تمرینات مروری فصل ۲

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$

$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]<\frac{۱}{x} \Rightarrow x(\frac{۱}{x}-۱)<x\left[\frac{۱}{x}\right]\le x(\frac{۱}{x})$

$\Rightarrow \lim ۱-x < \lim x\left[\frac{۱}{x}\right] \le \lim ۱$

$\lim[a]=\lim\limits_{u\to\infty} u=\lim x\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim x\cdot\frac{۱}{x}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}(۱-x)\cdot\tan\frac{\pi}{۲}x$

$۰\times\infty \to \lim\frac{(۱-x)}{\cot\frac{\pi x}{۲}}=\lim\frac{-۱}{-\frac{\pi}{۲}(۱+\cot^{۲}\frac{\pi x}{۲})}=\frac{۲}{\pi}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos(\frac{\pi x}{۲})}{۱-x}=\frac{۱}{۱}=۱$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin(\cos x)\cdot\sin x=\sin ۱\times ۰=۰$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin(\cot x^{۲})\cdot\sin x$

$-۱\le\sin(\cot x^{۲})\le ۱$

$-\sin x\le\sin x\sin(\cot x^{۲})\le\sin x$

$\lim\sin x\sin(\cot x^{۲})=۰$

راه دوم $\sin(\cot x^{۲})$ کراندار پس منفی یک و یک است $\lim\sin, x=۰$ پس حد آن برابر صفر است.

۶) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^{۲}}=\frac{n(n+۱)}{۲}$

$\lim\frac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^{۲}}\overset{H}{\Rightarrow}$

$\lim\frac{(n+۱)x^{n}-(n+۱)}{۲(x-۱)} \underset{x\to ۱}{=} \frac{n(n+۱)^{n-۱}x}{۲}$

$=\frac{n(n+۱)}{۲}$

$U\frac{x^{m}-۱}{x^{n}-۱}=\frac{m}{n}\overset{H}{\Rightarrow}\frac{mn^{m-۱}}{nx^{n-۱}}\underset{x\to ۱}{=}\frac{m}{n}$

۷) $\frac{m}{n}$

۸) $\lim\frac{(x^{n}-a^{n})-na^{n-۱}(x-a)}{(x-a)^{۲}}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{nx^{n-۱}-na^{n-۱}}{۲(x-a)}$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{n(n-۱)x^{n-۲}}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}$

۹) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x+x^{۲}+\cdots x^{n}-n}{x-۱}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱+۲x+۳x^{۲}+\cdots+nx^{n-۱}}{۱}$

$=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{(۱+mx)^{n}-(۱-nx)^{m}}{x^{۲}}\overset{\text{هوپیتال}}{\to}=$

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{nm(۱+mx)^{n-۱}+mn(۱-nx)^{m-۱}}{۲x}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}mn\frac{\left[(۱+mx)^{n-۱}+(۱-nx)^{m-۱}\right]}{۲x}$

$=\lim\limits_{x\to ۰}mn\frac{\left[(۱+۰)^{n-۱}+(۱-۰)^{m-۱}\right]}{۲x}=\frac{mn}{۰}=\infty$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{m}{۱-x^{m}}-\frac{n}{۱-x^{n}})=\frac{m}{۱-۱^{m}}-\frac{n}{۱-۱^{n}}$

۱۲) $\frac{m}{n}$

۱۳) 2

۱۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim\frac{\frac{x^{۲}}{۲}}{x^{۲}}=\frac{۱}{۲}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^{۳}x}=\frac{\frac{x^{۳}}{۲}}{x^{۳}}=\frac{۱}{۲}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^۲-a^۲}}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^۲-a^۲}}{۲x\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+a}}{۲x}=\frac{\sqrt{۲a}}{۲a}$$

۱۷) $\frac{۱}{n}$

۱۸) ∞

۱۹) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[n]{x+۱}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{n\sqrt[n]{(x+۱)^{n-۱}}}=\frac{۱}{n}$

۲۰) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & -۱<x<۲ \\ ۲x+۱ & ۲\le x<۳ \end{cases}$

$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۴$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۵$

۲۱) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{۱}{x} & x<۰ \\ \sin\frac{۱}{x} & x>۰ \end{cases}$

$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰$ $\qquad \lim_{x\to ۰^+} f(x)=$ وجود ندارد

$\lim_{x\to \frac{۱}{\pi}} f(x)=\lim\sin\frac{۱}{x}=۰$

۲۲) $f(x)=\left[\frac{۱}{x}\right]$

$\lim_{x\to ۰^+}\left[\frac{۱}{x}\right]=+\infty$, $\lim_{x\to ۰^-}\left[\frac{۱}{x}\right]=-\infty$

تابع $\left[\frac{۱}{x}\right]$ در صفرحد ندارد چون حد چپ و راست باهم برابر نیستند.

