نمونه سؤالات امتحانی

فصل اول

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات(۴ نمره)

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی ــ مثال صفحه‌ی ۴ (هندسی) مسأله ۱ صفحه‌ی ۵ (حسابی) .... ۱ نمره

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری ــ مسایل صفحه‌ی ۱۰... ۱ نمره

بسط دو جمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۱۰.. ۱ – ۰/۷۵ نمره

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه و کوچک‌ترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها ــ مسایل صفحه‌ی ۱۵.. ۱ نمره

ماکزیمم و می‌نیمم توابع درجه‌ی ۲ و نمودار آن‌ها و ریشه‌ها ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۱۹ و مسایل صفحه‌ی ۲۴.................... ۱/۵ – ۱ نمره

معادلات گویا و گنگ ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۳۰ ــ مثال صفحه‌ی ۲۹.. ۱ نمره

حل معادله و نامعادله به روش هندسی ــ مسایل صفحه‌ی ۴۲ ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۴۲ ــ مثال صفحه‌ی ۴۲............................ ۱/۵ نمره

معادلات و نامعادلات قدرمطلقی ــ مسایل صفحه‌ی ۳۹ ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۴۰.. ۱ نمره

دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

حد جملات دنباله‌ی هندسی:

$$S=\frac{a}{1-q}$$

سؤال: **در دنباله‌ی حسابی ...,۳,۹,۱۵ حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا از ۳۰۰ بیشتر شود؟** **(دی ۹۳)**

پاسخ:

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)$$

$$S_n>300 \Rightarrow \frac{n}{2}\left(6+6(n-1)\right)>300 \Rightarrow 3n^2>300 \Rightarrow n^2>100 \Rightarrow n>10$$

سؤال: **در دنباله‌ی حسابی زیر، مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را بیابید.** **(شهریور ۹۲)**

$$-5,0,5,\dots$$

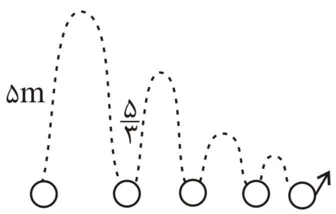
پاسخ:

$$S_n=\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right) \Rightarrow S_{20}=10(-10+19\times 5)=850$$

سؤال: **توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چه‌قدر مسافت طی می‌کند؟** **(فرداد ۹۰)**

پاسخ: ارتفاع توپ قبل از n اُمین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. در این صورت:

$$A_1=5,\ A_2=\frac{5}{3},\ A_3=\frac{5}{9},\dots$$



از طرفی مسافت طی‌شده توسط توپ بین دو برخورد متوالی، ۲ برابر ارتفاع آن از سطح زمین است.
بنابراین مسافت طی‌شده توسط توپ برابر است با:

$$S=10+\frac{10}{3}+\frac{10}{9}+\cdots \xrightarrow{S=\frac{a}{1-q}} S=\frac{10}{1-\frac{1}{3}}=15$$

بخش‌پذیری

سؤال: مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=2x^3-mx^2+2x+1$ بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد. (خرداد ۹۳)

پاسخ:

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-m\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}m-1+1=0 \Rightarrow m=-1$$

سؤال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=2x^4+mx+2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ را بیابید. (دی ۹۲)

پاسخ:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=2 \Rightarrow 2(-1)^4+m(-1)+2=2 \Rightarrow 2-m=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow P(x)=2x^4+2x+2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow R=P(1)=2(1)^4+2(1)+2=6$$

سؤال: $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط روبه‌رو صدق کند. (خرداد ۹۲)

$P(1)=1\ ,\ P(2)=3$

پاسخ: چون $P(x)$ چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ است، پس به صورت $P(x)=x^2+ax+b$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}P(1)=1+a+b=1\\P(2)=4+2a+b=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\2a+b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a-b=0\\2a+b=-1\end{cases} \Rightarrow a=-1, b=1 \Rightarrow P(x)=x^2-x+1$$

بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

جمله‌ی k ام در بسط دو جمله‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$a_k=\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

تذکر: $k-1$ هم در ضریب جمله‌ی k ام ظاهر می‌شود ($\binom{n}{k-1}$) و هم در توان b. هم‌چنین در هر جمله مجموع توان‌های a و b برابر n است.

سؤال: جمله‌ی سوم بسط $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ را بنویسید. (دی ۹۳)

پاسخ:

$$a=\binom{5}{2}x^3\left(\frac{2}{x}\right)^2=\frac{5\times 4}{2}x^3\left(\frac{4}{x^2}\right)=40x$$

تذکر: $\binom{n}{2}=\frac{n\times(n-1)}{2}$.

سؤال: حاصل عبارت $(x-2)^4$ را به دست آورید. (شهریور ۹۳)

پاسخ:

$$(x-۲)^۴ = x^۴ - \binom{۴}{۱}x^۳(۲) + \binom{۴}{۲}x^۲(۲)^۲ - \binom{۴}{۳}x(۲)^۳ + \binom{۴}{۴}(۲)^۴ = x^۴ - ۴x^۳(۲) + ۶x^۲(۴) - ۴x(۸) + ۱۶$$
$$= x^۴ - ۸x^۳ + ۲۴x^۲ - ۳۲x + ۱۶$$

تذکر: در $(a-b)^n$، جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند و جمله‌ی اول همواره مثبت است.

سؤال: جمله‌ی سوم از بسط $(۲x-۱)^۷$ برابر است با .... (شهریور ۹۲)

پاسخ:

$$a_۳ = \binom{۷}{۲}(۲x)^۵(-۱)^۲ = \frac{۷\times ۶}{۲}(۳۲x^۵) = ۶۷۲x^۵$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک

برای به دست آوردن ب.م.م چند عدد، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به عنوان ب.م.م محاسبه می‌کنیم.

برای به دست آوردن ک.م.م چند عدد، حاصل‌ضرب همه‌ی عوامل با توان بزرگ‌تر را محاسبه می‌کنیم.

برای به دست آوردن ب.م.م چندجمله‌ای‌ها، آن‌ها را تجزیه کرده، حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن ک.م.م چندجمله‌ای‌ها، آن‌ها را تجزیه کرده، حاصل‌ضرب همه‌ی عوامل با توان بزرگ‌تر را در نظر می‌گیریم.

سؤال: سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شود. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟ (شهریور ۹۳)

پاسخ: باید ک.م.م این اعداد را به دست آوریم:

$$۱۸ = ۲\times ۳^۲ \ ,\ ۲۴ = ۲^۳\times ۳ \ ,\ ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow \text{ک.م.م} = ۲^۵\times ۳^۲ = ۲۸۸$$

سؤال: ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید. (گنجایش شیشه‌ها را برحسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید.) (خرداد ۹۱)

پاسخ: برای به دست آوردن حداقل تعداد شیشه، باید حداکثر مقدار گنجایش شیشه‌ها را در نظر بگیریم. برای این کار ب.م.م اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۴۴ = ۳^۲\times ۲^۴ \ ,\ ۴۵ = ۳^۲\times ۵ \ ,\ ۶۳ = ۳^۲\times ۷ \Rightarrow \text{ب.م.م} = ۳^۲ = ۹$$

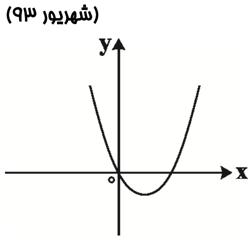
$$\text{تعداد شیشه‌ها} = \frac{۱۴۴}{۹} + \frac{۴۵}{۹} + \frac{۶۳}{۹} = ۱۶ + ۵ + ۷ = ۲۸$$

توابع درجه دوم

در نمودار تابع درجه دوم، اگر سهمی رو به بالا باشد، $a > ۰$ و اگر رو به پایین باشد $a < ۰$ است. همچنین محل برخورد نمودار با محور y، مقدار c را نشان می‌دهد. بنابراین اگر نمودار در قسمت مثبت محور yها را قطع کند، $c > ۰$ و اگر زیر محور xها نمودار را قطع کند، $c < ۰$ و اگر نمودار از مبدأ بگذرد، $c = ۰$ است. همچنین با توجه به طول رأس سهمی و علامت a، می‌توان علامت b را تعیین کرد. توجه کنید که مختصات طول رأس سهمی از رابطه‌ی $x = -\frac{b}{۲a}$ به دست می‌آید.

سؤال: شکل زیر نمودار تابع $P(x) = ax^۲ + bx + c$ است. (شهریور ۹۳)

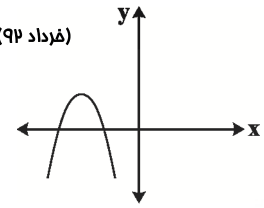
الف) علامت a و b را تعیین کنید.



ب) مقدار c را بیابید.

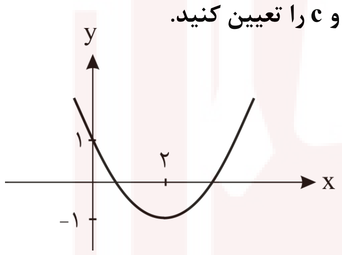
پاسخ: سهمی رو به بالاست، پس $a > ۰$، طول رأس سهمی مثبت است پس $-\frac{b}{۲a} > ۰$ است و چون $a > ۰$، پس $b < ۰$ است. سهمی از مبدأ می‌گذرد، پس $c = ۰$.

سؤال: **در شکل زیر سهمی به معادله‌ی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ را تعیین کنید.** **(خرداد ۹۲)**



پاسخ: سهمی رو به پایین است، پس $a < ۰$، طول رأس سهمی منفی است پس $-\frac{b}{۲a} < ۰$ و چون $a < ۰$ است، پس $b < ۰$ باید باشد. سهمی در پایین محور xها، محور yها را قطع می‌کند، پس $c < ۰$. هم‌چنین تعداد جواب‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$، برابر تعداد نقاط برخورد نمودار با محور xها است که در این‌جا ۲ است.

سؤال: **در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را تعیین کنید.**



پاسخ: با توجه به نمودار، سهمی از نقاط $(۲,-۱)$ و $(۰,۱)$ گذشته و رأس آن برابر ۲ می‌باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{cases} P(۰) = ۱ \Rightarrow c = ۱ \\ P(۲) = -۱ \xrightarrow{c=۱} ۴a + ۲b + ۱ = -۱ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۲ \\ x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = ۲ \Rightarrow -b = ۴a \end{cases}\right\} \Rightarrow -b + ۲b = -۲ \Rightarrow b = -۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، در این صورت حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a}$ می‌باشد.

هم‌چنین اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را داشته باشیم، معادله‌ای که ریشه‌های آن α و β باشد، به صورت روبه‌رو می‌باشد: $x^۲ - Sx + P = ۰$

سؤال: **اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۴x^۲ - ۵x - ۵ = ۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن ۲α و ۲β باشد.** **(دی ۹۳)**

پاسخ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۵}{۴} \\ \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha + \beta) = ۲ \times \frac{۵}{۴} = \frac{۵}{۲} \\ P = ۲\alpha \times ۲\beta = ۴(\alpha\beta) = ۴\left(-\frac{۵}{۴}\right) = -۵ \end{cases}$$

معادله‌ی جدید : $x^{2}-Sx+P=0 \Rightarrow x^{2}-\frac{5}{2}x-5=0$

سؤال: در معادله‌ی $2x^{2}-8x+m=0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید. **(دی ۹۲)**

پاسخ:

$$\alpha=\beta+2\ ,\ S=-\frac{b}{a}=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow \alpha+\beta=4 \Rightarrow \beta+2+\beta=4 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow \alpha=3$$

$$P=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha.\beta=\frac{m}{2} \Rightarrow 3=\frac{m}{2} \Rightarrow m=6$$

سؤال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید. **(خرداد ۹۳)**

پاسخ: معادله‌ی درجه دومی می‌یابیم که جواب‌هایش طول و عرض مستطیل باشد:

$$\left.\begin{array}{l}2(\alpha+\beta)=18 \Rightarrow \alpha+\beta=9\\ \alpha\beta=14\end{array}\right\} \Rightarrow x^{2}-Sx+P=0 \Rightarrow x^{2}-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=7$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۷ و عرض آن برابر ۲ است.

