Subject:
Year: Month: Date:

* فصل اول: اعداد اول *

* اعداد اول: اعداد طبیعی که فقط دو شمارنده دارند.

اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ : ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ~~۹۱~~، ۹۷

۱۳×۷

سوال: در یک بیشترین فاصله ۲ عدد اول متوالی را تا یک میلیون را بیابید و اعداد را نیز بگویید. $\boxed{\text{روش غربال}}$ $\boxed{\text{۱۰ امتیاز}}$

* اعداد مرکب: اعداد طبیعی که بیشتر از ۲ مقسوم علیه داشته باشند.

۱

* اعداد طبیعی
- اعداد اول
- اعداد مرکب

سوال: صحت جمله زیر را بررسی کنید.

✗ «هر عدد طبیعی حداقل دو مقسوم علیه اول دارد» ✗

غلط (به خاطر ۱)

فقط

MOBASHER

مثال: مجموع دو عدد اول ۸۱ است. تفاضل آنها را بنویسید.

← اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول، فرد بشود، یکی از آنها حتماً دو هست.

← اگر حاصل ضرب دو عدد اول زوج شود، حتماً یکی از آنها ۲ است

مثال: مجموع مکعبات دو عدد اول ۲۲ است. مکعب مجموعشان چند است؟

مثال: ادعا کرده‌اند حاصل عبارت n^2+n+41 به ازای هر n طبیعی اول است. راست گفته یا خیر؟

Subject:
Year: Month: Date:

مثال: مجموع دو عدد اول ۸۱ است. تفاضل آنها را بنویسید.

$\boxed{۲ \text{ و } ۷۹}$

$۲+x=۸۱ \Rightarrow ۸۱-۲=۷۹$

$\boxed{۷۹-۲=۷۷}$

← اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول، فرد بشود، یکی از آنها حتماً دو هست.

← اگر حاصل ضرب دو عدد اول زوج بشود، حتماً یکی از آنها ۲ است.

مثال: مجموع مکعبات دو عدد اول ۲۲۰۵ است. مکعب مجموعشان چند است؟

$۲۲۰۵-۸=۲۱۹۷$

$۱۳+۲=۱۵ \quad ۱۵^۳=۳۳۷۵$

مثال: اولر ادعا کرد حاصل عبارت n^2+n+41 به ازای هر n طبیعی اول است. راست گفته یا خیر؟

… است برای ۴۰ جواب نمی‌دهد

MOBASHER

Month: Date:

*قضیه: تعداد اعداد اول نامحدود است.

اثبات:

فرض می کنیم اعداد اول محدود باشند یعنی فقط n عدد اول داریم به اسامی

$p_1, p_2, \ldots, p_n$. $(p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n)+1$

باقی مانده تقسیم این عدد بر تمام اعداد اول p_1 تا p_n برابر 1 است

پس بر هیچ کدام بخش پذیر نیست.

اگر این عدد اول باشد، عدد اولی بجز p_1 تا p_n پیدا شده. اگر هم

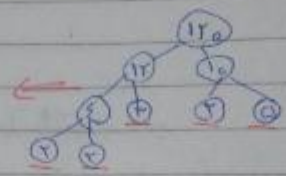
مرکب باشد، بر عدد اولی بجز p_1 تا p_n بخش پذیر ← تعداد اعداد

اول نامحدود است.

* تجزیه یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول آن ← نوشتن آن عدد به صورت حاصل ضرب اعداد اول

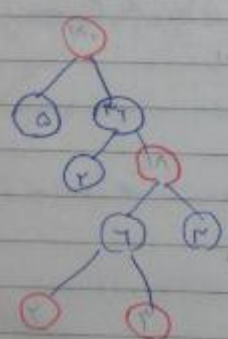
* روش ها تجزیه *

① درختی:



۱۲۰ = $۲^{۳}$ × ۳ × ۵

مثال: نمودار درختی زیر را کامل کنید.