۲۳) $\lim_{x\to ۰^+}\left[\frac{۱}{x}\right]=+\infty$, $\lim_{x\to ۰^-}\left[\frac{۱}{x}\right]=-\infty$ ندارد.

۲۴) $f(x)=\frac{[x]}{x}$

$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=۰$ $\qquad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$

حد ندارد.

۲۵) دارد.

۲۶) $\sqrt{۴x^۲+۳x+۱}-\sqrt{۴x^۲-۷x-۲}=$

$-۲\left|x+\frac{۳}{۸}\right|+۲\left|x-\frac{۷}{۸}\right|=-\frac{۵}{۲}$

۲۷) $\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{۲x+۲}-۳}$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{\frac{۱}{\sqrt{۲x+۳}}}=\frac{۳}{۴}$$

۲۸) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(۱-\cos x)}{x^۴}$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(\frac{۱}{۲}x^۲)}{x^۴}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}x^۲)^۲}{x^۴}=\frac{۱}{۸}$$

۲۹) $\lim_{x\to ۱}(x^۲-۱)\cot(x^۲-۱)$

$$=\lim\frac{x^۲-۱}{\tan(x^۲-۱)}=۱$$

۳۰) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{۳x+۴}}{\sqrt{x+۱}-۱}=\xrightarrow{Hop}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=-۱$$

۳۱) $\lim_{x\to +\infty}(\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{x-۱})=$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-۲\sin\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}}{۲}\times\frac{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x-۱}}{۲}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2\sin(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{2}\sin\left(\frac{1}{(2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{2}\times 0=0$$

۳۲) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\frac{2x}{\sqrt{\frac{1}{2}\times(2x)^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}=-\sqrt{2}$$

۳۳) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to\infty}(x+\frac{1}{2})-x=\frac{1}{2}$$

۳۴) $$\lim_{x\to 8^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{x-8}=\lim_{x\to 8^-}\frac{\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 8^-}\frac{\frac{-1}{12}}{0^+}=-\infty$$

۳۵) $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+4)}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4})}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2-\frac{4}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}})}=+1$$

۳۶) $$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)\sin 8x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2-8x^3}{\frac{4x^2}{2}}=4$$

۳۷) $$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}=\frac{3}{4}$$

۳۸) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}=\frac{4}{3}$$

۳۹) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-[x]}{\sqrt{x}}=0$$

۴۰) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-[x]}{\sqrt[3]{x}}=0$$

۴۱) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\pi/6)-\sin\pi/6}{x}$$

$$=\lim\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi/6-\sin\pi/6}{x}$$

$$\overset{hop}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 9x+\pi/6)}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۲) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۳) $$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=-2$$

۴۴) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x-x^2}-(2+x)}{x+1}=-1$$

۴۵) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}-1}{1}=-2$$

٤٦) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3-2x}{3\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}}}{1+2x}=\frac{\dfrac{3}{3\times 4}}{1}=\frac{1}{4}$$

٤٧) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(27+x)^2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(27-x)^2}}}{1+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{(27-x)^2}-\sqrt[3]{(27-x)^2}\right]}{3\sqrt[3]{(27+x)^2}\sqrt[3]{(27-x)^2}\,(3\sqrt[3]{x^2}+2)}=0$$

٤٨) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}}=\frac{3}{2}$$

٤٩) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+20)^2}}}{4\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+9)^3}}}=\frac{112}{27}$$

٥٠) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-(x/3)}-\sqrt[4]{1+x/4})}{1-\sqrt{1-(x/2)}}$

$$\lim\frac{\dfrac{-\frac{1}{3}}{3\sqrt[3]{(1-\frac{x}{3})^2}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{4\sqrt[4]{(1+\frac{x}{4})^3}}}{\dfrac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{(1-\frac{x}{3})}}}=\frac{-25}{36}$$

٥١)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{5}\times 5(1+5x)^{-4/5}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{(-4/5)\times(1+5x)^{-9/5}}=-\frac{1}{2}$$

٥٢) $\lim\dfrac{\sqrt[m]{1+x^2}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$

$$\lim\frac{\dfrac{1}{m\sqrt[m]{(1+x)^{m-1}}}-\dfrac{1}{n\sqrt[n]{(1-x)^{n-1}}}}{1}=\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}{1}$$

$$=\frac{n-m}{m\cdot n}$$

٥٣) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

$$\lim=\frac{a}{m\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}}-\frac{b}{n\sqrt[n]{(1-bx)^{n-1}}}=\frac{an-bm}{mn}$$