سؤال: اگر جمع دو عدد $\frac{3}{5}$ و حاصل‌ضرب‌شان $-\frac{2}{5}$ باشد، آن دو عدد را بیابید. **(خرداد ۹۲ خارج از کشور)**

پاسخ:

$$S=\alpha+\beta=\frac{3}{5}\ ,\ P=\alpha.\beta=-\frac{2}{5}$$

$$x^{2}-Sx+P=0 \Rightarrow x^{2}-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}=0 \Rightarrow 5x^{2}-3x-2=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\frac{c}{a}=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

تذکر: اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$، مجموع ضرایب برابر صفر باشد، یعنی $a+b+c=0$، یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است و اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها برابر -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم

تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ در حالت $a>0$ به کم‌ترین مقدار و در حالت $a<0$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

سؤال: اگر با ۱۰۰ متر نرده بخواهیم یک زمین مستطیل شکل را محصور کنیم، بیشترین مساحت ممکن چه‌قدر است؟ **(خرداد ۹۰ خارج از کشور)**

پاسخ:

$$2(x+y)=100 \Rightarrow x+y=50 \Rightarrow y=50-x$$

$$S=xy=x(50-x) \Rightarrow S(x)=50x-x^{2} \Rightarrow x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-50}{-2}=25 \Rightarrow S_{max}=S(25)=50(25)-25^{2}=625$$

سؤال: بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^{2}+4x+1$ را تعیین کنید. **(دی ۹۰)**

پاسخ:

$$x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=\frac{-4}{-2}=2 \Rightarrow y_{max}=f(2)=-4+8+1=5$$

قدرمطلق

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

سؤال: با فرض آن که a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید: $|ab| = |a||b|$. (دی ۹۱)

پاسخ:

$$|ab| = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a|.|b|$$

سؤال: برای هر دو عدد حقیقی ثابت کنید: $|a+b| \le |a| + |b|$ (خرداد ۹۰)

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{array}\right\} \Rightarrow -(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|) \Rightarrow |a+b| \le |a|+|b|$$

حل معادله و نامعادله به روش جبری

سؤال: معادله‌ی $(x^2-1)^4 + (x^2-1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید. (شهریور ۹۲)

پاسخ: از تغییر متغیر $t = (x^2-1)^2$ استفاده می‌کنیم:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Rightarrow t = -2 , t = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-1)^2 = -2 & \text{جواب ندارد} \\ (x^2-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

سؤال: جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید. (دی ۹۳)

الف) جواب‌های معادله‌ی $|x+1| = 4$ برابر با .... و .... است.

ب) مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|2x-1| \le 7$ بازه‌ی .... است.

پاسخ:

الف) $|x+1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ x+1 = -4 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$

ب) $|2x-1| \le 7 \Rightarrow -7 \le 2x-1 \le 7 \Rightarrow -6 \le 2x \le 8 \Rightarrow -3 \le x \le 4 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-3,4]$

سؤال: معادله‌ی $\big||x|-2\big| = 3$ را حل کنید. (شهریور ۹۳)

پاسخ:

$$\big||x|-2\big| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2 = 3 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ |x|-2 = -3 \Rightarrow |x| = -1 & \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

سؤال: جواب معادله‌ی $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر .... می‌باشد. (خرداد ۹۳)

پاسخ:

$$\sqrt{2-x^2} = x \Rightarrow 2-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های معادله را در پایان در معادله قرار می‌دهیم تا جواب‌های قابل قبول مشخص شود.

سؤال: مجموعه جواب معادله‌ی $x+\sqrt{x}=۶$ برابر است با .... (خرداد ۹۲)

پاسخ:

$$x+\sqrt{x}=۶ \Rightarrow \sqrt{x}=۶-x \Rightarrow x=۳۶+x^۲-۱۲x \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ & \text{قابل قبول} \\ x=۹ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

تذکر: با جای‌گذاری جواب‌ها در معادله جواب‌های قابل قبول را مشخص کرده‌ایم.

سؤال: نامعادله‌ی زیر را به روش جبری حل کنید. (خرداد ۹۲ خارج از کشور)

$$\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\le ۱$$

پاسخ:

$$\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\le ۱ \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x^۲-x}-\frac{x^۲}{x^۲-x}\le ۱ \Rightarrow \frac{-۱}{x^۲-x}\le ۱ \Rightarrow ۱+\frac{۱}{x^۲-x}\ge ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-x+۱}{x^۲-x}\ge ۰$$

x		۰		۱	
$x^۲-x+۱$	+		+		+
$x^۲-x$	+	۰	−	۰	+
$\frac{x^۲-x+۱}{x^۲-x}$	+	ت ن	−	ت ن	+

$$\Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۱ \Rightarrow \text{مجموعه جواب } (-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$$

تذکر: Δ در عبارت $x^۲-x+۱$ منفی است. بنابراین این عبارت ریشه ندارد و علامت آن همواره موافق علامت ضریب $x^۲$ یعنی مثبت است.

سؤال: معادله‌ی $\sqrt{۲x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۴}$ را حل کنید. (خرداد ۹۱ خارج از کشور)

پاسخ:

$$\sqrt{۲x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۴} \Rightarrow ۲x+۱=۱+۲x-۴+۲\sqrt{۲x-۴} \Rightarrow ۴=۲\sqrt{۲x-۴} \Rightarrow \sqrt{۲x-۴}=۲ \Rightarrow ۲x-۴=۴ \Rightarrow ۲x=۸$$
$$\Rightarrow x=۴ \quad \text{قابل قبول}$$

سؤال: جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲x-۲}=۰$ را به دست آورید. (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

پاسخ:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}=\sqrt{۲x-۲} \Rightarrow x+\sqrt{x-۲}=۲x-۲ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=x-۲ \Rightarrow x-۲=(x-۲)^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲-(x-۲)=۰$$
$$\Rightarrow (x-۲)(x-۲-۱)=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ & \text{قابل قبول} \\ x=۲ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

رسم نمودار

نمودار خطی: برای رسم یک خط، کافی است دو نقطه از تابع را به دست آورده و آن‌ها را به هم وصل و امتداد دهیم.

نمودار سهمی: برای رسم سهمی ابتدا طول رأس سهمی یعنی $x=-\frac{b}{۲a}$ را به دست می‌آوریم. سپس ۲ نقطه با طول کم‌تر و بیشتر از رأس را به تابع می‌دهیم و تابع را به کمک این ۵ نقطه رسم می‌کنیم. (البته به کمک ۳ نقطه (یعنی رأس، یک نقطه با طول کم‌تر از ریشه و یک نقطه با طول بیشتر از ریشه) نیز می‌توان نمودار را رسم کرد ولی با ۵ نقطه دقیق‌تر رسم می‌شود.)

نمودار توابع قدرمطلقی: برای رسم توابع قدرمطلقی، ابتدا به کمک ریشه‌های درون قدرمطلق و جدول تعیین علامت، تابع را چندضابطه‌ای می‌کنیم و سپس آن را رسم می‌کنیم. (البته در شرایطی می‌توان به کمک انتقال تابع $y=|x|$ نیز تابع را رسم کرد.)

نمودار توابع رادیکالی: در توابع رادیکالی ابتدا به x ریشه عبارت زیر رادیکال را می‌دهیم تا عبارت زیر رادیکال صفر شود. سپس به x مقادیری می‌دهیم که عبارت زیر رادیکال مجذورهای کامل ۱و ۴ شود. در ادامه به کمک این نقاط نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

نمودار توابع چندضابطه‌ای: در توابع چندضابطه‌ای، هر ضابطه را در محدوده‌ی داده‌شده رسم می‌کنیم. دقت کنید که حتماً نقطه‌ی مرزی جزء نقاطی است که به کمک آن‌ها تابع را رسم می‌کنیم. اگر این نقطه داخل ناحیه باشد، آن را توپر و اگر در ناحیه نباشد، آن را توخالی رسم می‌کنیم. (به سوالات بعدی توجه کنید.)

حل معادله و نامعادله به روش هندسی

برای حل معادله و نامعادله به روش هندسی، نمودارهای مربوط به توابع دو طرف معادله یا نامعادله را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودارها و موقعیت توابع نسبت به هم، معادله یا نامعادله را حل می‌کنیم.

تذکر: در معادلات، نقاط برخورد دو نمودار جواب‌های معادله می‌باشند.

سؤال: معادله‌ی $x+\frac{x}{|x|}=۳$ را به روش هندسی حل کنید. **(خرداد ۹۳)**

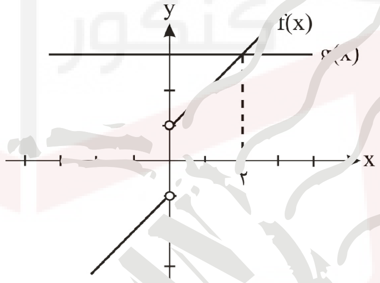
پاسخ:

$$f(x)=x+\frac{x}{|x|}=\begin{cases} x+۱ & x>۰ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$$

x	۰	۱
y	۱	۲

x	۰	−۱
y	−۱	−۲

$g(x)=۳$



با توجه به نمودار جواب معادله $x=۲$ می‌باشد.

سؤال: معادله‌ی $\sqrt{x+۱}=x^۲+۲x+۱$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید. **(دی ۹۲)**

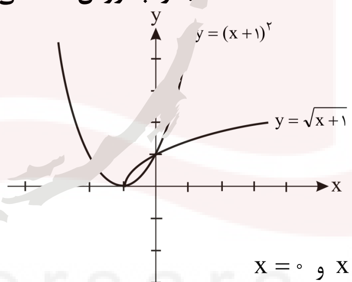
پاسخ:

$f(x)=\sqrt{x+۱}$

x	−۱	۰	۳
y	۰	۱	۲

$g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$

x	−۳	−۲	−۱ (رأس)	[illegible]	۱
y	۴	۱	۰	۱	۴



جواب‌های معادله: $x=-۱$ و $x=۰$

تذکر: در تابع $y=(x-\alpha)^۲$، ریشه پرانتز یعنی $x=\alpha$ طول رأس سهمی می‌باشد.

