IMO 2014
Cape Town - South Africa

سه‌شنبه، ۱۷ تیر ۱۳۹۳

مسأله ۱. فرض کنید $a_۰ < a_۱ < a_۲ < \cdots$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی باشد. نشان دهید عدد صحیح یکتای $n \geq ۱$ وجود دارد به طوری که:

$$a_n < \frac{a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+۱}.$$

مسأله ۲. فرض کنید $n \geq ۲$ عددی صحیح است. یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ شامل $n^۲$ مربع واحد در نظر بگیرید. یک آرایش از n رخ در این صفحه را *صلح‌آمیز* می‌گوییم، اگر در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک رخ قرار داشته باشد. بزرگترین عدد طبیعی k را بیابید به صورتی که برای هر آرایش صلح‌آمیز n رخ، یک مربع $k \times k$ وجود داشته باشد که هیچ رخی در $k^۲$ خانه‌ی آن نباشد.

مسأله ۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم: $\angle ABC = \angle CDA = ۹۰^\circ$. نقطه‌ی H پای عمود وارد از A بر BD است. نقاط S و T به ترتیب روی اضلاع AB و AD قرار دارند، به طوری که H درون مثلث SCT قرار داشته باشد و

$$\angle CHS - \angle CSB = ۹۰^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = ۹۰^\circ.$$

نشان دهید که خط BD بر دایره‌ی محیطی مثلث TSH مماس است.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
بارم هر سؤال ۷ نمره است.

چهارشنبه، ۱۸ تیر ۱۳۹۳

مسأله ۴. نقاط P و Q به گونه‌ای روی ضلع BC از مثلث حادةالزاویه‌ی ABC قرار دارند که $\angle PAB = \angle BCA$ و $\angle CAQ = \angle ABC$. نقاط M و N به ترتیب روی خطوط AP و AQ قرار دارند به طوری که P وسط AM و Q وسط AN است. نشان دهید خطوط BM و CN همدیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند.

مسأله ۵. بانک کیپ‌تاون برای هر عدد طبیعی n، سکه‌هایی با ارزش $\frac{1}{n}$ ضرب می‌کند. اگر مجموعه‌ای متناهی از این سکه‌ها (با ارزش‌های نه لزوماً متفاوت) مجموعاً با ارزش حداکثر ۹۹ + $\frac{1}{2}$ داده شده باشد، ثابت کنید این مجموعه را می‌توان به تعداد حداکثر ۱۰۰ دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع ارزش سکه‌های هر دسته کمتر و یا مساوی ۱ باشد.

مسأله ۶. یک مجموعه از خطوط صفحه در *جایگاه عمومی* قرار دارد اگر هیچ دوتایی از آنها موازی نباشند و هیچ سه‌تایی در یک نقطه همرس نباشند. یک مجموعه از خطوط در جایگاه عمومی، صفحه را به تعدادی ناحیه افراز می‌کند که در این میان مساحت بعضی متناهی است؛ این ناحیه‌ها را *نواحی متناهی* می‌گوییم. نشان دهید برای هر عدد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ n، از هر مجموعه از n خط در جایگاه عمومی می‌توان حداقل $\sqrt{n}$ تا از خطوط را به رنگ آبی رنگ کرد، به گونه‌ای که مرز هیچ یک از نواحی متناهی کاملاً آبی نباشد.

توجه: برای اثبات کران $c\sqrt{n}$ به جای $\sqrt{n}$، نمره‌ای بسته به مقدار ثابت c تعلق می‌گیرد.

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه
بارم هر سؤال ۷ نمره است.