٥٤) $\lim\limits_{m\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x-1}}{\sqrt[n]{x-1}}$

$$=\lim\frac{\dfrac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}}{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}=\frac{n}{m}$$

٥٥) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(1+\sqrt{x})-2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt{x^2}}-\frac{4x}{3\sqrt[3]{x}}}{-1}=-\frac{1}{2}$$

٥٦) $$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$\lim_{x\to 1}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x})+$$

$$\cdots\frac{\sqrt{x^{n-1}}}{(1+\sqrt{x})\cdots(1+\sqrt[n]{x})+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}\,(1-x)^{n-1}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{n-1}}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1-x)^{n-1}}=$$

$$\frac{1}{2\times 3\times\cdots\times n}=\frac{1}{n!}$$

٥٧) $$\lim_{x\to+\infty}\left\lfloor\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right\rfloor$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{a+b}{2}-x\right]=\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

٥٨) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}$$

$$=\lim\sqrt{x+\sqrt{x+1\sqrt{\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

٥٩) $$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)-2(x+\frac{1}{2})+x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\,[x+1-2x-1+x]=x\times 0=0$$

٦٠) $$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

$$\lim\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[2]{\frac{1}{x}}}{\sqrt[2]{\frac{1}{x}}}=1$$

٦١) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x+\frac{1}{3}-x+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

٦٢) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$$

با استفاده از هم ارزی

$$\lim_{x\to+\infty}x+1-(x-1)=2$$

٦٣) $$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{1/3}\right]$$

$$\lim\frac{x^{1/3}\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]}{(x+1)^{4/3}+(x+1)(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}\times 4x}{\left[(x+1)^{4/3}+(x+1)(x-1)^{2/3}-(x-1)^{4/3}\right]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{4/3}}{2x^{4/3}}=2$$

٦٤) $$\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x}-2x\sqrt{x^2+x}+x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x(x+1)-2x(x+\frac{1}{2})+x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2+x-2x^2-x+x^2=0$$

٦٥) $$\lim_{x\to+\infty}\left\lfloor\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right\rfloor$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{x^n}+(a_۲\cdots a_n)x^{n-۱}+\cdots\cdots+a_۱a^۲\cdots a_n-x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a_1+\cdots+a_n-x}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

٦٦) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{(x^۲-۱)^n}+(x+\sqrt{x^۲-۱})}{x^n}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{(x^۲-۱)^n}+x+\sqrt{x^۲-۱}}{x^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^n}{x^n}=-۱$$

٦٧) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲+۱}+x)^n-(\sqrt{x^۲+۱}-x)^n}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^n}{x}=+\infty$$

٦٨) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{٤}}\tan ۲x\cdot\tan(\frac{\pi}{٤}-x)=\frac{۱}{۲}$$

٦٩) $$\lim_{x\to۱}(۱-x)\cdot\tan(\frac{\pi x}{۲})$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{۱-x}{\cot\frac{\pi x}{۲}}=\lim_{x\to۱}\frac{-۱}{-\frac{\pi}{۲}(۱+\cot\frac{\pi x}{۲})}=\frac{۲}{\pi}$$

۷۰) $$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\cos x\cos ۲x\cos ۳x}{۱-\cos x}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\cos^۲ x(۱-۲\sin^۲ x)(۴\cos^۳ x-۳\cos x)}{۱-\cos x}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\cos^۲ x(۱-۲\sin^۲ x)(۳\cos^۲ x-۳)}{۱-\cos x}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-(۱-\sin^۲ x)(۱-۲\sin^۲ x)(۱-٤\sin^۳ x)}{۱-\cos x}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-(۱-x^۲)(۱-۲x^۲)(۱-٤x^۲)}{\frac{۱}{۲}x^۲}$$

$$\lim_{x\to۰}x^۲\frac{(۸x^٤-۱٤x^۲+۷)}{\frac{x^۲}{۲}}=۱٤$$

۷۱) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\cot^۲ x}{۲-\cot x-\cot^۳ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۳\cot^۲ x(۱+\cot^۲ x)}{(۱+\cot^۲ x)+۳\cot^۲ x(۱+\cot^۲ x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۳\cot^۲ x}{۱+۳\cot^۲ x}=\frac{۳}{۴}$$

۷۲) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۱-۲\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\cos(x-\frac{\pi}{۳})}{۲\sin x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۷۳) $$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱+\sin x}}{x^۳}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱+\tan x-۱-\sin x}{x^۳(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}=$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^۳(\sqrt{۱+\tan x}+\sqrt{۱+\sin x})}=$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x^۳}{۲}}{x^۳ ۱+\sqrt{x}+\sqrt{۱+x}}=\frac{۱}{۴}$$