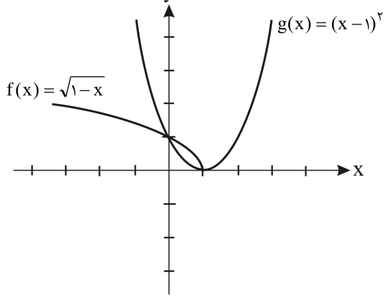
سؤال: $\sqrt{۱-x}-۱=x^۲-۲x$ را به روش هندسی حل کنید. **(خرداد ۹۱)**

پاسخ:

$$\sqrt{۱-x}-۱=x^۲-۲x \Rightarrow \sqrt{۱-x}=x^۲-۲x+۱$$

$g(x)=x^۲-۲x+۱=(x-۱)^۲$

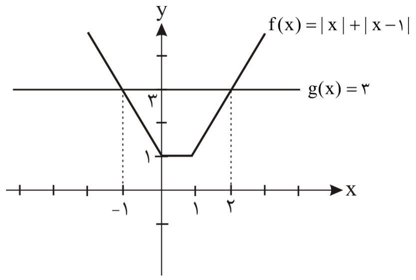
x	−۱	۰	۱ (رأس)	۲	۳
y	۴	۱	۰	۱	۴



جواب‌های معادله: $x=۱$ و $x=۰$

سؤال: نامعادله‌ی $۳ \le |x-۱| + |x|$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۲)

پاسخ:



$$f(x)=|x|+|x-۱|=\begin{cases} x+x-۱=۲x-۱ & x>۱ \\ x+۱-x=۱ & ۰\le x\le ۱ \\ -x+۱-x=-۲x+۱ & x<۰ \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۱	۳

x	۰	۱
y	۱	۱

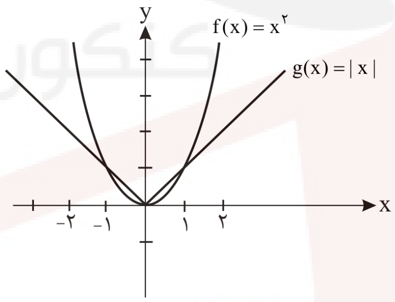
x	۰	−۱
y	۱	۳

$g(x)=۳$

طول نقاط برخورد $x=-۱$ و $x=۲$ می‌باشد و در بازه‌ی $[-۱,۲]$، $f(x)$ زیر $g(x)$ قرار دارد و یا با آن مساوی است. پس در این بازه کم‌تر یا مساوی $g(x)$ می‌باشد و بنابراین جواب نامعادله بازه‌ی $[-۱,۲]$ می‌باشد.

سؤال: نامعادله‌ی $|x| \le x^۲$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۱)

پاسخ:



$f(x)=x^۲$

			رأس		
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴

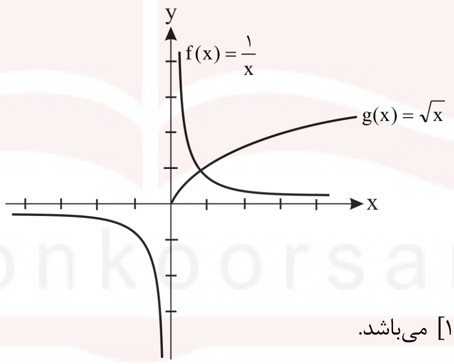
$g(x)=|x|$

		ریشه	
x	−۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

در بازه‌ی $[-۱,۱]$ نمودار $g(x)=|x|$ پایین‌تر یا مساوی نمودار $y_۲$ قرار دارد. بنابراین مجموعه جواب نامعادله‌ی $[-۱,۱]$ است.

سؤال: نامعادله‌ی $\sqrt{x} \le \frac{۱}{x}$ را به روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب را به دست آورید. (شهریور ۹۰)

پاسخ:



$f(x)=\frac{۱}{x}$

$g(x)=\sqrt{x}$

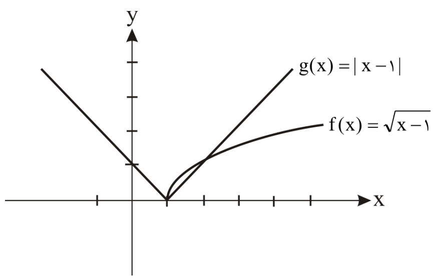
x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

با توجه به نمودار، مجموعه جواب $[۱,+\infty)$ می‌باشد.

تذکر: تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در کتاب درسی حسابان صفحه‌ی ۳۸ آمده است با دادن نقاط مثبت و منفی آن را رسم می‌کنیم.

سؤال: نامعادله‌ی $\sqrt{x-۱} \le |x-۱|$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۰)

پاسخ:



$f(x)=\sqrt{x-۱}$

x	۱	۲	۵
y	۰	۱	۲

$g(x)=|x-۱|$

		ریشه	
x	۰	۱	۱
y	۱	۰	۱

همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، تابع $|x-۱|$ در بازه‌ی $(۲,+\infty)$ بالاتر از $\sqrt{x-۱}$ است و در دو نقطه به طول‌های $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$، با آن برخورد دارد. پس جواب نامعادله $\{۱\}\cup(۲,+\infty]$ می‌باشد.

فصل دوم

تابع ۴ نمره

چند اتحاد مهم

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots + 1) \quad (\text{فرد } n)$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

سؤال: به کمک اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید. (دی ۹۱)

$$A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}$$

پاسخ:

$$A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g زمانی با هم برابرند که:

۱- دامنه‌هایشان برابر باشند.

۲- ضابطه‌های یکسان داشته باشند.

سؤال: آیا دو تابع زیر با هم مساوی‌اند؟ چرا؟ (خرداد ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad , \quad g(x) = x + 5$$

پاسخ: خیر، زیرا $f(6) = 5$ ولی $g(6) = 6 + 5 = 11$.

سؤال: آیا دو تابع $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟ (دی ۹۰)

پاسخ: بله، زیرا:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 \geq 0 & \text{همواره برقرار} \\ 1+\sqrt{1+x^2} \neq 0 & \text{همواره برقرار} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

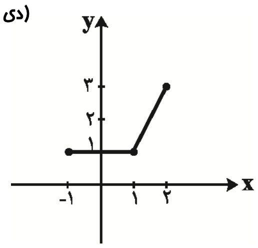
$$g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 0 \quad \text{همواره برقرار} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2(1-\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)} = \frac{x^2(1-\sqrt{1+x^2})}{-x^2} = \sqrt{1+x^2} - 1 = g(x)$$

بنابراین دو تابع با هم مساوی‌اند.

پیدا کردن ضابطه‌ی یک تابع چندضابطه‌ای به کمک نمودار

سؤال: **ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید.** (دی ۹۳)



پاسخ: تابع داده شده از دو قسمت تشکیل شده که در بازه‌ی $[-۱,۱]$ مقدار ثابت ۱ دارد و در بازه‌ی $[۱,۲]$ قسمتی از خط است که از دو نقطه‌ی $A(۱,۱)$ و $B(۲,۳)$ می‌گذرد. با استفاده از این دو نقطه، معادله خط این قسمت را می‌نویسیم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\ \Rightarrow\ y-۱=۲(x-۱)\ \Rightarrow\ y=۲x-۱$$

بنابراین ضابطه این تابع که تابعی چندضابطه‌ای است، به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۱ & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

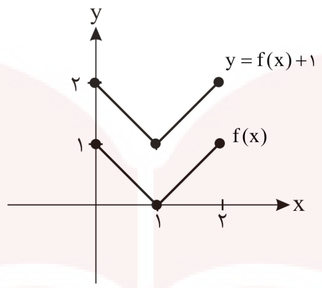
تذکر: دقت کنید که تابع در هر دو ضابطه در $x=۱$ مقدار یکسان دارد. پس ایرادی ندارد که ۱ در هر دو ضابطه مساوی داشته باشد.

سؤال: **ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۱|$ را با دامنه‌ی $[۰,۲]$ رسم کنید. سپس نمودار $y=f(x)+۱$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.** (شهریور ۹۳)

پاسخ:

$f(x)=|x-۱|$

x	۰	۱ (ریشه)	۲
y	۱	۰	۱



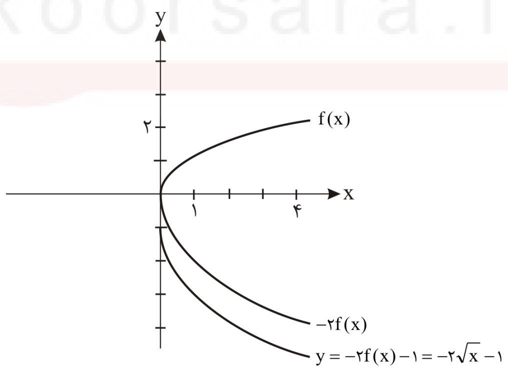
با توجه به نمودار y، برد تابع بازه‌ی $[۱,۲]$ می‌باشد.

سؤال: **ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-۲f(x)-۱$ را رسم کنید.** (خرداد ۹۲)

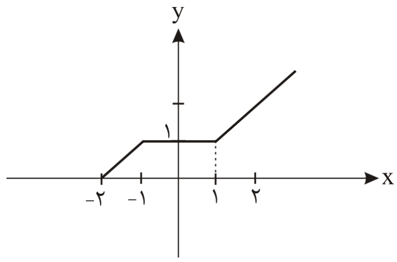
پاسخ:

$f(x)=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲

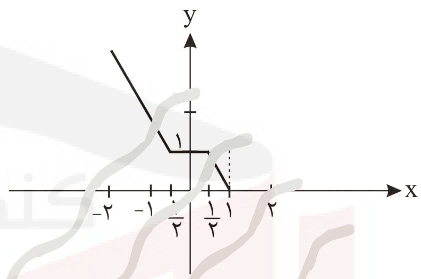


سؤال: **نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. با استفاده از آن نمودار $g(x)=f(-۲x)$ را رسم کنید.** (خرداد ۹۲ خارج از کشور)

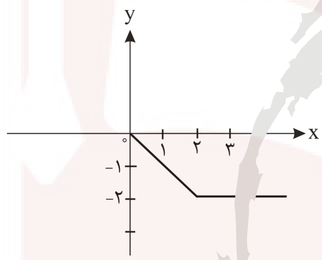


پاسخ: ابتدا نقاط مشخص تابع را در نظر می‌گیریم. یعنی نقاط: $(۲,۲)$، $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$ و $(-۲,۰)$، البته نقطه‌ی $(۲,۲)$ را خودمان در نظر گرفتیم!
حال طول این نقاط را به ترتیب برابر $-۲x$ قرار می‌دهیم و xهای جدید هرکدام که مربوط به تابع g می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$-۲=-۲x \Rightarrow x=۱ \Rightarrow g(۱)=f(-۲)=۰$$
$$-۱=-۲x \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(\frac{۱}{۲})=f(-۱)=۱$$
$$۱=-۲x \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(-\frac{۱}{۲})=f(۱)=۱$$
$$۲=-۲x \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow g(-۱)=f(۲)=۲$$

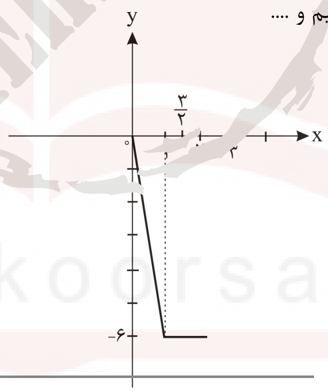


سؤال: **با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=۳f(۲x)$ را رسم کنید.** (خرداد ۹۱ خارج از کشور)



پاسخ: ابتدا نقاط مشخص تابع را در نظر می‌گیریم: $(۳,-۲)$، $(۲,-۲)$ و $(۰,۰)$
حال طول این نقاط را برابر $۲x$ قرار می‌دهیم و ....

$$۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow g(۰)=۳f(۰)=۰$$
$$۲x=۲ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow g(۱)=۳f(۲)=۳\times(-۲)=-۶$$
$$۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow g(\frac{۳}{۲})=۳f(۳)=-۶$$



اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه‌ی A تعریف شده‌اند، توابع $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$
$$D_{f-g}=D_f\cap D_g$$
$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$

برای دو تابع f و g، ترکیب دو تابع f و g به صورت fog به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

تذکر: با توجه به این که $(fog)(x)=f\big(g(x)\big)$ و در این رابطه $g(x)$ دیده می‌شود، پس باید $x\in D_g$ باشد و چون $f\big(g(x)\big)$ داریم، پس باید $g(x)\in D_f$ باشد.

