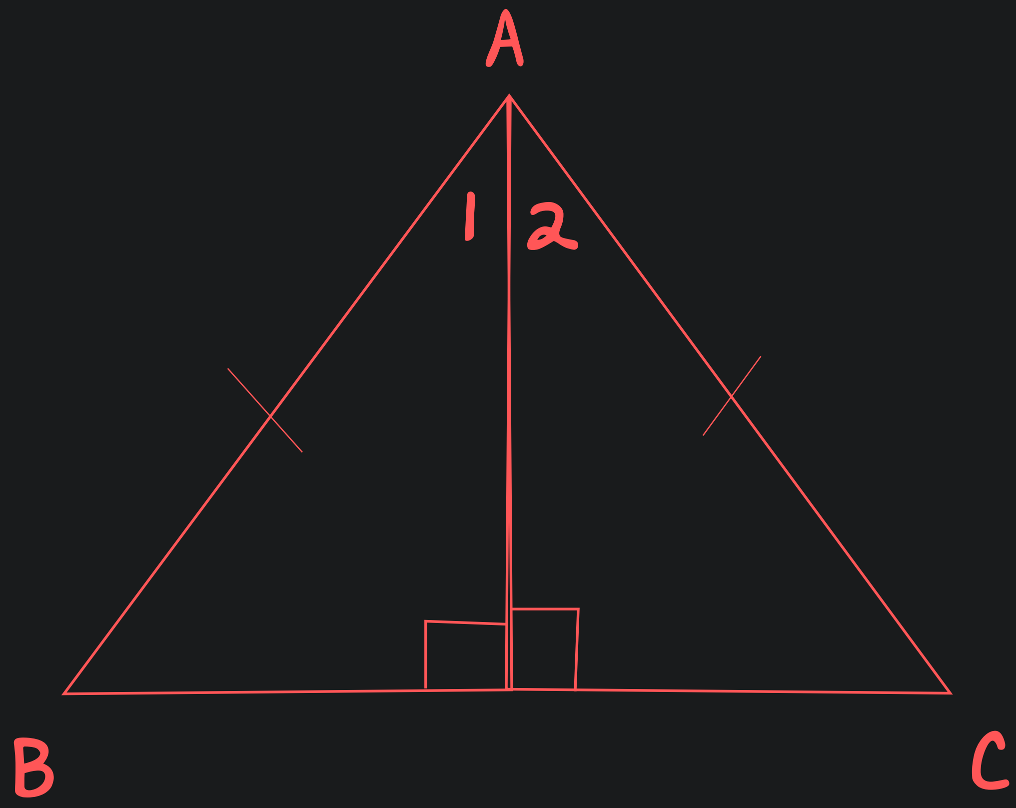
2- وتر و یک ضلع (در اسلاید بعد....)



$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle E = 90 \\ AC = DF \\ AB = ED \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

برهان:

ابتدا مثلث ها را از ضلع AB بر هم منطبق میکنیم. حال از آنجایی که مثلث $\triangle AFC$ متساوی الساقین است پس دو زاویه F و C برابرند و در نتیجه مشابه حالت قبلی A2,A1 برابر خواهند بود. (ادامه در اسلاید بعد ...)



$$\left\{\begin{array}{l} AF = AC \\ \angle A1 = \angle A2 \\ AB \text{ مشترک} \end{array}\right. \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle AFB$$

(ض ز ض)

تذکر : دقت کنید که دو حالت بالا تنها برای مثلث های قائم الزاویه برقرار است.

فصل 7: اصول اقلیدس

اصول اقلیدس:

1 -هر دو نقطه را می توان با یک خط راست به هم وصل کرد.

2 -هر خط راست متناهی را میتوان پیوسته به صورت خط راست امتداد داد.

3 -به هر مرکز و با هر شعاع، میتوان دایره ای رسم کرد.

4 -همهٔ زاویه های قائمه با یکدیگر برابرند.

5 -اگر خط راستی که بر دو خط راست فرود آید دو زاویهٔ درونی در یک طرف خود تشکیل دهد که مجموعشان از دو قائمه ۱۸۰° کمتر باشد، دو خط راست، اگر به طور نامتناهی امتداد داده شوند، یکدیگر را در طرفی تلاقی می‌کنند که در آن مجموع زاویه ها کمتر از دو قائمه است.