۷٤) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\tan ۳x-۳\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{۶})}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۳\tan^۲ x(۱+\tan^۲ x)-۳(۱+\tan^۲ x)}{\sin(x+\frac{\pi}{۶})}=-۲۴$$

۷۵) $$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲(\sqrt{۱+x^۲}+\sqrt{\cos x})}{۱+x^۲-\cos x}$$

$$\lim_{x\to۰}x^۲\frac{(\sqrt{۱+x^۲}+\sqrt{\cos x})}{x^۲+\frac{x^۲}{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

۷٦) $$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^۲ x}$$

$$\lim \frac{\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \dfrac{-\sin x}{2\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\sin x \cos x}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{\cos x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\cos 2x}}}{2\cos x} = -\frac{1}{12}$$

$$77)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^4}}{\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2}$$

$$78)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\dfrac{1}{2}} = 0$$

راه حل بهتر $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$79)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos^3 x}\sqrt{1-2\sin^2 x}\ \sqrt[3]{4\cos^3 x - 3\cos x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-2\sin^2 x}\ \sqrt[3]{\cos^4 x(4\cos^2 x - 3)}}{x^2}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} \sqrt[3]{-4x^6+9x^4-8x^2+1} -$$

$$\frac{\dfrac{-24x^5+36x^3-16x}{3\sqrt[3]{(\ )^2}}}{2x} = -\frac{5}{3}$$

$$80)\ p(x) = a_1x_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n =$$

$$m\in z \ \lim \frac{\sqrt[m]{1-p(x)}-1}{x}$$

$$\frac{a_1}{m} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x} = \lim \frac{\frac{p(x)}{m}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_1+2a_2x+\cdots\cdots na_nx^{n-1}}{m} = \frac{a_1}{m}x$$

$$\sqrt[m]{1+p(x)} \qquad \frac{p(x)}{m} \qquad p(x)\to 0$$

$$81)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-ax^2-(a+b)(x-b)}{x+1}$$

$$a=1 \quad a+b=0 \quad b=-a \quad b=-1$$

$$82)\ \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1x_1 + b_1) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} -(x-\frac{1}{2}) - a_1x_1 - b_1 = 0$$

$$(-1-a_1)=0 \quad a_1=-1 \quad \frac{1}{2}-b=0 \quad b_1=\frac{1}{2}$$

$$83)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} \qquad a_2x-b_2=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-\frac{1}{2}-a_2x-b_2)=0$$

$$1-a_2=0 \quad a_2=1 \quad -\frac{1}{2}-b_2=0 \quad b_2=-\frac{1}{2}$$

$$84)\ f(x) = \frac{x-1}{(2x^2-7x+5)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim \frac{1}{2x-5} = -\frac{1}{3}$$

$$f(-\frac{1}{x}) = \frac{-\frac{1}{x}-1}{\frac{2}{x^2}+7-\frac{5}{x}}$$

$$f(0) = -\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{f(x)} = \frac{2x^2-7x+5}{x-1}$$

85)

$$\lim_{x\to 3}(x+1)=4 \quad \forall\varepsilon>0 \quad E\delta>0 \quad \forall x\in DF$$

$|x-۳|<\delta \Rightarrow |x-۳|<\varepsilon \quad \delta \le \varepsilon$

۸۶) $\lim\limits_{x\to ۳}(۲x+۱)=۷$

$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \forall x \in DF$

$|x-۳|<\delta \Rightarrow |۲۰۰-۶|<\delta$

$|x-۳|<\frac{\varepsilon}{۲} \to \delta \le \frac{\varepsilon}{۲}$

۸۷) $\lim\limits_{x\to -٤} x^{۲}=١٦$

$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \ni \forall x \in DF$

$|x+۴|<\delta \Rightarrow |x^{۲}-۱۶|<\varepsilon$

$|x-۴||x+۴|<\varepsilon \quad -۵<x<-۳$

$-۹<x-۴<-۷$

$|x-۴||x+۴|<۹ \quad |x+۴|<\varepsilon$

$|x+۴|<\frac{\varepsilon}{۹} \quad \delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{۹},۱\right\}$