سؤال: **اگر $f(x)=\frac{۱}{x}-۱$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۲}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof را تعیین کنید.** (دی ۹۳)

پاسخ: از آن‌جا که $(gof)(x)=g\big(f(x)\big)$، پس:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$$
$$\Rightarrow\ D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\,|\,\frac{۱}{x}-۱\neq-۲\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\,|\,x\neq-۱\}=\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$$

سؤال: **دو تابع $f=\{(۱,۳),(-۲,۵),(۰,۷),(۳,-۴)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۳,۱),(۰,۰),(۵,-۲)\}$ را در نظر بگیرید.** (شهریور ۹۳)

الف) تابع $f\times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) مقدار $fog(۰)$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف) $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\{۱,۳,۰\}$

$f\times g=\{(۱,۱۲),(۳,-۴),(۰,۰)\}$

ب) $fog(۰)=f\big(g(۰)\big)=f(۰)=۷$

سؤال: **اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$.** (خرداد ۹۳)

پاسخ:

$$fog(x)=f\big(g(x)\big)=g^۲(x)+۲g(x)+۲=x^۲-۴x+۵\ \Rightarrow\ g^۲(x)+۲g(x)+۱=x^۲-۴x+۴\ \Rightarrow\ \big(g(x)+۱\big)^۲=(x-۲)^۲$$
$$\Rightarrow\ g(x)+۱=\pm(x-۲)\ \Rightarrow\ g(x)=\pm(x-۲)-۱\ \Rightarrow\ g(x)=x-۳\ \text{یا}\ g(x)=-x+۱$$

دو تابع با این شرایط وجود دارد.

سؤال: **دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x+۴}$ را در نظر بگیرید.** (خرداد ۹۳)

الف) مقدار $(f+g)(۰)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) $(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=-\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}$

ب) $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{۲\}\ ,\ D_g=[-۴,+\infty)\ ,\ g(x)=۰\ \Rightarrow\ x=-۴$

$$\Rightarrow\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۲\}\cap[-۴,+\infty)-\{-۴\}=(-۴,+\infty)-\{۲\}$$

سؤال: دو تابع $f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید. (دی ۹۲)

الف) دامنه‌ی تابع gof را بدون محاسبه‌ی $(gof)(x)$ را به دست آورید.

ب) ضابطه‌ی gof را به دست آورید.

ج) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[-2,+\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-1\ge -2\}=[-1,+\infty)$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1+2}=\sqrt{x+1}$

ج) $(\frac{f}{g})(2)=\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{1}{2}$

سؤال: اگر $f=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ و $g=\{(1,2),(3,5)\}$ دو تابع باشند: (شهریور ۹۲)

الف) تابع $f+g$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.

ب) مقدار $(gof)(3)$ را بیابید.

پاسخ:

الف) $D_{f+g}=\{1,3\}\ ,\ f+g=\{(1,3),(3,8)\}$

ب) $(gof)(3)=g(f(3))=g(3)=5$

سؤال: اگر $f(x)=\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x-3}$ دو تابع باشند: (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

پاسخ:

الف) $3(f-g)(4)=3(f(4)-g(4))=3\left(\frac{1}{3}-1\right)=-2$

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}\ ,\ D_g=[3,+\infty)\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in[3,+\infty)\mid \sqrt{x-3}\ne 1\}=\{x\in[3,+\infty)\mid x\ne 4\}=[3,+\infty)-\{4\}$

سؤال: الف) اگر $f=\{(-1,2),(1,5),(3,-1),(0,3)\}$ و $g=\{(-2,5),(3,2),(4,6),(0,2),(-1,0)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ را با اعضا بنویسید.

ب) اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید. (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

پاسخ:

الف) $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\{-1,3,0\}-\{-1\}=\{3,0\}$

$\frac{f}{g}=\{(3,\frac{-1}{2}),(0,\frac{3}{2})\}$

ب) $f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+۱}=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۲} \Rightarrow x^۲g(x)+۲g(x)=x^۲g(x)-g(x)+x^۲-۱ \Rightarrow ۳g(x)=x^۲-۱ \Rightarrow g(x)=\frac{x^۲-۱}{۳}$

توابع زوج و فرد

برای تعیین زوج یا فرد بودن تابع، دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:

۱- دامنه متقارن باشد.

۲- $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم. اگر با $f(x)$ برابر باشد، تابع زوج و اگر با $-f(x)$ برابر باشد، تابع فرد است و در غیر این صورت تابع نه زوج و نه فرد است.

تذکر: توابع زوج نسبت به محور yها متقارن‌اند و توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات.

سؤال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\frac{x^۳-۳x}{۲x^۸+x^۲}$ را مشخص کنید. **(دی ۹۳)**

پاسخ:

دامنه متقارن است. $۲x^۸+x^۲\neq ۰ \Rightarrow x^۲(\underbrace{۲x^۶+۱}_{\text{همواره مثبت}})\neq ۰ \Rightarrow x^۲\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰\}$

$$f(-x)=\frac{(-x)^۳-۳(-x)}{۲(-x)^۸+(-x)^۲}=\frac{-x^۳+۳x}{۲x^۸+x^۲}=-\frac{x^۳-۳x}{۲x^۸+x^۲}=-f(x)$$

بنابراین تابع فرد است.

سؤال: زوج یا فرد بودن توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است را مشخص کنید. **(خرداد ۹۳)**

(ب) (الف)

پاسخ: تابع (الف) نسبت به محور yها متقارن است، پس تابعی زوج است و تابع (ب) نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس تابعی فرد می‌باشد.

سؤال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=x^۲+\cos x$ را معلوم کنید. **(دی ۹۱)**

پاسخ:

متقارن است. $D_f=\mathbb{R}$

$$f(-x)=(-x)^۲+\cos(-x)=x^۲+\cos x=f(x)$$

پس تابع f زوج می‌باشد.

سؤال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=x\sqrt{۲۷-۳x^۲}$ را معلوم کنید. **(دی ۸۹)**

پاسخ:

$۲۷-۳x^۲\geq ۰ \Rightarrow ۹-x^۲\geq ۰$,

x		-۳		۳	
$۹-x^۲$	$-$		$+$		$-$

$\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳ \Rightarrow D=[-۳,۳]$ متقارن

$$f(-x)=(-x)\sqrt{۲۷-۳(-x)^۲}=-x\sqrt{۲۷-۳x^۲}=-f(x)$$

پس تابع فرد است.

سؤال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=|x|+\sin^۲ x$ را بررسی کنید. (خرداد ۹۲ خارج از کشور)

پاسخ:

$D=\mathbb{R}$ متقارن

$$f(-x)=|-x|+\sin^۲(-x)=|x|+(-\sin x)^۲=|x|+\sin^۲ x=f(x)$$

پس تابع زوج است.

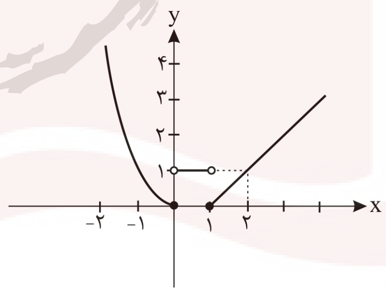
توابع صعودی و نزولی

- تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه‌ی f که $x_۱<x_۲$ باشد، داشته باشیم $f(x_۱)\le f(x_۲)$ و آن را صعودی اکید نامیم هرگاه $f(x_۱)<f(x_۲)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی نامیم، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه‌ی f که $x_۱<x_۲$ باشد، داشته باشیم $f(x_۲)\le f(x_۱)$ و آن را نزولی اکید گوییم هرگاه $f(x_۲)<f(x_۱)$.
- تابع $f(x)$ را ثابت نامیم، هرگاه برای هر دو عضو $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه‌ی f، داشته باشیم $f(x_۱)=f(x_۲)$.

سؤال: ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ ۱ & ۰\le x\le ۱ \\ x-۱ & x>۱ \end{cases}$$

پاسخ:



$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ ۱ & ۰\le x\le ۱ \\ x-۱ & x>۱ \end{cases}$$

x	−۲	−۱	۰ (رأس)
y	۴	۱	۰

x	۱	۲
y	۰	۱

در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید، در بازه‌ی $[۰,۱]$ ثابت، در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ صعودی اکید.

تذکر: در رسم تابع $x^۲$ بعد از ریشه چون در ناحیه $x<۰$ نیست، نقطه نمی‌دهیم.

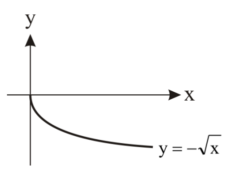
سؤال: تابع $f(x)=-\sqrt{x}$ .... است. (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

الف) صعودی **ب) نزولی**

پاسخ:

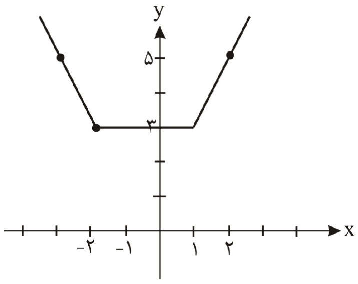
$$x_۱,x_۲\ge ۰\ ,\ x_۱<x_۲ \Rightarrow \sqrt{x_۱}<\sqrt{x_۲} \Rightarrow -\sqrt{x_۱}>-\sqrt{x_۲} \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

بنابراین تابع نزولی است. با توجه به شکل نیز این مطلب واضح است.



سؤال: با رسم نمودار $y = |x+2| + |x-1|$ مشخص کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ (خرداد ۹۱ خارج از کشور)

پاسخ:



$$y = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} x+2+x-1 = 2x+1 & x > 1 \\ x+2+1-x = 3 & -2 \le x \le 1 \\ -x-2+1-x = -2x-1 & x < -2 \end{cases}$$

در بازه‌ی $(-\infty,-2]$ نزولی اکید ولی در بازه‌ی $(-\infty,1]$ نزولی است. در بازه‌ی $[-2,1]$ ثابت است. در بازه‌ی $[1,+\infty)$ صعودی اکید ولی در بازه‌ی $[-2,+\infty)$ صعودی است.

تذکر: تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر

شرط وارون‌پذیری یک تابع (یعنی تابعی که وارونش نیز تابع باشد)، یک‌به‌یک بودن آن است. برای بررسی یک‌به‌یک بودن تابع از $y_1 = y_2$ شروع می‌کنیم. اگر به $x_1 = x_2$ رسیدیم، تابع یک‌به‌یک است. برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون آن، x را تنها کرده و در پایان اسامی x و y را جابه‌جا می‌کنیم. در صورتی که تابع یک‌به‌یک نباشد، از مثال نقض می‌توان استفاده کرد.

