

بعض اول : اعداد اول

اعداد اول : اعداد طبیعی که تنها دو شمارنده دارند.

اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ : ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷

سوال : در بک بیشترین فاصله ۳ عدد اول متوالی را

یک میلیون را بید و اعداد را نیز بگویند روش سوال - پاسخ

باعداد مرکب : اعداد طبیعی که بیشترین از ۲ مقدهم علیه داشته

باشند. ①

اعداد طبیعی اعداد اول

اعداد مرکب  
حال : صحت جمله یا نادرستی آنرا

« هر عدد طبیعی حداقل دو مقدهم علیه اول دارد » X

غلط ( به خاطر ۱ )  
صحت

مثال: مجموع دو عدد اول ۸۱ است. تفاضل آنها را بنویسید.  
 ۷۹ و ۲

$$\left. \begin{array}{l} \text{عدد اول} \\ \text{مجموع دو عدد اول} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + 79 = 81 \\ 79 - 2 = 77 \end{array}$$

اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول، عدد شش رقمی از آنها حتماً دو هاست.

اگر حاصل ضرب دو عدد اول نوع شش رقمی حتماً یکی از آنها ۲ است.

مثال: مجموع کفایت دو عدد اول ۲۲۰۵ است. کفایت هفتمین

چند است؟

$$2205 = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$2205 = 3 \times 5 \times 7^3$$

$$2205 = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$$

مثال: اولی اعشاری حاصل عملیات  $1000 \times 1000$  بر ۱۰۰۰

عدد طبیعی اول است. راست گفته یا چپ؟

چپ است زیرا  $1000 \times 1000 = 1000000$

مثال: مجموع دو عدد اول ۸۱ است. تفاضل آنها را بنویسید.

۷۱ و ۱۰

$$\left. \begin{array}{l} \text{عدد اول} \\ \text{مجموع} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x - 11 = 71 \\ 2x - 11 + 11 = 71 + 11 \\ 2x = 82 \\ x = 41 \end{array}$$

عدد اول دومین عدد اول است. عدد اول اولی از

آنها حتماً دو هست.

اگر حاصل ضرب دو عدد اول نوع ششده حتماً یکی از آنها ۲ است.

مثال: مجموع مکعبات دو عدد اول ۲۲۰۵ است. یک عدد کوچکتر

$$\begin{array}{l} \text{چند است؟} \\ 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 2205 \\ 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3383 \\ 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2169 \\ 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 = 1296 \\ 2^3 + 3^3 + \dots + 7^3 = 784 \end{array}$$

مثال: اولی اعشاری حاصل عبارت  $11111 \div 11$  به ازای

هر  $n$  طبیعی اولی است. راست گفته یا چپ؟

چپ است برای  $n$  حتماً فرد

تقسیم: تعداد اعداد اول تا عدد است

اثبات:

فرض می کنیم اعداد اول عدد باشند یعنی فقط دو عدد اول دارند پس اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$
  
$$(P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_n) + 1$$

باقی مانده تقسیم این عدد بر تمام اعداد اول  $P_1$  تا  $P_n$  برابر 1 است

پس بر هیچ کدام بخش پذیر نیست

اگر این عدد اول باشد عدد اولی بجز  $P_1$  تا  $P_n$  می باشد. اگر هم

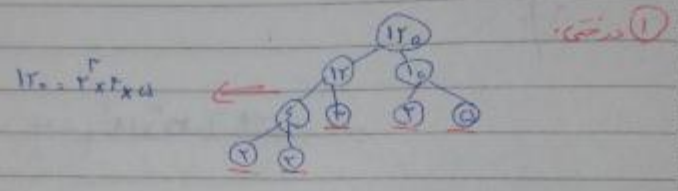
مربک باشد عدد اولی بجز  $P_1$  تا  $P_n$  بخش پذیر  $\leftarrow$  تعداد اعداد

اول تا عدد است

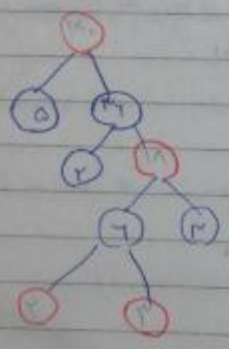
\* تجزیه یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول آن نوشتن آن

عدد بصورت حاصل ضرب اعداد اول

\* روش ها تجزیه



مثال: نمودار درختی زیر را کامل کنید.