۸۸) $\lim\limits_{r\to ٥}\frac{۲}{r-۳}=۱$

$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \ni \forall x \in DF$

$|r-٥|<\delta \Rightarrow \left|\frac{۲}{r-۳}-۱\right|<\varepsilon$

$\frac{|r-٥|}{|r-۳|}<\varepsilon \quad ٤<r<٦$

$۱<r-۳<۳$

$\delta=\min\{۱,\varepsilon\}$

۸۹) $\lim\limits_{t\to ٤}\sqrt{t-۳}=۱$

$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \ni \forall x \in DF$

$|t-۴|<\delta=\left|\sqrt{t-۳}-۱\right|<\delta$

$\frac{۱}{۲}<t-۳<۳$

$\frac{۷}{۲}<t<\frac{۹}{۲} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱<\sqrt{t-۳}+۱<\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$

$\left|\sqrt{t-۳}-۱\right| \left|\sqrt{t-۲}+۱\right|<\varepsilon\left|\sqrt{t-۳}+۱\right|$

$|t-٤|<\varepsilon\left|\sqrt{t-۳}+۱\right|<\varepsilon(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$

$|t-٤|<\varepsilon(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱) \ \delta \min\left\{\frac{۱}{۲},(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)\right\}$

۹۰) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{٥-۲x}{۲x+۱}=۲$

$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \quad \ni \forall x \in DF$

$|x-۳|<\delta \Rightarrow \left|\frac{٥-۳x}{۲x+۱}-۲\right|<\varepsilon$

$\frac{|x-۳|}{|۲x+۱|}<\varepsilon \quad ۲<x<۴$

$۵<۲x+۱<۹$

$\frac{|x-۳|}{|۲x+۱|}<\frac{|x-۳|}{۵}<۴$

$|x-۳|<٥٤ \quad \delta=\min\{۱,٥٤\}$

۹۱) $\lim\limits_{x\to ۰} x=۰ \quad \sin\frac{۱}{x}$ کراندار

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ کراندار $f(x)=۰$

پس در $x=۰$ پیوسته است.

۹۲) $yx^{۲}=۱۲٥$

$y=\frac{۱۲٥}{x^{۲}} \quad c(x)=۸x^{۲}+١٦xy$

$=۸x^{۲}+١٦x\frac{۱۲}{x^{۲}}$

$c(x)=۸x^{۲}+\frac{۲۰۰}{x} \quad D_c=(۰,+\infty)$

ب) $\lim c(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to +\infty} c(x)=+\infty$

$c'=\frac{١٦x^{۳}-۲۰۰۰}{x}=۰ \quad x_{\min}=٥$

$c(٥)=-۲۰۰$

$c''(x)=\frac{۱۹x^{۳}+٤۰۰۰}{x^{۳}} \Rightarrow x=-٥\sqrt[۳]{٥}$

۹۳) الف) $A(x)=(x+٤)(\frac{٤۸}{x}+٦)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} A(x)=+\infty \quad (۱)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} A(x)=+\infty \quad (۲)$

در بازه رابطه (۱) منظور این است که اگر فرض متن چاپی آنقدر کوچک شود که مساحت صفحه بی‌نهایت شود یعنی عملاً می‌توان از عرض صفحه صرف‌نظر کرد.

اما در رابطه (۲) مشابه رابطه (۱) است اما با این تفاوت که این دفعه از طول صفحه می‌توان صرفه‌نظر کرد.

۹٤) $[1-x^2] \qquad -2 \le x \le 2$

الف) خیر $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

ب) خیر $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود نیست

۹۵) $0 \le x < 1 \qquad g(x)=0$

$1 < x < 2 \qquad g(x)=x-1$

$x=2 \qquad g(x)=2$

الف) بله $\lim g(x)=0$

ب) بله $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$

۹٦) $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in z \\ 0 & x\notin z \end{cases}$

ب) به ازای همه مقادیر a

پ) در $a\notin z$ پیوسته است

۹۷) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$

$\lim\limits_{x\to g(a)} f(x)=f(g(a))$

بنابر قضیه ۲-۱۷ g در a حد دارد و f در حد g پیوسته است در نتیجه

$\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))=f(g(a))$

۹۸) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=$

$\lim f(x)=$ موجود نیست $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

۹۹) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{[x^2]-[x]^2}{x^2-1}=0$

۱۰۰)

$\lim f(x+h)=f(x) \to V\beta>0 \, \exists>0 \quad (1)$

$0<|h|<\alpha$

$|f(x+h)-f(x)| \; <\beta$

ثابت می‌کنیم $f(x)=\lim f(x+h)$ برای این منظور گزاره زیر را ثابت می‌کنیم.