Subject:
Year: Month: Date:

② روش خطی:

۱۲۰۰	۵
۲۴۰	۲
۱۲۰	۲
۶۰	۵
۱۲	۳
۴	۲
۲	۲
۱	

یا برعکس:

۱۲۰۰	۲×۵
۱۲۰	۲×۵
۱۲	۲×۲×۳

$\Longrightarrow$ $۱۲۰۰ = ۲^۴ \times ۵^۲ \times ۳$

مثال: عدد $۱۸۰^۴ \times ۳۴^۳$ را تجزیه کنید.

مثال: مقسوم علیه های اول ۳۶۰۰ را بیابید.

مثال: حاصل ضرب مقسوم علیه های $۲^{۱۰۰}$ چند است؟

مثال: حاصل جمع مقسوم علیه $۲^{۱۰۰}$ را بنویسید.

Year: Month: Date:

مثال: چند عدد سه رقمی داریم که عامل اولشان ۳ باشد؟

$۳^۵$ و $۳^۶$

مثال: تمام اعداد طبیعی بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ را بیابید که تنها عامل اول ۲ یا ۳ داشته باشند.

$۳^۰ \times ۲^۷ = ۱۲۸$ $۳ \times ۲^۶ = ۱۹۲$ $۳^۲ \times ۲^۴ = ۱۴۴$ $۳^۳ \times ۲^۲ = ۱۰۸$

* قضیه: اگر تجزیه عددی $p^a \times q^b \times r^c \ldots$ باشد تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی آن مساوی است با: $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots$

برای یافتن مقسوم علیه‌ها ابتدا به سراغ پایه p می‌رویم. این پایه در مقسوم علیه‌ها $a+1$ حالت دارد. سپس به سراغ q می‌رویم که $b+1$ حالت دارد و به همین ترتیب تا آخر.

اصل ضرب: تعداد کل حالات (مقسوم علیه‌ها) مساوی است با: $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots$

$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \begin{cases} ۲^۰ \begin{cases} ۳^۰ \\ ۳^۱ \\ ۳^۲ \end{cases} \\ ۲^۱ \begin{cases} ۳^۰ \\ ۳^۱ \\ ۳^۲ \end{cases} \\ ۲^۲ \begin{cases} ۳^۰ \\ ۳^۱ \\ ۳^۲ \end{cases} \\ ۲^۳ \begin{cases} ۳^۰ \\ ۳^۱ \\ ۳^۲ \end{cases} \end{cases}$$

مثال: تعداد مقسوم علیه‌های $۱۸^۳ \times ۲۴^۵$ چند تا است؟

$۱۸ = ۲ \times ۳^۲$ $۲۴ = ۲^۳ \times ۳$

$(۲ \times ۳^۲)^۳ (۲^۳ \times ۳)^۵ = ۲^۳ \times ۳^۶ \times ۲^{۱۵} \times ۳^۵ = ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۱} \Rightarrow \boxed{۱۹ \times ۱۲ = ۲۲۸}$

مثال: !۱۰ چند مقسوم علیه دارد؟

مثال: اگر x دارای ۱۳ مقسوم علیه ~~..~~ اول باشد، $x^۳$ چند مقسوم علیه اول دارد؟

هم اینها ۱۳ باید تشکیل شده ...

مثال: اگر x دارای ۱۳ مقسوم علیه باشد، x^3 چند مقسوم علیه دارد؟

$x = (\text{پایه})^{12} \rightarrow x^3 = (\text{پایه})^{36} \rightarrow$ ۳۷ مقسوم علیه دارد

مثال: کوچک ترین عدد طبیعی که ۱۱ مقسوم علیه دارد چند است؟

$2^{11-1} = 2^{10} = 1024$

مثال: کوچکترین عدد طبیعی که ۱۲ مقسوم علیه داشته باشد، چند است؟

$12 \times 1 \rightarrow 2^{11} = 2048$

$3 \times 4 \rightarrow 2^3 \times 3^2 = 72$

$2 \times 6 \rightarrow 2^5 \times 3 = 96$

$2 \times 2 \times 3 \rightarrow \boxed{60}$

$12 = 2 \times 2 \times 3 \rightarrow 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

مثال: ۷۲۰.