Subject: \_\_\_\_\_  
 Year: \_\_\_\_\_ Month: \_\_\_\_\_ Date: \_\_\_\_\_

② روش غلی :

$1200$	$\Delta$
$250$	$r$
$120$	$r$
$70$	$\omega$
$12$	$r$
$\Sigma$	$r$
$1$	$r$

ماتریس

$1200$	$2 \times 5$
$120$	$2 \times 5 \Rightarrow 1200 = 2 \times 5 \times 120$
$12$	$2 \times 2 \times 3$

مثال ۱ عدد  $1200 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$  تجزیه کنیم

$$1200 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$$

مثال ۲ معوضه های اول  $2, 3, 5$  را بنویسید

$$1200 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$$

مثال ۳ حاصل ضرب معوضه های  $2^4$  چند است؟

$$2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{16}$$

مثال ۴ حاصل معوضه های  $2^{100}$  بنویسید

$$2^{100} = 2^2 \times 2^2 \times \dots \times 2^2$$

مثال: چند عدد سه رقمی داریم که عامل اولشان ۳ باشد؟

$$3^0 \times 10^2$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ را بیابید که تنها عامل اول آن

$$3^0 \times 10^2$$

۲ یا ۳ داشته باشد.

$$3^0 \times 10^2 - 3^0 \times 10^1 - 3^0 \times 10^0$$

\* قضیه: اگر تقویم عددی  $a^p \times b^q \times c^r$  باشد تعداد مقسوم علیه‌های

طبیعی آن مساوی است با:  $(p+1)(q+1)(r+1) \dots$

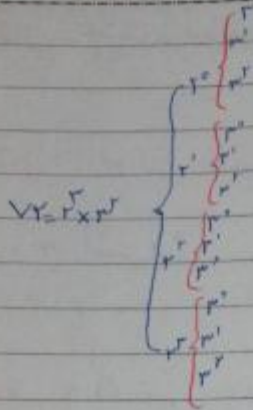
برای یافتن مقسوم علیه‌ها ابتدا به سراغ پایه  $p$  می‌رویم، این پایه

در مقسوم علیه‌ها  $a^0$  پایه دارد. سپس به سراغ  $q$  می‌رویم که این حالت

دارد و بدین ترتیب تا آخر.

اصل ضرب، تعداد کل حالات (مقسوم علیه‌ها) مساوی است با:

$$(p+1)(q+1)(r+1) \dots$$



مثال: تعداد متغیر علی‌های  $\lambda$  چند تا است؟

$$Y = X^T X X^T$$

$$(X^T X)^T (X^T X) = X^T X X^T X = X^T X X^T \Rightarrow \text{rank}(Y) = \text{rank}(X)$$

مثال: اما چند متغیر علی‌ها دارد؟

$$\text{rank}(Y) = \text{rank}(X) = 3$$

مثال: اگر  $\lambda$  دارای  $\lambda^2$  متغیر علی‌ها ~~بودن~~ باشد  $\alpha$  چند متغیر علی‌ها

اول دارد؟  $\lambda^2$  اگر  $\lambda$  دارای  $\lambda^2$  باشد اولی است.

هم از جایی  $\lambda^2$  باید متغیر علی‌ها ~~باشد~~ و توان  $\lambda^2$  است.