تذکر: در توابع یک‌به‌یک، هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

سؤال: آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک‌به‌یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (خرداد ۹۳)

پاسخ: خیر، یک‌به‌یک نیست. مثلاً اگر $y = 0$ باشد، داریم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0 \ , \ f(2) = 0$$

سؤال: ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ را به دست آورید. (دی ۹۳)

پاسخ:

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{y^2-3}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x^2-3}{2} \text{ یا } f^{-1}(x) = \frac{x^2-3}{2}$$

سؤال: وارون‌پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیر بودن تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور ۹۲)

$$f(x) = \sqrt{x+3} - 5$$

پاسخ:

$$D_f : x+3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3 \Rightarrow D_f = [-3,+\infty)$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1+3} - 5 = \sqrt{x_2+3} - 5 \Rightarrow \sqrt{x_1+3} = \sqrt{x_2+3} \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع یک‌به‌یک است و وارون‌پذیر نیز می‌باشد.

$$y = \sqrt{x+3} - 5 \Rightarrow y+5 = \sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 = (y+5)^2 \Rightarrow x = (y+5)^2 - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = (x+5)^2 - 3$$

سؤال: وارون‌پذیری تابع $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$ را بررسی کرده و برد تابع را تعیین کنید. (خرداد ۹۱ خارج از کشور)

پاسخ:

$$y_1=y_2 \Rightarrow \frac{x_1-1}{2x_1+3}=\frac{x_2-1}{2x_2+3} \Rightarrow 2x_1x_2+3x_1-2x_2-3=2x_1x_2+3x_2-2x_1-3 \Rightarrow 3x_1+2x_1=3x_2+2x_2$$

$\Rightarrow 5x_1=5x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است بنابراین وارون‌پذیر نیز می‌باشد.

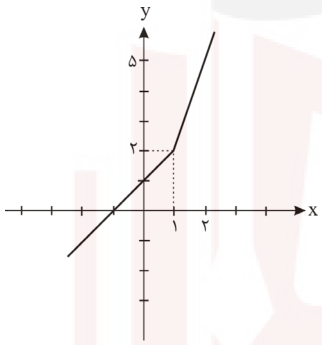
تذکر: دامنه تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و برد آن $R_f=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ می‌باشد. بنابراین برد تابع داده شده $R_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ است.

سؤال: ابتدا نمودار تابع $f(x)=2x+|x-1|$ را رسم کرده و با استفاده از شکل، وارون‌پذیری آن را بررسی کنید. (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

پاسخ:

$$f(x)=2x+|x-1|=\begin{cases}2x+x-1 & x\geq 1\\ 2x+1-x & x<1\end{cases}=\begin{cases}3x-1 & x\geq 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2\\ \hline y & 2 & 5\end{array}\\ x+1 & x<1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1\\ \hline y & 1 & 2\end{array}\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع، چون هر خط موازی با محور xها، تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌باشد.



تابع متناوب

تابع f را متناوب نامیم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$.

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f گوییم.

- دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$، $T=\frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد.
- دوره تناوب توابع $y=a\tan(bx+c)+d$ و $y=a\cot(bx+c)+d$، $T=\frac{\pi}{|b|}$ می‌باشد.

سؤال: دوره تناوب تابع $y=\sin 3x$ برابر با .... است. (دی ۹۲)

پاسخ:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$$

تابع جزء صحیح یا براکت

جزء صحیح اعداد صحیح برابر خودشان است. در صورتی که عدد صحیح نباشد، جزء صحیح آن، عدد صحیح قبل از آن می‌باشد.

برای رسم تابع براکتی، عبارت داخل براکت را بین اعداد صحیح متوالی، محدوده‌بندی می‌کنیم و با توجه به آن، تابع را در بازه‌های مشخص‌شده ساده و رسم می‌کنیم. (به سوالات حل‌شده دقت کنید.)

سؤال: اگر $f(x)=[x+۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲-\sqrt{۲})$ برابر .... است. (خرداد ۹۳)

پاسخ:

$$f(۲-\sqrt{۲})=[۲-\sqrt{۲}+۳]=[۵-\sqrt{۲}]=[۵-۱/\cdots]=[۳/\cdots]=۳$$

سؤال: اگر $a=۱-\sqrt{۲}$، حاصل عبارت $[\sqrt{(a-۲)^{۲}}]$ کدام است؟ (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

پاسخ:

$$[\sqrt{(a-۲)^{۲}}]=[|a-۲|]\xlongequal{a=۱-\sqrt{۲}}[|۱-\sqrt{۲}-۲|]=-[|-۱-\sqrt{۲}|]=[۱+\sqrt{۲}]=[۱+۱/\cdots]=۲$$

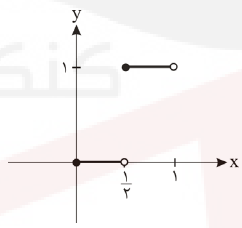
سؤال: نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازه‌ی $[۰,۱)$ رسم کنید. (شهریور ۹۳)

پاسخ: همان‌طور که گفتیم باید عبارت داخل براکت یعنی $۲x$ را بین اعداد صحیح متوالی محدوده‌بندی کنیم. ابتدا محدوده‌ی $۲x$ را با توجه به محدوده‌ی x به دست می‌آوریم:

$$۰\le x<۱ \Rightarrow ۰\le ۲x<۲$$

$$۰\le ۲x<۱ \Rightarrow [۲x]=۰ \Rightarrow y=۰,\ ۰\le x<\frac{۱}{۲}$$

$$۱\le ۲x<۲ \Rightarrow [۲x]=۱ \Rightarrow y=۱,\ \frac{۱}{۲}\le x<۱$$



فصل سوم

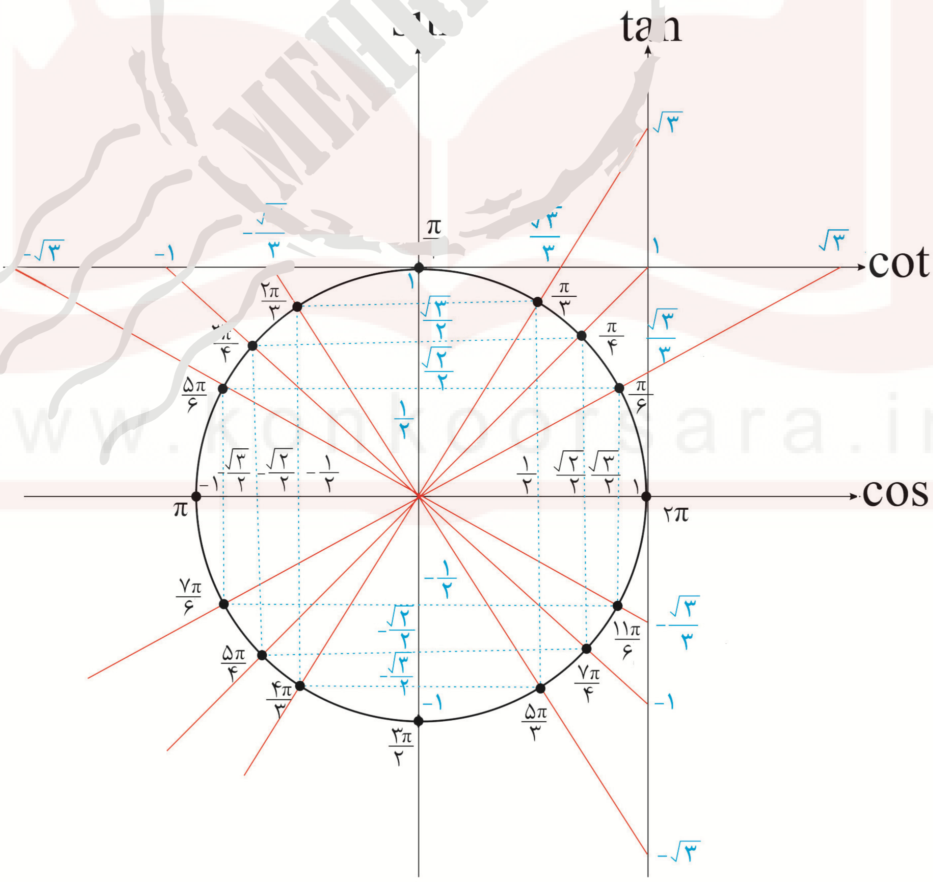
مثلثات (۳ نمره)

اتحادهای مثلثاتی ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۱۱۱ و مثال صفحه‌ی ۱۱۶ و سؤال ۷ مسایل صفحه‌ی ۱۱۶ .... ۱ – ۰/۷۵ نمره

نسبت‌های مثلثاتی بعضی زوایای غیرمعروف از روی زوایای معروف ــ مثال صفحه‌ی ۱۱۳ و مثال صفحه‌ی ۱۱۴ .... ۱ – ۰/۷۵ نمره

حل معادلات مثلثاتی ــ مسایل صفحه‌ی ۱۲۳ .... ۱/۵ نمره

وارون توابع مثلثاتی ــ مثال صفحه‌ی ۱۲۵ ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۱۲۶ ــ مثال صفحه‌ی ۱۲۶ ــ سؤال ۲ مسایل صفحه‌ی ۱۲۷ ــ مثال صفحه‌ی ۱۲۸ ــ تمرین در کلاس صفحه‌ی ۱۲۹ .... ۰/۷۵ نمره



اتحادهای مثلثاتی:

(دی ۹۰ و ۹۲)

$$\mathbf{\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha}$$

اثبات : $\cos ۲\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = ۱ - \sin^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$

(خرداد ۹۰ و ۹۲)

$$\mathbf{\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)}$$

اثبات : $\sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{۴} + \cos x \sin\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x\right) = \sin x + \cos x$

(خرداد ۹۰ خارج از کشور)

$$\mathbf{\frac{۲\sin x \cos ۳x}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x - ۱}$$

اثبات : $\frac{۲\sin x \cos ۳x}{\sin ۲x} = \frac{۲\sin x(۴\cos^۳ x - ۳\cos x)}{\sin ۲x} = \frac{۲\sin x \cos x(۴\cos^۲ x - ۳)}{۲\sin x \cos x} = ۴\cos^۲ x - ۳ = ۴\cos^۲ x - ۲ - ۱$

$= ۲(۲\cos^۲ x - ۱) - ۱ = ۲\cos ۲x - ۱$

روش دوم : $\frac{۲\sin x \cos ۳x}{\sin ۲x} = \frac{\sin(x+۳x) + \sin(x-۳x)}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۴x + \sin(-۲x)}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۴x - \sin ۲x}{\sin ۲x}$

$= \frac{۲\sin ۲x \cos ۲x - \sin ۲x}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۲x(۲\cos ۲x - ۱)}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x - ۱$

تذکر:

$$\mathbf{۲\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}$$
$$\mathbf{۲\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}$$
$$\mathbf{۲\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$$

(شهریور ۹۱)

$$\mathbf{\cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}}$$

اثبات : $\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{۱ - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱ + \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{\cos^۲ x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x + \sin^۲ x} = \frac{\cos ۲x}{۱} = \cos ۲x$

(دی ۸۹)

$$\mathbf{\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}}$$

اثبات : $\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{۱ + \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^۲ x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{۲\sin x \cos^۲ x}{\cos x(\sin^۲ x + \cos^۲ x)} = \frac{۲\sin x \cos x}{۱} = \sin ۲x$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرمعروف:

برای به دست آوردن نسبت‌های زوایای غیرمعروف با استفاده از زوایای معروف، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\mathbf{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$

۲) $\mathbf{\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha}$

۳) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۵) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan 105^\circ$ (دی ۹۳)

$$\tan 105^\circ = \tan(60+45) = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \times \tan 45} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

$\cos 15^\circ$ (شهریور ۹۳)

$$\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45\cos 30 - \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin 75^\circ$ (شهریور ۹۲)

$$\sin 75^\circ = \sin(30+45) = \sin 30\cos 45 + \cos 30 \sin 45 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

سؤال: اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع دوم باشد و $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\alpha-\beta)$ را به دست آورید.