الف) چند مقسوم علیه مرکب دارد؟

720	5
144	3
48	3
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

$\underbrace{5 \times 3 \times 2}_{30} - 3 - 1 = 26$

ب) چند مقسوم علیه زوج دارد؟

$4 \times 3 \times 2 = \boxed{24}$

Year: Month: Date:

ج) چند مقسوم علیه فرد دارد؟

روش اول: $\ldots = 3 \times 2 = 6$

روش دوم: $30 - 24 = \boxed{6}$

* ~~مفهوم~~ تعمیم: حاصل ضرب مقسوم علیه‌های n مساوی است با: $n^{\frac{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}}{2}}$

مثال ۲۴:

$24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \longrightarrow 24^{4}$

اثبات: مقسوم علیه‌های هر عدد جفت هستند و حاصل ضرب هر جفت از آنها n است. پس موقع حساب کردن حاصل ضرب مقسوم علیه‌ها می‌توان به جای تک تک آن‌ها $\sqrt{n}$ گذاشت. (اگر مقسوم علیه‌ها فرد باشد نیز جواب می‌دهد)

حاصل ضرب مقسوم علیه‌ها $= (\sqrt{n})^{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}} = (n^{\frac{1}{2}})^{\text{تعداد مقسوم علیه‌ها}}$

MOBASHER

Year: Month: Date:

مثال: حاصل ضرب مقسوم علیه‌های ۷۲۰ چند است؟

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ تعداد مقسوم علیه $= 5 \times 3 \times 2 = 30$

$720^{\frac{30}{2}} = 720^{15}$

مثال: حاصل ضرب مقسوم علیه‌های ۹۰۰ چند است؟

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ $3 \times 3 \times 3 = 27$

$900 = 30^2 \rightarrow 900^{\frac{27}{2}} = (30^2)^{\frac{27}{2}} = 30^{27}$

* ب.م.م: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را با علامت (a,b) یا $a \sqcap b$ نشان می‌دهیم. برای بدست آوردن ب.م.م اعداد را تجزیه کرده و پایه‌های مشترک با کوچک‌ترین توان را انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

* ک.م.م: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b را با علامت [a,b] و یا $a \sqcup b$ نشان می‌دهیم. برای بدست آورد ک.م.م دو عدد آنها را تجزیه کرده و تمام پایه‌ها با بیشترین توان را در هم ضرب می‌کنیم.

*** نکات ب.م.م و ک.م.م :**

۱) اگر a بر b بخش پذیر باشد داریم: $[a,b]=a$ و $(a,b)=b$

۲) اگر $(a,b)=1$ باشد (یعنی عامل مشترکی نداشته باشند)، می گوییم a و b متباین هستند یا نسبت به هم اول اند.

۳) دو عدد اول مختلف حتماً متباین هستند.

۴) دو عدد متوالی متباین هستند، اثبات: اگر دو عدد هر دو بر x بخش پذیر باشند، فاصله‌ی آنها مضربی از x است. الآن فاصله اعداد ما ۱ است و فقط عدد ۱ مضرب ۱ است، پس تنها مقسوم علیه مشترکی که دارند یک است.

۵)
مشترک با توان کم

$$(a,b).[a,b]=a.b$$

غیر مشترک با توان زیاد

۶) اگر a و b متباین باشند، داریم: $[a,b]=ab$

۷) $(a,b)=d \Longrightarrow (ak,bk)=dk$

$(a,b)=d \Longrightarrow (a^n,b^n)=d^n$

و به همین ترتیب برای ک.م.م نیز همین قانون را داریم.