مثال ۱۰: عدد  $x$  دارای ۱۳ مقسوم علیه باشد،  $x^2$  چند مقسوم علیه دارد؟  
 ۱۳ مقسوم علیه دارد  $\rightarrow x^2 = (\text{پایه})^{2 \times 6} \rightarrow x^2 = (\text{پایه})^{12}$

مثال ۱۱: کوچکترین عدد طبیعی که ۱۱ مقسوم علیه دارد چند است؟  
 $2^{10} - 2^0 = 1024$

مثال ۱۲: کوچکترین عدد طبیعی که ۱۳ مقسوم علیه داشته باشد چند است؟  
 ۱۳ است؟  
 $11 \times 2 = 22$   
 $11 \times 3 = 33$   
 $11 \times 4 = 44$   
 $11 \times 5 = 55$   
 $11 \times 6 = 66$   
 $11 \times 7 = 77$   
 $11 \times 8 = 88$   
 $11 \times 9 = 99$   
 $11 \times 10 = 110$   
 $11 \times 11 = 121$   
 $11 \times 12 = 132$   
 $11 \times 13 = 143$   
 $11 \times 14 = 154$   
 $11 \times 15 = 165$   
 $11 \times 16 = 176$   
 $11 \times 17 = 187$   
 $11 \times 18 = 198$   
 $11 \times 19 = 209$   
 $11 \times 20 = 220$   
 $11 \times 21 = 231$   
 $11 \times 22 = 242$   
 $11 \times 23 = 253$   
 $11 \times 24 = 264$   
 $11 \times 25 = 275$   
 $11 \times 26 = 286$   
 $11 \times 27 = 297$   
 $11 \times 28 = 308$   
 $11 \times 29 = 319$   
 $11 \times 30 = 330$   
 $11 \times 31 = 341$   
 $11 \times 32 = 352$   
 $11 \times 33 = 363$   
 $11 \times 34 = 374$   
 $11 \times 35 = 385$   
 $11 \times 36 = 396$   
 $11 \times 37 = 407$   
 $11 \times 38 = 418$   
 $11 \times 39 = 429$   
 $11 \times 40 = 440$   
 $11 \times 41 = 451$   
 $11 \times 42 = 462$   
 $11 \times 43 = 473$   
 $11 \times 44 = 484$   
 $11 \times 45 = 495$   
 $11 \times 46 = 506$   
 $11 \times 47 = 517$   
 $11 \times 48 = 528$   
 $11 \times 49 = 539$   
 $11 \times 50 = 550$   
 $11 \times 51 = 561$   
 $11 \times 52 = 572$   
 $11 \times 53 = 583$   
 $11 \times 54 = 594$   
 $11 \times 55 = 605$   
 $11 \times 56 = 616$   
 $11 \times 57 = 627$   
 $11 \times 58 = 638$   
 $11 \times 59 = 649$   
 $11 \times 60 = 660$   
 $11 \times 61 = 671$   
 $11 \times 62 = 682$   
 $11 \times 63 = 693$   
 $11 \times 64 = 704$   
 $11 \times 65 = 715$   
 $11 \times 66 = 726$   
 $11 \times 67 = 737$   
 $11 \times 68 = 748$   
 $11 \times 69 = 759$   
 $11 \times 70 = 770$   
 $11 \times 71 = 781$   
 $11 \times 72 = 792$   
 $11 \times 73 = 803$   
 $11 \times 74 = 814$   
 $11 \times 75 = 825$   
 $11 \times 76 = 836$   
 $11 \times 77 = 847$   
 $11 \times 78 = 858$   
 $11 \times 79 = 869$   
 $11 \times 80 = 880$   
 $11 \times 81 = 891$   
 $11 \times 82 = 902$   
 $11 \times 83 = 913$   
 $11 \times 84 = 924$   
 $11 \times 85 = 935$   
 $11 \times 86 = 946$   
 $11 \times 87 = 957$   
 $11 \times 88 = 968$   
 $11 \times 89 = 979$   
 $11 \times 90 = 990$   
 $11 \times 91 = 1001$   
 $11 \times 92 = 1012$   
 $11 \times 93 = 1023$   
 $11 \times 94 = 1034$   
 $11 \times 95 = 1045$   
 $11 \times 96 = 1056$   
 $11 \times 97 = 1067$   
 $11 \times 98 = 1078$   
 $11 \times 99 = 1089$   
 $11 \times 100 = 1100$