(خرداد ۹۲ خارج از کشور)

پاسخ:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} \xrightarrow{\text{در ربع اول } \alpha} \cos\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

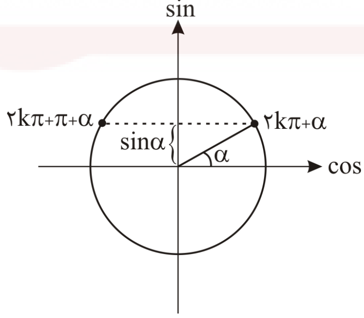
$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2\beta + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\text{در ربع دوم } \beta} \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

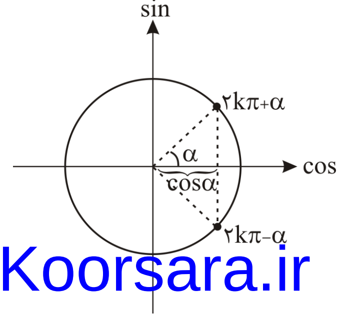
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{24}}{5}\times\frac{-2}{3} + \frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-2\sqrt{24}+\sqrt{5}}{15} = \frac{-4\sqrt{6}+\sqrt{5}}{15}$$

معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، به نکات زیر دقت می‌کنیم:

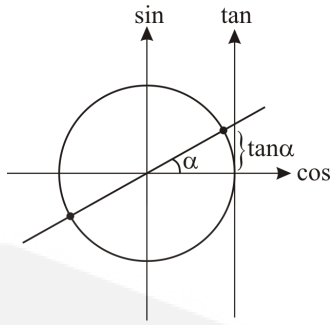
$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$





$$\mathbf{\cos x = \cos\alpha \ \Rightarrow\ x = ۲k\pi \pm \alpha \ \ (k \in \mathbb{Z})}$$

$$\mathbf{\tan x = \tan\alpha \ \Rightarrow\ x = k\pi + \alpha \ \ (k \in \mathbb{Z})}$$



(دی ۹۲)

$$\mathbf{\sin\underbrace{۵x}_{X} = \sin\underbrace{۲x}_{\alpha}}$$

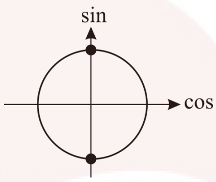
$$\sin\underbrace{۵x}_{X} = \sin\underbrace{۲x}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{۵x}_{X} = ۲k\pi + \underbrace{۲x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \dfrac{۲k\pi}{۳} \\ \text{یا} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \underbrace{۵x}_{X} = ۲k\pi + \pi - \underbrace{۲x}_{\alpha} \Rightarrow ۷x = ۲k\pi \Rightarrow x = \dfrac{۲k\pi}{۷} \end{cases}$$

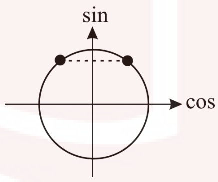
(شهریور ۹۳ و خرداد ۹۲)

$$\mathbf{\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos x = ۰}$$

$$\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sqrt{۳}\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\sin x - \sqrt{۳}) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \\ ۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۳} \ \text{ یا } \ x = ۲k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \dfrac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$





(خرداد ۹۳)

$$\mathbf{۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰}$$

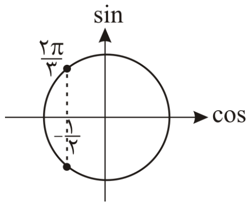
$$۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) + ۹\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow -۲\cos^۲ x + ۹\cos x + ۵ = ۰$$

تغییر متغیر : $\cos x = t \Rightarrow -۲t^۲ + ۹t + ۵ = ۰$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۸۱ + ۴۰ = ۱۲۱ \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۹ \pm \sqrt{۱۲۱}}{-۴} = \frac{-۹ \pm ۱۱}{-۴}$$

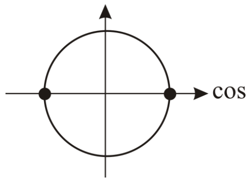
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۵ \quad \text{غیرقابل‌قبول} \\ \cos x = -\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \dfrac{۲\pi}{۳} \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

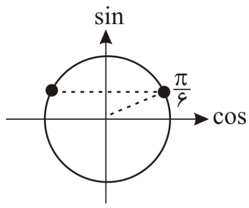


(دی ۹۳) $۲\sin^۲ x - \sin x = ۰$

$۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\sin x - ۱) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad \text{یا} \quad x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$





جواب‌ها در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$:

$x = k\pi$

k	۰	۱	۲
x	۰	π	۲π

$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$

k	۰
x	$\frac{\pi}{۶}$

$x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$

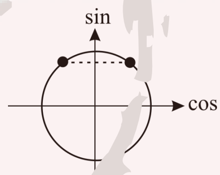
k	۰
x	$\frac{۵\pi}{۶}$

مجموعه جواب $= \{۰, \pi, ۲\pi, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\}$

(شهریور ۹۲) $\sin x - \cos x = ۱$

$\sin x - \cos x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

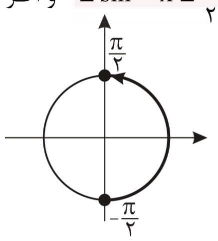
$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



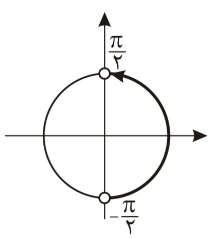
تذکر: برای حل این معادله از فرمول $\sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$ استفاده کردیم.

وارون توابع مثلثاتی

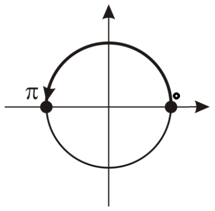
برد تابع $\sin^{-۱} x$، بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ است. پس خروجی $\sin^{-۱}$، زاویه‌ای بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد. اگر $۰ \le x \le ۱$ باشد، $۰ \le \sin^{-۱} x \le \frac{\pi}{۲}$ و اگر $-۱ \le x \le ۰$ باشد، $-\frac{\pi}{۲} \le \sin^{-۱} x \le ۰$ می‌باشد. همچنین $\sin^{-۱}(-x) = -\sin^{-۱} x$.



برد تابع $\tan^{-۱} x$، بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است. اگر $x \ge ۰$ باشد، $۰ \le \tan^{-۱} x < \frac{\pi}{۲}$ و اگر $x \le ۰$ باشد، $-\frac{\pi}{۲} < \tan^{-۱} x \le ۰$ می‌باشد. همچنین $\tan^{-۱}(-x) = -\tan^{-۱} x$.



برد تابع $\cos^{-۱}x$ بازه‌ی $[۰,\pi]$ است. اگر $۰\le x\le ۱$ باشد، $۰\le \cos^{-۱}x\le \frac{\pi}{۲}$ و اگر $-۱\le x\le ۰$ باشد، $\frac{\pi}{۲}\le \cos^{-۱}x\le \pi$ می‌باشد. ضمناً $\cos^{-۱}(-x)=\pi-\cos^{-۱}(x)$.



(دی ۹۳)

$$\mathbf{\cos^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)}$$

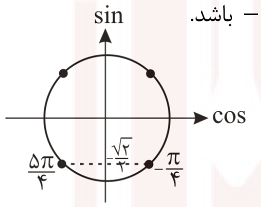
$$\cos^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\pi-\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$$

(خرداد ۹۳)

$$\mathbf{\sin^{-۱}\left(\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)}$$

$$\sin^{-۱}\left(\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)=\sin^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۴}$$

(دقت کنید که $\sin^{-۱}x$ همواره در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ می‌باشد و در صورتی $\sin^{-۱}(\sin\alpha)=\alpha$ است که $-\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}$ باشد.



(شهریور ۹۲)

$$\mathbf{\sin^{-۱}\left(\tan\frac{\pi}{۴}\right)}$$

$$\sin^{-۱}\left(\tan\frac{\pi}{۴}\right)=\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}$$

(خرداد ۹۲)

$$\mathbf{\sin\left(\cos^{-۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)\right)}$$

$$\sin\underbrace{\left(\cos^{-۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)\right)}_{\alpha}$$

$$\cos^{-۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

(شهریور ۹۳ و خرداد ۹۰)

$$\mathbf{\cos^{-۱}\left(\sin\frac{\pi}{۸}\right)}$$

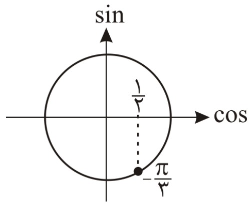
$$\cos^{-۱}\left(\sin\frac{\pi}{۸}\right)=\cos^{-۱}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)\right)=\cos^{-۱}\left(\cos\frac{۳\pi}{۴}\right)=\frac{۳\pi}{۴}$$

تذکر: $\cos^{-۱}(\cos\alpha)=\alpha$ وقتی برقرار است که $۰\le\alpha\le\pi$ باشد.

(شهریور ۹۰)

$$\mathbf{\cos\left(\tan^{-1}(-\sqrt{3})\right)}$$

$$\cos\left(\tan^{-1}(-\sqrt{3})\right)=\cos\left(-\tan^{-1}(\sqrt{3})\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$



(دی ۸۹ خارج از کشور)

$$\mathbf{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times 1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

دقت کنید که:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

و همچنین:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع (۴ نمره)

بررسی وجود حد از روی جدول و نمودار و ضابطه

سؤال: با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید. (دی ۹۳)

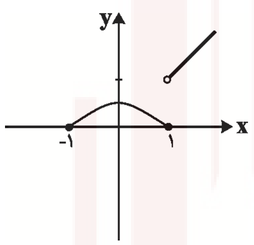
x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
f(x)			→	?	←		

پاسخ: دقت کنید که برای اعداد بزرگ‌تر از ۱، از ضابطه‌ی $2x$ و برای اعداد کوچک‌تر از ۱، از ضابطه‌ی $x+1$ استفاده می‌کنیم:

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
f(x)	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲ , ۲	←	۲/۰۰۲	۲/۰۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$$

سؤال: با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. (شهریور ۹۳)



۱) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

پاسخ:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$

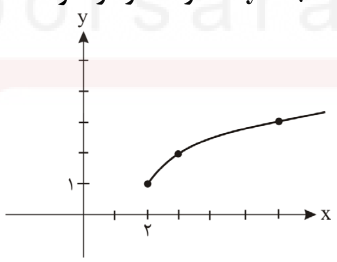
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (وجود ندارد)

سؤال: با رسم نمودار $y=\sqrt{x-2}+1$ مقدار حد ار در اطراف نقطه‌ی $a=2$ بررسی کنید. (دی ۹۲)

پاسخ:



$y=\sqrt{x-2}+1$

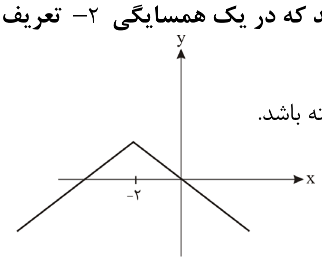
x	۲	۳	۶
y	۱	۲	۳

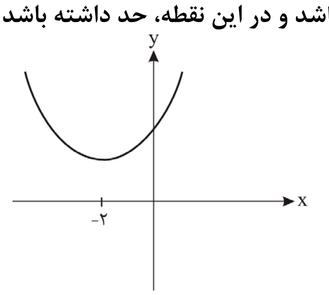
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$

سؤال: نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی -2 تعریف شده باشد و در این نقطه، حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در -2 باشد. (شهریور ۹۲)

پاسخ: باید تابع در $x=-2$ پیوسته باشد.

تابع‌های زیادی قابل رسم‌اند:





سؤال: آیا تابع $f(x)=x-[x]$ در $x=1$ حد دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (خرداد ۹۳)

پاسخ: حد چپ و راست تابع در $x=1$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1^+} x-[x]=\lim_{x\to 1^+} x-1=0$$
$$\lim_{x\to 1^-} x-[x]=\lim_{x\to 1^-} x=1$$

چون حد چپ و حد راست برابر نیستند، تابع در $x=1$ حد ندارد.