۸) اگر a و b بر یک عدد بخش پذیر باشند، (a,b) نیز بر آن بخش

پذیر است.

مثلاً اگر ۱۲ و ۱۸ بر عددی بخش پذیر باشند، ۶ هم بر آن بخش

پذیر است.

۹) اگر عددی بر a و b بخش پذیر باشد، بر ک.م.م آن ها نیز بخش پذیر است

مثلاً اگر عدد بر ۱۲ و ۱۸ بخش پذیر باشد، بر ۳۶ نیز بخش پذیر است

مثال: کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی که باقی‌مانده‌ی آن بر ۶ و ۳ و ۵ برابر ۱ شود چند است؟

[۳،۵،۶] = ۳۰

۳۰+۱=۳۱ ✗ ۶۰+۱=۶۱ ✗ ۹۰+۱=۹۱ ✗

۱۲۰+۱=۱۲۱ ✓

مثال: کوچک‌ترین عدد طبیعی که بر ۷ بخش‌پذیر است و در تقسیم بر ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ به ترتیب باقی‌مانده‌ها ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ می‌دهد چند است؟

[۲،۳،۴،۵،۶] = ۶۰ → ۶۰−۱=۵۹ ✗

۱۲۰−۱=۱۱۹ ✓

* غربال اراتستن (برای یافتن اعداد اول ۱ تا ۱۰۰) *

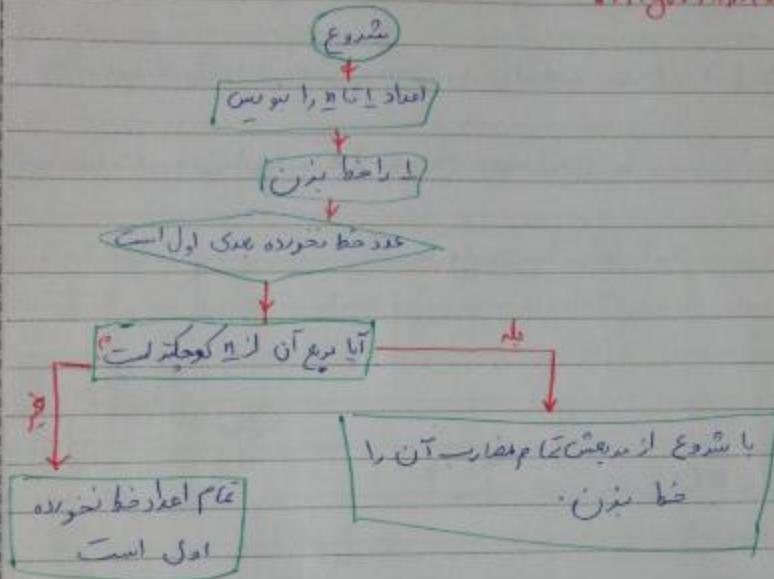
مثال ۱ تا ۱۰۰ :

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	~~۵~~	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~
۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	~~۴۹~~	~~۵۰~~
~~۵۱~~	~~۵۲~~	۵۳	~~۵۴~~	~~۵۵~~	~~۵۶~~	~~۵۷~~	~~۵۸~~	۵۹	~~۶۰~~
۶۱	~~۶۲~~	~~۶۳~~	~~۶۴~~	~~۶۵~~	~~۶۶~~	۶۷	~~۶۸~~	~~۶۹~~	~~۷۰~~
۷۱	~~۷۲~~	۷۳	~~۷۴~~	~~۷۵~~	~~۷۶~~	~~۷۷~~	~~۷۸~~	۷۹	~~۸۰~~
~~۸۱~~	~~۸۲~~	۸۳	~~۸۴~~	~~۸۵~~	~~۸۶~~	~~۸۷~~	~~۸۸~~	۸۹	~~۹۰~~
~~۹۱~~	~~۹۲~~	~~۹۳~~	~~۹۴~~	~~۹۵~~	~~۹۶~~	۹۷	~~۹۸~~	~~۹۹~~	~~۱۰۰~~