$-h=k \qquad -k=h \qquad \lim k=\lim\limits_{k\to 0} h=0 \qquad (2)$

$|-k|=|-1|\,|k|=|k|$

$\forall\beta>0 \quad \exists\alpha>0 \quad 0<|k|<\alpha$

$|f(x+k)-f(x)|<\beta$

گزاره اخیر هم‌ازز گزاره (۱) است و چون گزاره (۱) درست لذا این گزاره نیز درست است و چون گزاره اخیر از گزاره (۲) حاصل شده

۱۰۱) $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot\lim\dfrac{\pi x}{x(x-1)}=-\pi$

$f(0)=-\pi$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{2x-1}$

$=-\pi \qquad f(1)=-\pi$

۱۰۲)

چون تابع $[x]$ در نقاط غیرصحیح پیوسته است بنابراین داریم $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f(x)]=[L_1]$

۱۰۳)

اگر L صحیح باشد ممکن است حد وجود نداشته باشد.

۱۰٤) $\lim f(x)=L$

$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists\varepsilon>0 \;\ni \forall x\in DF$

$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\delta$

$f(x)=g(x) \quad |g(x)-L|-\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۱۰۵) الف) $f(x)=x^{۲}۳x^{۲}-٤x+۱۲$

$f(x)=(x^{۲}-\varepsilon)(x-۳)=۰$

$x=\pm ۲ \qquad x=۳$

ب) $h(x)\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-۳} & x\neq ۳\\ k & x=۳\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۳} h(x)=\lim \dfrac{(x^{۲}-٤)(x-۳)}{x-۳}=$

$\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-٤}{}=٥=k=h(-x)=h(x)$

زوج است (پ

۱۰۶) $f(x)=\begin{cases}۱-x^{۲} & ۰\leq x\leq ۱\\ \dfrac{x}{۲}+۱ & ۱< x\leq ۲\end{cases}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\dfrac{۳}{۲}$ پیوسته نیست

ب)

عمودی چون k وجود ندارد که $f(k)\Rightarrow \dfrac{۳}{۲}$ باشد.

۱۰۸) $f(x_۱)=M \qquad f(x_۲)=m$

فرض کنیم $x_۱<x_۲$

$f'(x)=۰$

$-f(x_۱)=-M \qquad -f(x_۲)=-m$

این مقادیر $-m,-M$ هستند.

۱۰۹) $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$ چون صعودی $\Rightarrow$

$R_f=[f(x),f(b)]$

$M=f(b)\ ,\ m=f(a)$

$a<b\Rightarrow f(b)<f(a)$

$D_f=[f(b),f(x)]$

$M=f(a) \qquad m=f(a)$

۱۱۰) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \forall x\in DF$

$|x-a|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$|(f(x))|-||f(a)||<|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

۱۱۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x)=M$

$L<M$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)<\lim\limits_{x\to ۰} g(x)\to \lim f(x)-\lim g(x)<۰$

$\lim[f(x)-g(x)]<۰$

$f(x)-g(x)<۰$

$f(x)<g(x)$

۱۱۲) $\lim f(x)=M\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

$M=L$

$\forall\dfrac{\varepsilon}{۲}>۰ \qquad E\delta>۰ \qquad \forall x\in DF$

$|x-a|<\delta$

$|f(x)-M|<\dfrac{\varepsilon}{۲}$

$|f(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{۲}$

$|M-L|=|M-f(x)+f(x)-L|\leq$

$|f(x)-M|+|f(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{۲}+\dfrac{\varepsilon}{۲}$

$۰\leq|M-L|<\dfrac{\varepsilon}{۲}\Rightarrow |M-L|=۰ \quad M=L$

۱۱۳) $f(x)=ax^{۲n-۱}+bx^{۲n}+cx^{۲n+۱}+\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

حداقل یک نقطه در فاصله $(-\infty,+\infty)$ وجـود دارد که

$f(c)=۰$

۱۱۴) $\forall\varepsilon>۰ \qquad \exists\delta>۰ \qquad \forall x\in DF$

$|x|<\delta$

$|x|<\varepsilon\to\delta\leq\varepsilon$

۱۱۵) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۳$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$ وجود ندارد

۱۱۶) $\lim\limits_{x\to +۱^-} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to +۱^+} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to +۱} f(x)=۲$