مثال ۱۳: چند مقسوم علیه مرکب دارد؟  
 $126 = 2 \times 3^2 \times 7$   
 $126^2 = 2^2 \times 3^4 \times 7^2$   
 $126^3 = 2^3 \times 3^6 \times 7^3$   
 $126^4 = 2^4 \times 3^8 \times 7^4$   
 $126^5 = 2^5 \times 3^{10} \times 7^5$   
 $126^6 = 2^6 \times 3^{12} \times 7^6$   
 $126^7 = 2^7 \times 3^{14} \times 7^7$   
 $126^8 = 2^8 \times 3^{16} \times 7^8$   
 $126^9 = 2^9 \times 3^{18} \times 7^9$   
 $126^{10} = 2^{10} \times 3^{20} \times 7^{10}$   
 $126^{11} = 2^{11} \times 3^{22} \times 7^{11}$   
 $126^{12} = 2^{12} \times 3^{24} \times 7^{12}$   
 $126^{13} = 2^{13} \times 3^{26} \times 7^{13}$   
 $126^{14} = 2^{14} \times 3^{28} \times 7^{14}$   
 $126^{15} = 2^{15} \times 3^{30} \times 7^{15}$   
 $126^{16} = 2^{16} \times 3^{32} \times 7^{16}$   
 $126^{17} = 2^{17} \times 3^{34} \times 7^{17}$   
 $126^{18} = 2^{18} \times 3^{36} \times 7^{18}$   
 $126^{19} = 2^{19} \times 3^{38} \times 7^{19}$   
 $126^{20} = 2^{20} \times 3^{40} \times 7^{20}$   
 $126^{21} = 2^{21} \times 3^{42} \times 7^{21}$   
 $126^{22} = 2^{22} \times 3^{44} \times 7^{22}$   
 $126^{23} = 2^{23} \times 3^{46} \times 7^{23}$   
 $126^{24} = 2^{24} \times 3^{48} \times 7^{24}$   
 $126^{25} = 2^{25} \times 3^{50} \times 7^{25}$   
 $126^{26} = 2^{26} \times 3^{52} \times 7^{26}$   
 $126^{27} = 2^{27} \times 3^{54} \times 7^{27}$   
 $126^{28} = 2^{28} \times 3^{56} \times 7^{28}$   
 $126^{29} = 2^{29} \times 3^{58} \times 7^{29}$   
 $126^{30} = 2^{30} \times 3^{60} \times 7^{30}$   
 $126^{31} = 2^{31} \times 3^{62} \times 7^{31}$   
 $126^{32} = 2^{32} \times 3^{64} \times 7^{32}$   
 $126^{33} = 2^{33} \times 3^{66} \times 7^{33}$   
 $126^{34} = 2^{34} \times 3^{68} \times 7^{34}$   
 $126^{35} = 2^{35} \times 3^{70} \times 7^{35}$   
 $126^{36} = 2^{36} \times 3^{72} \times 7^{36}$   
 $126^{37} = 2^{37} \times 3^{74} \times 7^{37}$   
 $126^{38} = 2^{38} \times 3^{76} \times 7^{38}$   
 $126^{39} = 2^{39} \times 3^{78} \times 7^{39}$   
 $126^{40} = 2^{40} \times 3^{80} \times 7^{40}$   
 $126^{41} = 2^{41} \times 3^{82} \times 7^{41}$   
 $126^{42} = 2^{42} \times 3^{84} \times 7^{42}$   
 $126^{43} = 2^{43} \times 3^{86} \times 7^{43}$   
 $126^{44} = 2^{44} \times 3^{88} \times 7^{44}$   
 $126^{45} = 2^{45} \times 3^{90} \times 7^{45}$   
 $126^{46} = 2^{46} \times 3^{92} \times 7^{46}$   
 $126^{47} = 2^{47} \times 3^{94} \times 7^{47}$   
 $126^{48} = 2^{48} \times 3^{96} \times 7^{48}$   
 $126^{49} = 2^{49} \times 3^{98} \times 7^{49}$   
 $126^{50} = 2^{50} \times 3^{100} \times 7^{50}$

مثال ۱۴:  $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97 \times 101 \times 103 \times 107 \times 109 \times 113 \times 127 \times 131 \times 137 \times 139 \times 149 \times 151 \times 157 \times 163 \times 167 \times 173 \times 179 \times 181 \times 191 \times 193 \times 197 \times 199$