فصل 8: موازی مورب

قضیه (خطوط موازی مورب):

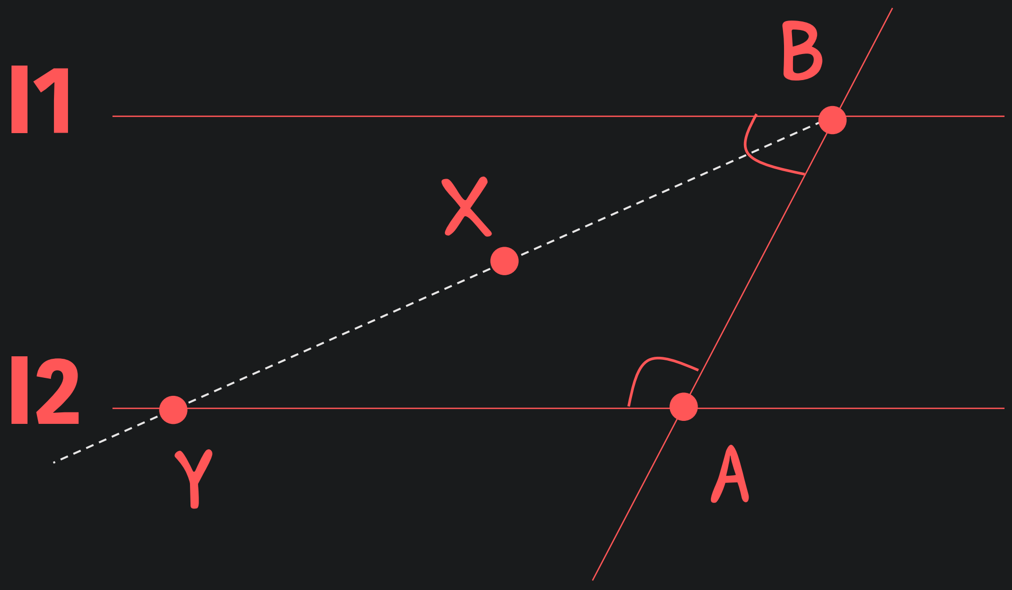
اگر خط مورب d دو خط موازی را قطع کند، زوایای متبادل درونی با یکدیگر برابرند.

برهان: میخواهیم ثابت کنیم:

$\angle B1 = \angle A1$

برایا این منظور، به برهان خلف فرض کنیم دو زاویه $\angle A1$ و $\angle B1$ برابر نباشند. بنابراین، یکی از آنها بزرگتر از دیگریست.

فرض کنیم $\angle B1$ از $\angle A1$ بزرگتر باشد. بنابراین به اندازه $\angle A1$ از $\angle B1$ جدا میکنیم و آن را $\angle XAB$ بنامیم .واضح است که نقطه X بر خط l1 واقع نیست. (شکل در صفحه بعد)



از طرفی میدانیم، از یک نقطه خارج از یک خط تنها یک خط موازی با آن میتوان ترسیم کرد. پس XB موازی با l2 نیست. حال فرض کنیم امتداد XB ، l2 را در Y قطع می‌کند. حال دقت کنید که زاویه A1 زاویه خارجی مثلث YAB است و طبق قضیه زاویه خارجی، زاویه YBA کوچکتر از A1 است که این متناقض با فرض است زیرا طبق فرض خلف زاویه YBA برابر با زاویه A1 است.

فصل 9: توان و جذر

توان : توان یک عملیات ریاضی است که به جهت اختصار و براي سهولت در نمایش ضرب مکرر اعداد بکار میرود. فرض کنیم x و n دو عدد صحیح باشند.

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times x \times \dots \times x}_{n}$$

x^n را x به توان n یا x به قوه n می‌خوانیم که در واقع، n مرتبه حاصل ضرب x در خودش است. بعلاوه، دقت کنید که هر عدد به توان صفر برابر با 1 است.

تذکر 1 : دقت کنید در عبارت x^n به x پایه و به n علاوه بر توان و قوه، نما نیز گفته می‌شود.

تذکر 2 : منظور از مربع یا مجذور یک عدد توان دوم آن عدد و منظور از مکعب یک عدد توان سوم آن عدد است. به عنوان مثال x^2 مربع x، و x^3 ، مکعب x است.