۱۱۷) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۰$ حد وجود ندارد

۱۱۸) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۱$ حد دارد

۱۱۹) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۱$

۱۲۰) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$ وجود ندارد

۱۲۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$ وجود ندارد

۱۲۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

۱۲۳) $\lim\limits_{z\to -۵} \dfrac{z^۲-۵}{z+۵}=\dfrac{(z-۵)(z+۵)}{(z+۵)}=۱$

۱۲۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\frac{۱}{۲}\pi - x}=$

$\dfrac{\pi}{۲}-x=t \qquad x=\dfrac{\pi}{۲}-t$

$\lim\limits_{t\to ۰} \dfrac{۱-\sin(\frac{\pi}{۲}-t)}{t}=\dfrac{۱-\cos t}{t}$

هم ارزی $=\dfrac{\frac{t^۲}{۲}}{\frac{t}{۱}}=\dfrac{t}{۲}=۰$

روش دوم : با استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت

$\lim \dfrac{۱-\sin x}{\pi n - x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{-\cos x}{-۱}=۰$

۱۲۵) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۱۱$

۱۲۶) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۱۰$

۱۲۷) $\lim\limits_{x\to ٤} g(x)=\dfrac{(x-٤)(x+٤)}{(x-٤)}=۸$

۱۲۸) $\lim \dfrac{۱}{۲}-\dfrac{x^۲}{۲٤}=\lim\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱}{۲}$

طبق قضیه فشردگی $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲}=\dfrac{۱}{۲}$

۱۲۹) $-x<x^۲\cdot\sin\dfrac{۱}{x}<x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} -x=\lim\limits_{x\to ۰} x=۰$

طبق قضیه فشار $\Rightarrow \lim x^۲\cdot\sin\dfrac{۱}{x}=۰$

$\lim\dfrac{۱}{۲}-\dfrac{x^۲}{۲٤}<\lim\dfrac{۱-\cos x}{x^۲}<\lim\dfrac{۱}{۲}$

قضیه فشار $\Rightarrow \lim\dfrac{۱-\cos x}{x^۲}=\dfrac{۱}{۲}$

۱۳۰) الف) ۱-

ب) ۱-

پ) ۱-

۱۳۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۲-٤=+\infty$

$\forall M>۰ \qquad \exists N\in N \ \ni x>M\Rightarrow f(x)>N$

$x^۲-٤>N \qquad x^۲>N+٤\Rightarrow x>\sqrt{N+٤}$

$M\geq\left\lfloor\sqrt{N+٤}+۱\right\rfloor$ قابل قبول

۱۳۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}(٦-x-x^۲)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\forall x>0 \quad \exists \quad x>N \to f(x)<-M$

$f(x)<-M \to -(x^2+x-6)<-M \to$

$-(x+3)(x-2)<-M \to (x+3)(x-3)<M$

۱۳۳) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{x}=-2$

$\left|\frac{3-2x}{x}+2\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{3-2x+2x}{x}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{3}{x}\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{x}{3}\right|>\frac{1}{\varepsilon} \qquad x>\frac{3}{\varepsilon}$

۱۳۴)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9x+1}{3x-2}=3$

$\left|\frac{(9x+1)}{(3x-2}-3\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{9x+1-9x+6}{3x-2}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{7}{3x-2}\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{3x-2}{7}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$

$3x-2>\frac{7}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad 3x>\frac{7}{\varepsilon}+2 \Rightarrow x>\frac{\frac{7}{\varepsilon}+2}{3}$

۱۳۵)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8x+3}{2x-1}=4$

$\left|\frac{8x+3}{2x-1}-4\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{8x+3-8x+4}{2x-1}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{7}{2x-1}\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{2x-1}{7}\right|>\frac{1}{\varepsilon} \qquad 2x-1>\frac{7}{\varepsilon}$

$2x>\frac{2}{\varepsilon}+1 \qquad x>\frac{\frac{7}{\varepsilon}+1}{2}$

۱۳۶) $c(x)=4000x$

۱۳۷) در هر دقیقه ۲۵ لیتر آب که هر لیتر آن شامل ۳۰ گرم نمک است در مخزن ریخته می‌شود

غلظت نمک = $\frac{\text{مقدار نمک}}{\text{مقدار کل آب}}$

پس مقدار کل نمک در یک دقیقه ۳۰ × ۲۵

$c(t)=\frac{25\times 30(t)}{500+25(t)}=\frac{30t}{25+t}$

ب)

$\lim c(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{30t}{20+t}=\lim\frac{30t}{t(\frac{20}{t}+1)}<30\frac{gr}{lit}$

۱۳۸) الف) $|t^2-9|<\frac{1}{10} \qquad 0<|t-3|<\delta$

$|t-3||t+3|<\frac{1}{10}\Rightarrow |t-3|<\frac{1}{10(t+3)}$

ب) $|t^2-9|<\frac{1}{100} \qquad |t-3||t-3|<\frac{1}{100}$

$|t-3|<\frac{1}{100(t+3)}$

پ) $|t^2-9|<\varepsilon \qquad |t-3|<\frac{\varepsilon}{t+3}$

۱۳۹) $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9 \qquad \forall \varepsilon>0 \qquad |x-3|<\delta \to$