مجموعه مقسوم علیه فرد دارد  
 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مجموع مقسوم علیه های  $n$  مساوی است  
 تعداد مقسوم علیه ها  
 $n$   
 سال ۲۴

۲۴: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴

اثبات: مقسوم علیه های هر عدد جفت هستند و حاصل ضرب

هر جفت از آنها  $n$  است. پس توقع حاصل کردن حاصل ضرب

مقسوم علیه های  $n$  به جای یکدیگر  $\sqrt{n}$  گذاشت. (اگر عدد

عدد مقسوم علیه ها  $(\sqrt{n})$  حاصل ضرب مقسوم علیه ها  
 $= (n+1)$  عدد مقسوم علیه ها

مثال: حاصل ضرب متوالی‌های  $7, 10, 13, \dots$  چند است؟

$$7 \times 10 \times 13 \times \dots \times (7 + 3(n-1))$$

مثال: حاصل ضرب متوالی‌های  $2, 4, 6, \dots$  چند است؟

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$$

نکته ۱: کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  را با

علامت  $(a, b)$  یا  $\text{H.C.F}$  نشان می‌دهیم. برای بدست

آوردن  $\text{H.C.F}$  اعداد را تجزیه کرده و پایه‌های مشترک با کوچک

ترین توان را انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

نکته ۲: کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  را با علامت

$[a, b]$  یا  $\text{L.C.M}$  نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن  $\text{L.C.M}$  دو عدد

آنها را تجزیه کرده و تمام پایه‌ها با بیشترین توان را در هم ضرب می‌کنیم.

ویژگیات مهم و نکات ۴:

۱) اگر  $a$  میان بخش پذیر باشد داریم:  $[a, b] = a$  و  $(a, b) = b$

۲) اگر  $(a, b) = 1$  باشد یعنی عامل مشترکی نداشته باشند، می‌توانیم

طریقه متباین هستند یا نسبت به هم اول اند.

۳) دو عدد اول مختلف حتماً متباین هستند.

۴) دو عدد متوالی متباین هستند. اثبات: اگر دو عدد هر دو بر  $x$

بخش پذیر باشند، فاصلدی آنها مضرب از  $x$  است. الآن فاصله

اعداد ما  $1$  است و فقط عدد  $1$  مضرب  $1$  است، پس آنها

نسبت به هم اول دارند یک است.

مشکل: بتوان کم

۵)  $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$

منه مشکل بتوان زیاد

اگر  $a$  و  $b$  متباین باشند داریم:  $[a, b] = ab$  (7)

$$(a, b) \cdot d = (ak, bk) \cdot dk$$

$$(a, b) \cdot d = (a^k \cdot b^k) \cdot d^k$$

و در همین ترتیب برای  $k=1$  نیز همین قانون ما داریم.

اگر  $a$  و  $b$  یک عدد بخش‌پذیر باشند،  $(a, b)$  نیز بر آن بخش‌پذیر است.

مثلاً اگر  $12$  و  $18$  بر عددی بخش‌پذیر باشند، آنگاه  $6$  بر آن بخش‌پذیر است.

اگر عددی بر  $a$  و  $b$  بخش‌پذیر باشد، هر یک از آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

مثلاً اگر عددی بر  $12$  و  $18$  بخش‌پذیر باشد، بر  $6$  نیز بخش‌پذیر است.

مثال: کوچکترین عدد ۳ رقمی که باقی مانده‌ی آن بر ۳ و ۵ و ۷ برابر

۱. ۳ شود چند است؟  $[3, 5, 7] \times 3$

$3 \times 3 = 9$        $7 \times 3 = 21$        $5 \times 3 = 15$   
 $21 \times 3 = 63$  ✓