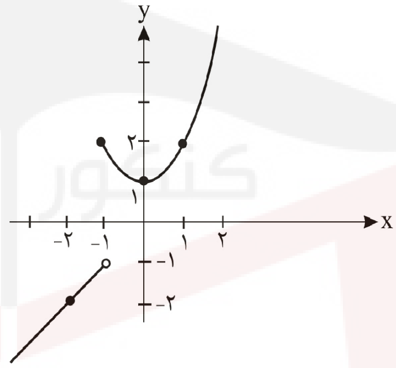
سؤال: با استفاده از نمودار وجود حد تابع زیر را در نقطه‌ی $a=-1$ بررسی کنید. (دی ۸۹ خارج از کشور)

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge -1 \\ x & x<-1 \end{cases}$$

x	-1	0 (راس)	1
y	2	1	2

x	-1	-2
y	-1	-2



با توجه به نمودار:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-1$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$$

بنابراین f در $a=-1$ حد ندارد.

سؤال: نمودار تابع $y=x-[x]$ را رسم کنید و با استفاده از آن وجود حد راست و حد چپ در نقطه‌ی ۱ را مشخص کنید. (خرداد ۹۲ خارج از کشور)

پاسخ:

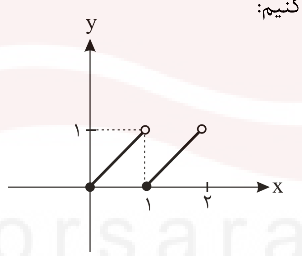
تابع را در بازه‌ی $[0,2)$ رسم می‌کنیم:

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=$

x	0	1
y	0	1

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=x-1$

x	1	2
y	0	1



با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$$

سؤال: حد تابع $y=\dfrac{1}{[x]-3}$ را در $x=3$ در صورت وجود، بیابید. (خرداد ۹۲)

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی تابع را به دست می‌آوریم:

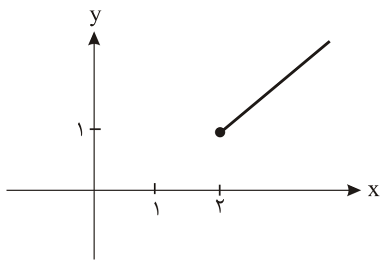
$$[x]-3=0 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3\le x<4 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[3,4)=(-\infty,3)\cup[3,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی راست ۳ تعریف نشده و داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{[x]=3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{[x]-3}=\frac{1}{2-3}=-1$$

سؤال: نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد، ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (خرداد ۹۱ خارج از کشور)

پاسخ:



سؤال: دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده باشند و هیچ‌کدام در a حد نداشته باشند ولی $f \times g$ در a حد داشته باشد.

پاسخ:

$$f=\begin{cases}1 & x\ge a\\ 0 & x<a\end{cases}\quad,\quad g=\begin{cases}0 & x\ge a\\ 1 & x<a\end{cases}$$

$$f\times g=\begin{cases}1\times 0=0 & x\ge a\\ 0\times 1=0 & x<a\end{cases}\Rightarrow f\times g=0$$

تابع ثابت ۰ در همه‌جا پیوسته است.

محاسبه‌ی حد:

سؤال: حدود توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}$$ (دی ۹۳)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}\times\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2-1}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{2x(\sqrt{x+2}+1)}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$$ (دی ۹۳ و شهریور ۹۲)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}-(\cos x+\sin x)$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$$ (شهریور ۹۳)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7}{2}$$

تذکر: برای تجزیه‌ی $2x^2+3x-5$ می‌توانیم آن را بر عامل صفرکننده یعنی $x-1$ تقسیم کنیم. ببینید:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x-5 & x-1 \\ \underline{-(2x^2-2x)} & \overline{2x+5} \\ 5x-5 & \\ \underline{-(5x-5)} & \\ 0 & \end{array}$$

(شهریور ۹۳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\times 1=2$$

(شهریور ۹۳)

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\tan\left(\frac{\pi}{8}\times x\right)$$

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\tan\left(\frac{\pi}{8}\times x\right)=0\times 1=0$$

تذکر: این حد ابهامی ندارد و با جای‌گذاری حل می‌شود.

(خرداد ۹۳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 3x}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 3x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x^2}+\frac{\sin^2 3x}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\times\sin 3x}{3x}\times\frac{\sin 3x\times(3x)}{3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x\times 3x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$$

(شهریور ۹۲)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{6}{5}$$

(دی ۹۱)

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\sqrt{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\sqrt{x+1}=0\times\sin 1=0$$

(خرداد ۹۱)

$$\lim_{x\to 3^+}(x-[x])$$

$$\lim_{x\to 3^+}(x-[x])=\lim_{x\to 3^+}x-3=0$$

(شهریور ۹۰)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}\times\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)}=2$$

(شهریور ۹۰)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\underset{\sin x>0}{\overset{x>0}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{x\sin x}{x}}{\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\;\;=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}x}{\frac{x}{2}}=2\sqrt{2}$$

(دی ۹۰)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{[x]-3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{[x]-3}=\frac{1}{2-3}=-1$$

(دی ۸۹ خارج از کشور)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\dfrac{\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\dfrac{\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{2x\left(\dfrac{x\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{2x(x)}=\frac{1}{4}$$

(خرداد ۹۲ خارج از کشور)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{0+1}{1}=1$$

پیوستگی

در پیوستگی تابع در $x=a$ باید حد تابع با مقدار تابع در $x=a$ برابر باشد.

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

سؤال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $a=1$ بررسی کنید. (دی ۹۳)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

$$f(1)=1$$

چون حد تابع با مقدار تابع در $a=1$ برابر نیست، پس تابع در $a=1$ پیوسته نیست.

سؤال: پیوستگی تابع زیر را در $x=1$ بررسی کنید. (دی ۹۲)

$$f(x)=\begin{cases}۴-۳x & x\le ۱\\ ۲x^۲+۱ & x>۱\end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} ۴-۳x=۱=f(۱)$$
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} ۲x^۲+۱=۳$$

چون حد چپ و راست تابع با هم برابر نیست، پس تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

سؤال: **در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.** (شهریور ۹۳)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۲x}{x-۲} & x<۲\\ ax+۱ & x\ge ۲\end{cases}$$

پاسخ: باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۲x}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=۲\\&\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} ax+۱=۲a+۱=f(۲)\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۲a+۱=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

سؤال: **مقدار m را به گونه‌ای بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $a=۱$ پیوسته باشد.** (دی ۸۹ خارج از کشور)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-۱|}{۱-x} & x<۱\\ mx+۱ & x\ge ۱\end{cases}$$

پاسخ: باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع در $a=۱$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{۱-x}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱-x}{۱-x}=۱\\&\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} mx+۱=m+۱=f(۱)\end{aligned}\right\}\Rightarrow m+۱=۱\Rightarrow m=۰$$

سؤال: **مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x=۱$ پیوسته باشد.** (خرداد ۹۰ خارج از کشور)

$$f(x)=\begin{cases}[x]+bx & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ \dfrac{|x-۱|}{x^۲-۱}+a & x<۱\end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}[x]+bx=۱+b$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x^۲-۱}+a=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}+a=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۱}{(x+۱)}+a=\frac{۱}{۲}+a$$
$$f(۱)=۲$$

$$\text{پیوسته } x=۱ \text{ تابع در } \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}+a=۲\Rightarrow a=\dfrac{۳}{۲}\\ ۱+b=۲\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

سؤال: **پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ را در نقطه‌ی $x=۴$ بررسی کنید.** (خرداد ۹۰)

پاسخ:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\sqrt{x-4} = \lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4} = 0$$
$$f(4) = 0$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x = 4$ پیوسته است.

دقت کنید که چون دامنه‌ی تابع $[4,+\infty)$ است، حد تابع در $x = 4$ همان حد راست می‌شود.

سؤال: **مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.** **(خرداد ۹۱)**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{a-|x-1|} & \mathbf{x \geq 1} \\ \mathbf{\dfrac{x^3-1}{x-1}} & \mathbf{x < 1} \end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} a-|x-1| = \lim_{x\to 1^+} a-(x-1) = a = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$$

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 3$

سؤال: **آیا تابع $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}}$ در ۲ پیوسته است؟ چرا؟** **(شهریور ۹۰)**

پاسخ: خیر، زیرا تابع f در $x = 2$ تعریف نشده است و در مورد پیوستگی آن نمی‌توان صحبتی کرد.

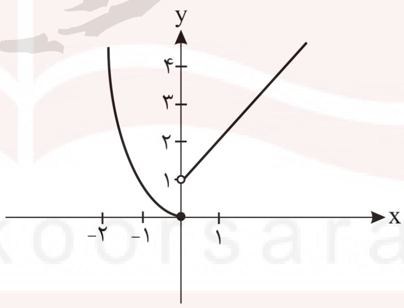
سؤال: **ابتدا نمودار تابع $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $\mathbf{a = 0}$ بررسی کنید.** **(خرداد ۹۳)**

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

x	-2	-1	0 (رأس)
y	4	1	0

x	0	1
y	1	2



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نیست، پس تابع در $a = 0$ پیوسته نیست.

فصل پنجم

مشتق توابع (۵ نمره)

مشتق‌پذیری با استفاده از تعریف مشتق

اگر f در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، در این صورت حد زیر را در صورت وجود مشتق تابع f در a می‌نامیم.

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

یا به طور معادل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر تابع f در یک همسایگی راست $x=a$ تعریف شده باشد، $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، مشتق راست f در a می‌نامیم و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهیم و اگر در همسایگی چپ $x=a$ تعریف شده باشد، $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، مشتق چپ f در a می‌نامیم و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

* مشتق‌پذیری یک تابع در نقطه‌ی درونی a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه وجود و با هم مساوی باشند.

تعبیر هندسی مشتق: مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول $x=a$ می‌باشد. بنابراین برای به دست آوردن معادله‌ی خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول a، شیب آن را از $m=f'(a)$ به دست می‌آوریم و برای شیب خط قائم از $m'=-\frac{۱}{m}=\frac{-۱}{f'(a)}$ استفاده می‌کنیم.