$|f(x)-9|<\delta \to |f(x)-9|<\varepsilon$

$|x-3|<\delta \to |x^2-9|<\varepsilon \to |x+3||x-3|<\varepsilon$

$|x-3|<\frac{\varepsilon}{|x-3|}$

شعاع $|x-3|<1$, $-1<x-3<1$, $\underset{\min}{2}<x<\underset{\max}{4}$

همسایگی

در اینجا شعاع همسایگی را ۲ گرفته ایم اما می توان ۱ یا ۲ یا ε یا $\frac{3}{\varepsilon}$ ... تا نزدیک ۶ گرفت.

۱۴۰) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L \quad \forall\frac{\varepsilon}{2}>0 \quad 0<x<\delta \to$

$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

فرض می کنیم حد $0<x<\delta \to |1-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

دارد

و حد آن L است.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=L \to \forall\frac{\varepsilon}{2}>0 \ \exists \ \delta>0$

$-\delta<x<0 \to |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{L} \to |-1-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$|1-L|+|1+L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\rightarrow|1-L+1+L|<\delta$$

$$\rightarrow|2|<\varepsilon$$

این تناقض است زیرا ممکن است $\varepsilon < 2$ باشد.

$$|a+b|<|a|+|b|$$

۱۴۱) $\frac{1}{\sqrt{x}}<\%0.01 \qquad \sqrt{x}>10^{4} \qquad x>10^{8}$

۱۴۳) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^{4}}=+\infty$

$$\left|\frac{1}{(x+3)^{4}}\right|>N$$

$$|x+3|<\sqrt[4]{N}=\delta$$

۱۴۴) $\lim_{x\to -1^{-}}\frac{5}{(x+1)^{3}}=-\infty$

$$\exists \quad |x+1|<\delta \ni: \left|\frac{5}{(x+1)^{3}}\right|<N$$

۱۴۵)

$$\forall N>0,\ \exists M>0 \Rightarrow x>M,\ x\in D_f \Rightarrow$$

$$x^{3}>N\Rightarrow x>\sqrt[3]{N}\Rightarrow M\geq\sqrt[3]{N}$$

۱۴۶) الف)

$$\forall N>0,\ \exists M>0\Rightarrow x>M,\ f(x)<N$$

ب) $\forall N>0,\ \exists M>0\Rightarrow x<-M,\ f(x)>N$

ج)

$$\forall N>0,\ \exists M>0\Rightarrow x<-M,\ f(x)<-N$$

۱۴۷) $(x^{2}-4)>N\Rightarrow x^{2}>N-4\Rightarrow$

$$x>\sqrt{N-4}\Rightarrow M\geq\sqrt{N-4}$$

۱۴۸) الف) $\left|\frac{x^{2}+2x}{x^{2}-1}-1\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{x^{2}+2x-x^{2}+1}{x^{2}-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x^{2}-1}\right|<\varepsilon\overset{x\to+\infty}{\Rightarrow}$$

$$\frac{2x+1}{x^{2}-1}<\varepsilon$$

ب) $\left|\frac{x}{x-1}-1\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{x-x+1}{x-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon\overset{x\to+\infty}{\Rightarrow}\frac{1}{x-1}<\varepsilon\Rightarrow x-1>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$x>\frac{1}{\varepsilon}+1\Rightarrow N\geq\frac{1}{\varepsilon}+1$$

۱۴۹) $\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x-2)^{2}}=+\infty$

$$\forall N>0,\ \exists\delta>0\Rightarrow 0<|x-2|<\delta$$

$$\left|\frac{3}{(x-2)^{2}}\right|>N\Rightarrow\left|\frac{(x-2)^{2}}{3}\right|<\frac{1}{N}\Rightarrow$$

$$|(x-2)^{2}|<\frac{3}{N}\Rightarrow|x-2|<\sqrt{\frac{3}{N}}\Rightarrow\delta\leq\sqrt{\frac{3}{N}}$$

۱۵۰) $\lim_{x\to 4}\frac{-2}{(x-4)^{2}}=-\infty$

$$\forall N>0,\ \exists\delta>0\Rightarrow 0<|x-4|<\delta\Rightarrow$$

$$\left|\frac{-2}{(x-4)^{2}}\right|<-N\Rightarrow\left|\frac{(x-4)^{2}}{-2}\right|>-N\Rightarrow$$

$$|(x-4)^{2}|>2N\Rightarrow|x-4|>\sqrt{2N}\Rightarrow\delta\geq\sqrt{2N}$$