MOBASHER

Year: Month: Date:

: Algorithm



مثال: در روش غربال اراتستن برای یافتن اعداد اول 1 تا ۱۰۰، ۶۳ امین عددی که خط می‌خورد چیست؟

۹۹، ۹۳، ۸۷، ۸۱، ۷۵

MOBASHER

Subject:
Year: Month: Date: Sa Su Mo Tu We Th

* طریقه تشخیص اول یا مرکب بودن n:

از 1 تا n را در ذهنمان می نویسیم و روش غربال را روی آنها اجرا می کنیم. اگر n خط خورد، مرکب ؛ و در غیر این صورت اول است.

مثال: ۲۰۳ اول است یا مرکب؟

۲۰۳ ÷ ۲ = ۱۰۱، باقیمانده ۱ ✗
۲۰۳ ÷ ۳ = ۶۷، باقیمانده ۲
۲۰۳ ÷ ۵ = ۴۰، باقیمانده ۳
۲۰۳ ÷ ۷ = ۲۹، باقیمانده ۰ ✓ → مرکب

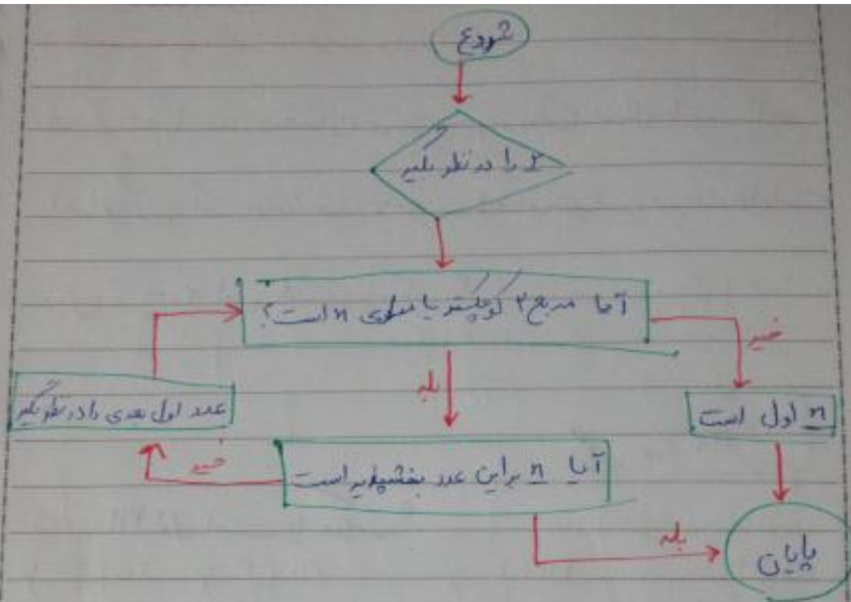
مثال: ۲۱۱ اول است یا مرکب؟

$۲۱۱ < ۱۷^۲$

۲۱۱ ÷ ۲ = ۱۰۵، باقیمانده ۱ ✗
۲۱۱ ÷ ۳ = ۷۰، باقیمانده ۱ ✗
۲۱۱ ÷ ۵ = ۴۲، باقیمانده ۱ ✗
۲۱۱ ÷ ۷ = ۳۰، باقیمانده ۱
۲۱۱ ÷ ۱۱ = ۱۹، باقیمانده ۲ ✗
۲۱۱ ÷ ۱۳ = ۱۶، باقیمانده ۳ ✗

اول است

* نتیجه: n را به تمام اعداد اولی که مربع شان از n کوچکتر است، تقسیم می کنیم.



مثال: در دنباله ۱ تا ۱۰۰ عدد ۸۵ چندمین عددی است که خط می‌خورد؟