سوال: **با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^۳$ را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید. سپس معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(۱,۱)$ به دست آورید.** (خرداد ۹۳)

پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^۳-a^۳}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^۲+ax+a^۲)}{x-a}=\lim_{x\to a}x^۲+ax+a^۲=a^۲+a^۲+a^۲=۳a^۲$$

برای نوشتن معادله‌ی خط قائم، ابتدا شیب خط مماس در $x=۱$ را به دست می‌آوریم، سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط قائم در $x=۱$ به دست آید:

$$m_{\text{مماس}}=f'(۱)=۳(۱)^۲=۳\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{۳}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$$

سوال: **با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ را در نقطه‌ی $x=۱$ محاسبه کنید.** (شهریور ۹۳)

پاسخ:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}+۱-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

سوال: **با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\le ۱\\ x^۲+۳ & x>۱\end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.** (دی ۹۲)

پاسخ:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۳-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}x+۱=۲$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x+۱-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳$$

چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ پس تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

سؤال: **با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع زیر را در $x = ۲$، در صورت وجود بیابید.** **(خرداد ۹۲)**

$$f(x) = |x - ۲|$$

پاسخ:

$$f'_{+}(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{|x - ۲| - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x - ۲}{x - ۲} = ۱$$

$$f'_{-}(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{|x - ۲| - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x - ۲)}{x - ۲} = -۱$$

چون $f'_{+}(۲) \neq f'_{-}(۲)$ است، پس تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

سؤال: **با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{۱}{x + ۱}$ را در $x = ۲$ حساب کنید.** **(شهریور ۹۰)**

پاسخ:

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{۱}{x + ۱} - \frac{۱}{۳}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{\frac{۳ - (x + ۱)}{۳(x + ۱)}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{-x + ۲}{۳(x + ۱)(x - ۲)} = \lim_{x \to ۲} \frac{-۱}{۳(x + ۱)} = \frac{-۱}{۹}$$

سؤال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ **در صفر مشتق‌پذیر است؟ (دلیل خود را توضیح دهید.)** **(خرداد ۹۱)**

پاسخ:

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{x \sin \frac{۱}{x} - ۰}{x} = \lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$$ وجود ندارد

بنابراین f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

سؤال: **اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ی a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$.** **(دی ۹۰)**

پاسخ:

$$(cf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c(f(x) - f(a))}{x - a} = c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

سؤال: **اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) \neq ۰$، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{۱}{f}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(\frac{۱}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^۲(a)}$.** **(خرداد ۹۰)**

پاسخ:

$$(\frac{۱}{f})'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{۱}{f}\right)(x) - \left(\frac{۱}{f}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{۱}{f(x)} - \frac{۱}{f(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x).f(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{(x - a) \times f(x).f(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-\left(f(x) - f(a)\right)}{x - a} \times \frac{۱}{f(x).f(a)} = -f'(a) \times \frac{۱}{f(a).f(a)} = \frac{-f'(a)}{f^۲(a)}$$

سؤال: مشتق‌پذیری تابع $y = \frac{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}}{x + ۱}$ **را در نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی کنید.** **(دی ۸۹ خارج از کشور)**

پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x+1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

چون $f'_-(1)\neq f'_+(1)$ است، پس تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

سؤال: معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ بیابید. **(شهریور ۹۳)**

پاسخ:

$$f(2)=4\ \Rightarrow\ A(2,4)$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\ \Rightarrow\ f'(2)=-3\ \Rightarrow\ m_{\text{مماس}}=-3\ \Rightarrow\ m_{\text{قائم}}=\frac{1}{3}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\ \Rightarrow\ y-4=\frac{1}{3}(x-2)\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

سؤال: در چه نقاطی از بازه‌ی $[0,2\pi]$ خط مماس بر نمودار تابع $y=\sin x$ موازی محور xها است؟ **(خرداد ۹۳)**

پاسخ: نقاطی را می‌خواهد که مشتق در آن‌ها برابر ۰ باشد (در خطوط موازی محور xها شیب خط صفر است).

$$f'(x)=\cos x=0$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\qquad A(\frac{\pi}{2},1)\ ,\ B(\frac{3\pi}{2},-1)$$

سؤال: نقطه‌ای از نمودار تابع $y=x^2+3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع، در این نقطه موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. **(شهریور ۹۲)**

پاسخ:

نیمساز ربع اول و سوم : $y=x\ \Rightarrow\ m=1$

$$y'=2x+3\ \Rightarrow\ m'=2a+3=1\ \Rightarrow\ 2a=-2\ \Rightarrow\ a=-1\ \Rightarrow\ A(-1,-2)$$

سؤال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y=\sin x+4$ را در نقطه‌ی $\frac{\pi}{3}$ بنویسید. **(خرداد ۹۱ خارج از کشور)**

پاسخ:

$$y'=\cos x\ \Rightarrow\ m=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ y=\sin\frac{\pi}{3}+4=\frac{\sqrt{3}}{2}+4\ \Rightarrow\ A(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}+4)\ \Rightarrow\ y-(\frac{\sqrt{3}}{2}+4)=\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+4$$

محاسبه‌ی مشتق

برای محاسبه‌ی مشتق توابع، از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

$$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

تذکر: برای مشتق توابع ترکیبی، از درونی‌ترین تابع شروع به مشتق‌گیری می‌کنیم و مشتق هر تابع را به ازای تابع درونی‌اش به دست آورده و در بقیه مشتق‌ها ضرب می‌کنیم.

مثال:

(دی ۹۲)

$$y = (x^{۲} + ۱)^{۳} \Rightarrow y' = ۲x \times ۳(x^{۲} + ۱)^{۲}$$

در ادامه مشتق چند تابع مهم را یادآوری می‌کنیم:

$$y = x^{n} \Rightarrow y' = nx^{n-۱}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \quad , \quad \sqrt[n]{x^{m}} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \quad (m < n)$$

$$y = \frac{۱}{x} \Rightarrow y' = -\frac{۱}{x^{۲}}$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = ۱ + \tan^{۲} x$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -(۱ + \cot^{۲} x)$$

$$y = \sin^{-۱} x \Rightarrow y' = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

$$y = \cos^{-۱} x \Rightarrow y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

$$y = \tan^{-۱} x \Rightarrow y' = \frac{۱}{۱ + x^{۲}}$$

سؤال: مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست.)

(دی ۹۲)

$$y = (۳x^{۲} + ۵x)(۴x^{۲} + \sin x)$$

پاسخ:

$$y' = (۶x + ۵)(۴x^{۲} + \sin x) + (۸x + \cos x)(۳x^{۲} + ۵x)$$

(دی ۹۳)

$$y = \sqrt{۴ - x^{۲}} + ۲\sin^{-۱} x$$

پاسخ:

$$y' = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^{۲}}} + \frac{۲}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

(شهریور ۹۳)

$$y = (۳x^{۲} - \sqrt{x} + ۵)^{۳}$$

پاسخ:

$$y' = \left(۶x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right) \times ۳(۳x^{۲} - \sqrt{x} + ۵)^{۲}$$

(شهریور ۹۳)

$$y = (۳x + ۵)\cos(۴x^{۳} + ۱)$$

پاسخ:

$$y' = ۳\cos(۴x^{۳} + ۱) + ۱۲x^{۲}(-\sin(۴x^{۳} + ۱))(۳x + ۵)$$

(خرداد ۹۳)

$$y = \frac{3x^3 - 1}{2x + 1}$$

پاسخ:

$$y' = \frac{9x^2(2x+1) - 2(3x^3 - 1)}{(2x+1)^2}$$

(خرداد ۹۳)

$$y = (x^2 + 1)^3$$

پاسخ:

$$y' = 2x \times 3(x^2 + 1)^2$$

(خرداد ۹۳)

$$y = 2\tan^{-1} x$$

پاسخ:

$$y' = \frac{2}{1 + x^2}$$

(شهریور ۹۲)

$$y = \sqrt{\sin 5x}$$

پاسخ:

$$y' = 5 \times \cos 5x \times \frac{1}{2\sqrt{\sin 5x}}$$

(از درونی‌ترین تابع شروع کردیم و به ترتیب مشتق گرفتیم.)

(خرداد ۹۲)

$$y = x(x^5 + 1) = x^6 + x$$

پاسخ:

$$y' = 6x^5 + 1$$

تذکر: در این مورد، قبل از مشتق‌گیری تابع را ساده کردیم.(البته می‌شود به صورت اولیه هم مشتق آن را محاسبه کرد.)

(خرداد ۹۲)

$$y = \sqrt[3]{x} + \cos^{-1} x$$

پاسخ:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(شهریور ۹۱)

$$y = \sqrt[3]{5x^2 - 1}$$

پاسخ:

$$y' = 10x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^2}}$$

(شهریور ۹۱)

$$y = (2x + 3)^5 (\sin x)$$

پاسخ:

$$y' = 2 \times 5(2x+3)^4 (\sin x) + \cos x (2x+3)^5$$

(شهریور ۹۱)

$$y = \frac{1}{x+1} + \tan^{-1} x$$

پاسخ:

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1 + x^2}$$

(خرداد ۹۱)

$$y = 3(2x - 5)^4 + \sqrt[3]{x}$$

پاسخ:

$$y' = 3 \times 2 \times 4(2x - 5)^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(خرداد ۹۱) $y=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}$

پاسخ: $y'=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\cos\sqrt{x}\right)(1+x^2)-2x(\sin\sqrt{x})}{(1+x^2)^2}$

(دی ۹۰) $y=\sqrt[3]{x^5-\cos 2x}$

پاسخ: $y'=5x^4-2(-\sin 2x)\times\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^5-\cos 2x)^2}}$

(خرداد ۹۰) $y=2\tan^{-1}x+3\sin^{-1}x+\dfrac{4}{x}$

پاسخ: $y'=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4}{x^2}$

(خرداد ۹۰) $y=\sqrt{1-2\cos 3x}$

پاسخ: $y'=\dfrac{-2\times3\times(-\sin 3x)}{2\sqrt{1-2\cos 3x}}$

(شهریور ۹۰) $y=\sin(\sqrt{2x+5})$

پاسخ: $y'=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}\times\cos(\sqrt{2x+5})$

(شهریور ۹۰) $y=(1+\tan x)\cos^{-1}x$

پاسخ: $y'=(1+\tan^2 x)\cos^{-1}x+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}(1+\tan x)$

آهنگ تغییرات لحظه‌ای و متوسط

آهنگ تغییرات متوسط تابع f در دو مقدار x_1 و x_2: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

آهنگ لحظه‌ای (آنی):

آهنگ تغییرات تابع f در لحظه‌ی x_0 برابر $f'(x_0)$ است.

سؤال: آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن، برای دایره‌ای به محیط 3π را بیابید. (دی ۹۳)

پاسخ: ابتدا باید فرمول مساحت دایره را برحسب محیط آن به دست آوریم.

$$P=2\pi r \Rightarrow r=\frac{P}{2\pi}\quad,\quad S=\pi r^2=\pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2=\frac{P^2}{4\pi}$$

حال مشتق S نسبت به P را محاسبه می‌کنیم:

$S'(P)=\dfrac{2P}{4\pi}=\dfrac{P}{2\pi}\Rightarrow P=3\pi$ در آهنگ تغییرات مساحت $=S'(3\pi)=\dfrac{3\pi}{2\pi}=\dfrac{3}{2}$

سؤال: آهنگ تغییرات مساحت یک دایره که قطر آن ۴ است را به دست آورید. **(دی ۹۲)**

پاسخ:

$$r = ۲ \ , \ S(r) = \pi r^۲ \Rightarrow S'(r) = ۲\pi r \Rightarrow S'(۲) = ۴\pi$$

سؤال: آهنگ تغییرات حجم یک کره نسبت به شعاع آن هنگامی که حجم کره $\frac{\pi}{۶}$ سانتی‌متر مکعب است، را حساب کنید.

(دی ۸۹ خارج از کشور)

پاسخ: ابتدا شعاع کره در لحظه‌ای که حجم آن $\frac{\pi}{۶}$ است را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۴r^۳ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r^۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

$$V'(r) = ۴\pi r^۲ \Rightarrow V'(\frac{۱}{۲}) = ۴\pi(\frac{۱}{۲})^۲ = \pi$$

سؤال: آهنگ تغییر مساحت مربع نسبت به ضلع آن در لحظه‌ای که محیط آن ۸ واحد است را به دست آورید. **(خرداد ۹۰ خارج از کشور)**

پاسخ: ابتدا ضلع مربع را به دست می‌آوریم:

$$P = ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

$$S = a^۲ \Rightarrow S' = ۲a \Rightarrow S'(۲) = ۴$$

تذکر: اگر در سوال آهنگ تغییرات مساحت نسبت به محیط را خواسته بود، باید مساحت رابر حسب محیط به دست می‌آوردیم و مشتق می‌گرفتیم.

پایان