مثال: کوچکترین عدد طبیعی که بر ۷ بخش پذیر است و در تقسیم

بر ۳ و ۵ و ۷ باقی مانده‌ی آن ۲، ۱ و ۳ باشد

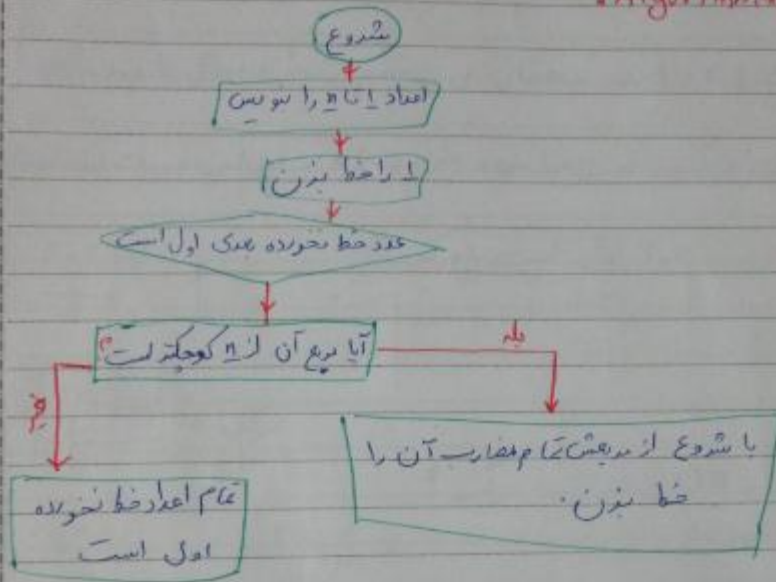
$[3, 5, 7] \times 70 \rightarrow 70, 140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, 700, 770, 840, 910, 980, 1050$   
 است؟  $1050$  ✓

\* عنوان اول تستن (برای یافتن اعداد اول تا ۱۰۰) \*

مثال تا عدد ۱۰۰

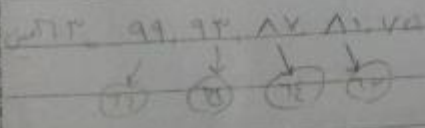
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

Algorithm



مثال: در روش غربال اراتستن برای یافتن اعداد اول

1 تا 100 این عددی که خطی نخورد چند است؟  
 $100 \rightarrow 2 \rightarrow 50 \rightarrow 3 \rightarrow 33 \rightarrow 4 \rightarrow 25 \rightarrow 5 \rightarrow 20 \rightarrow 6 \rightarrow 16 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 9 \rightarrow 11$



\* طریقه تشخیص اول یا مرکب بودن n:

از 1 تا n را در ذهنمان می نویسیم و روش غربال را روی آنها  
اجرای کنیم. اگر n خط خورد، مرکب؛ و در غیر این صورت اول است.

**مثال ۱:** ۲۰۳ اول است یا مرکب؟

۲۰۳		۲
<hr/>		
		۱۰۱
x		

۲۰۳		۳
<hr/>		
		۶۷
x		

۲۰۳		۵
<hr/>		
		۴۰
x		

۲۰۳		۷
<hr/>		
		۲۹
x		

→ مرکب

**مثال ۲:** ۲۱۱ اول است یا مرکب؟

۲۱۱		۲
<hr/>		
		۱۰۵
x		

۲۱۱		۳
<hr/>		
		۷۰
x		

۲۱۱		۵
<hr/>		
		۴۲
x		

۲۱۱		۷
<hr/>		
		۳۰
x		

۲۱۱		۱۱
<hr/>		
		۱۹
x		

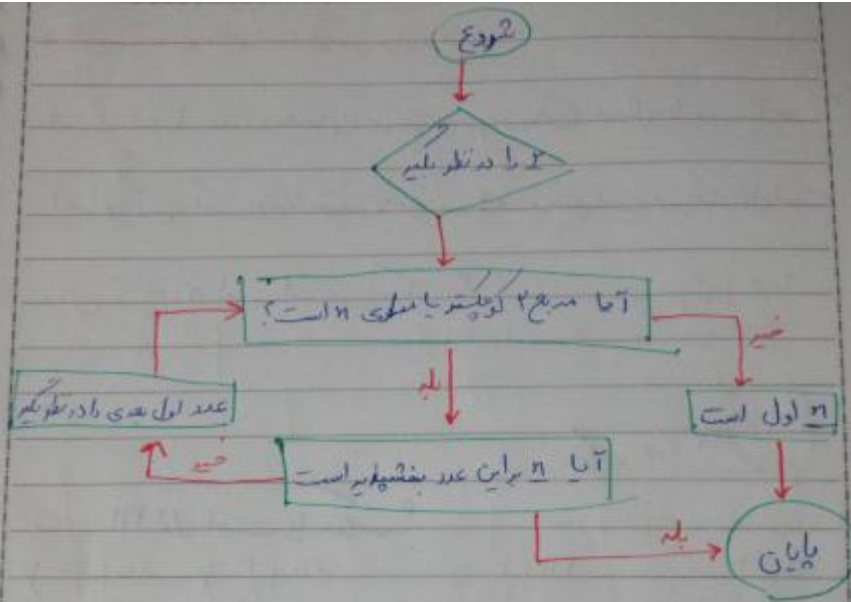
۲۱۱		۱۳
<hr/>		
		۱۶
x		

۲۱۱		۱۷
<hr/>		
		۱۲
x		

اول است

\* نتیجه: n را بر تمام اعداد اولی که مربعشان از n کوچکتر  
است تقسیم می کنیم.





مثال: در عددهای ۱ تا ۱۰۰ عدد ۸۵ چندمین عددی است که خطا  
 عددی  $\rightarrow$  ۴۹ (۱)  $\rightarrow$  ۵۰ (۲)  $\rightarrow$  ۵۱ (۳)  $\rightarrow$  ۵۲ (۴)  $\rightarrow$  ۵۳ (۵)  $\rightarrow$  ۵۴ (۶)  $\rightarrow$  ۵۵ (۷)  $\rightarrow$  ۵۶ (۸)  $\rightarrow$  ۵۷ (۹)  $\rightarrow$  ۵۸ (۱۰)  $\rightarrow$  ۵۹ (۱۱)  $\rightarrow$  ۶۰ (۱۲)  $\rightarrow$  ۶۱ (۱۳)  $\rightarrow$  ۶۲ (۱۴)  $\rightarrow$  ۶۳ (۱۵)  $\rightarrow$  ۶۴ (۱۶)  $\rightarrow$  ۶۵ (۱۷)  $\rightarrow$  ۶۶ (۱۸)  $\rightarrow$  ۶۷ (۱۹)  $\rightarrow$  ۶۸ (۲۰)  $\rightarrow$  ۶۹ (۲۱)  $\rightarrow$  ۷۰ (۲۲)  $\rightarrow$  ۷۱ (۲۳)  $\rightarrow$  ۷۲ (۲۴)  $\rightarrow$  ۷۳ (۲۵)  $\rightarrow$  ۷۴ (۲۶)  $\rightarrow$  ۷۵ (۲۷)  $\rightarrow$  ۷۶ (۲۸)  $\rightarrow$  ۷۷ (۲۹)  $\rightarrow$  ۷۸ (۳۰)  $\rightarrow$  ۷۹ (۳۱)  $\rightarrow$  ۸۰ (۳۲)  $\rightarrow$  ۸۱ (۳۳)  $\rightarrow$  ۸۲ (۳۴)  $\rightarrow$  ۸۳ (۳۵)  $\rightarrow$  ۸۴ (۳۶)  $\rightarrow$  ۸۵ (۳۷)  $\rightarrow$  ۸۶ (۳۸)  $\rightarrow$  ۸۷ (۳۹)  $\rightarrow$  ۸۸ (۴۰)  $\rightarrow$  ۸۹ (۴۱)  $\rightarrow$  ۹۰ (۴۲)  $\rightarrow$  ۹۱ (۴۳)  $\rightarrow$  ۹۲ (۴۴)  $\rightarrow$  ۹۳ (۴۵)  $\rightarrow$  ۹۴ (۴۶)  $\rightarrow$  ۹۵ (۴۷)  $\rightarrow$  ۹۶ (۴۸)  $\rightarrow$  ۹۷ (۴۹)  $\rightarrow$  ۹۸ (۵۰)  $\rightarrow$  ۹۹ (۵۱)  $\rightarrow$  ۱۰۰ (۵۲)

