پاسخ های تشریحی آزمون هفتگی شماره ۲ – قسمت ۲

۸ آبان ۹۳- درس حسابان

سوال ٤١:

گزینه‌ی «۳»

اگر کارگر اول کار را در x روز تمام کند، کارگر دوم در $x+۱۵$ روز کار را تمام می‌کند. داریم:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow \frac{x+۱۵+x}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸}$$

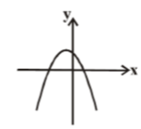
$$\Rightarrow ۱۸(۲x+۱۵)=x^۲+۱۵x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰\Rightarrow (x-۳۰)(x+۹)=۰ \xRightarrow{x>۰} x=۳۰$$

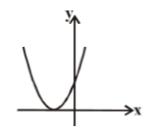
سوال ٤٢:

گزینه‌ی «۲»

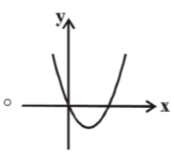
الف) $\begin{cases} \text{تابع ماکزیمم دارد.} \Rightarrow a<۰ \\ x=۰\Rightarrow f(۰)=c>۰ \\ \text{محور تقارن سهمی} = -\frac{b}{۲a}<۰ \xrightarrow{a<۰} b<۰ \end{cases} \Rightarrow abc>۰$



ب) $\begin{cases} \text{تابع می‌نیمم دارد.} \Rightarrow a>۰ \\ x=۰\Rightarrow f(۰)=c>۰ \\ \text{محور تقارن سهمی} = -\frac{b}{۲a}<۰ \xrightarrow{a>۰} b>۰ \end{cases} \Rightarrow abc>۰$



پ) $\begin{cases} \text{تابع می‌نیمم دارد.} \Rightarrow a>۰ \\ x=۰\Rightarrow f(۰)=c=۰ \\ \text{محور تقارن سهمی} = \frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰ \end{cases} \Rightarrow abc=۰$



سوال ٤٣:

گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases} a>۰ \\ b<۰ \end{cases} \Rightarrow A=a-b+a+۱+\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}-۱$$
$$=۲a-b$$

سوال ٤٤:

گزینه‌ی «۲»

$$|۴-x^۲|=۴-x^۲ \Rightarrow ۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۲\xrightarrow{x\in N} x=\{۱,۲\}$$

سوال ٤٥:

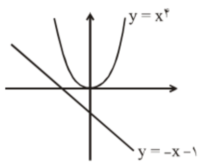
گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{۴x-۱۲}+۳\sqrt{۲۵x-۷۵}=۵۱\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}+۱۵\sqrt{x-۳}=۵۱$$
$$\Rightarrow ۱۷\sqrt{x-۳}=۵۱\Rightarrow \sqrt{x-۳}=۳\Rightarrow x-۳=۹\Rightarrow x=۱۲$$

مجموع ارقام x برابر ۳ است.

سوال ٤٦:

گزینه‌ی «۴»



با رسم نمودار توابع $y=x^۴$ و $y=-x-۱$ در یک دستگاه مختصات و مقایسه‌ی آن‌ها، ملاحظه خواهیم کرد که نامساوی $x^۴+x+۱<۰$ به ازای هیچ مقدار x برقرار نخواهد بود. زیرا برای برقراری آن لازم است

نمودار $y=x^۴$ پایین‌تر از نمودار $y=-x-۱$ قرار گیرد که چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد.

سوال ٤٧:

گزینه‌ی «۳»

فرض می‌کنیم $\frac{x^۲}{۳}-۲=t$، داریم:

$$t^۲-۷t+۶=۰\Rightarrow (t-۶)(t-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^۲}{۳}-۲=۱\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm\sqrt{۹} \\ \frac{x^۲}{۳}-۲=۶\Rightarrow x^۲=۲۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\sqrt{۹})\times(\sqrt{۹})\times(-\sqrt{۲۴}\times\sqrt{۲۴})=۲۱۶$$

سوال ٤٨:

گزینه‌ی «۱»

$$|x|+|۲x-۱|=x$$

چون طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، پس:

$$x\ge ۰\Rightarrow |x|=x$$

لذا معادله‌ی داده شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$x+|۲x-۱|=x\Rightarrow |۲x-۱|=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

سوال ۴۹:

گزینه‌ی «۳»

بنا به نامساوی مثلثی داریم:

$$|a+b| \le |a|+|b|$$

تساوی در این نامساوی وقتی رخ می‌دهد که a و b هم‌علامت باشند یا حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد، یعنی $ab \ge ۰$ پس:

$$|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab \ge ۰$$

با توجه به این‌که $(۹x+۴)=(۳x-۷)+(۶x+۱۱)$ داریم:

$$|\underbrace{۳x-۷}_{a}|+|\underbrace{۶x+۱۱}_{b}|=|\underbrace{۹x+۴}_{a+b}| \Rightarrow (۳x-۷)(۶x+۱۱) \ge ۰$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-۱۱}{۶}] \cup [\frac{۷}{۳}, +\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ۲ و ۱ و ۰ و ۱− نمی‌باشد.

سوال ۵۰:

گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۴}{x^۲+x+۱}+x^۲+x-۳ \le ۰$$

اگر فرض کنیم $A=x^۲+x+۱$ داریم:

$$\frac{۴}{A}+A-۴ \le ۰$$

با توجه به این‌که $A>۰$ است $(a>۰, \Delta<۰)$ دو طرف نامعادله را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۲-۴A+۴ \le ۰ \Rightarrow (A-۲)^۲ \le ۰ \Rightarrow A=۲ \Rightarrow x^۲+x+۱=۲$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=-۱$$

سوال ۵۱:

گزینه‌ی «۲»

ابتدا دو طرف را بر عبارت $x-۱$ تقسیم می‌کنیم $(x \ne ۱)$؛ داریم:

$$\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)...(x^{۲n}+۱)}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(x^۲-۱)(x^۲+۱)...(x^{۲n}+۱)}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(x^۴-۱)(x^۴+۱)...(x^{۲n}+۱)}=-۱$$

هر مرحله که به جلو رویم دو عبارت مزدوج وجود دارد. در مرحله‌ی آخر داریم:

$$\frac{۱}{(x^{۲n}-۱)(x^{۲n}+۱)}=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{(x^{۲n})^۲-۱}=-۱$$

$$\Rightarrow \left(x^{۲n}\right)^۲-۱=-۱ \Rightarrow \left(x^{۲n}\right)^۲=۰ \Rightarrow x=۰$$

سوال ۵۲:

گزینه‌ی «۱»

$$\frac{۳-x}{x+۳}+\frac{x+۱}{x-۳}=\frac{ax+b}{x^۲-۹} \Rightarrow \frac{(۳-x)(x-۳)+(x+۱)(x+۳)}{x^۲-۹}$$

$$=\frac{ax+b}{x^۲-۹} \Rightarrow -x^۲+۶x-۹+x^۲+۴x+۳=ax+b \Rightarrow ۱۰x-۶=ax+b$$

اگر $a=۱۰$ و $b=-۶$ باشد، تساوی اخیر به‌ازای هر x حقیقی به‌جز ۳ و ۳- برقرار است، یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد. لذا $a+b=۱۰-۶=۴$.

سوال ۵۳:

گزینه‌ی «۴»

$$-\sqrt{-x^۳}=-\sqrt{-x \times x^۲}=-|x|\sqrt{-x} \overset{x \le ۰}{=\!=} -(-x)\sqrt{-x}=x\sqrt{-x}$$

سوال ۵۴:

گزینه‌ی «۳»

عبارت $(x-۲)^۳(x+۳)^۲$ بر $(x^۲+x-۶)^۲$ بخش‌پذیر است. خارج‌قسمت آن برابر است با:

$$\frac{(x-۲)^۳(x+۳)^۲}{(x+۳)^۲(x-۲)^۲}=x-۲$$

عبارت $x^۳$ بر $(x^۲+x-۶)^۲$ قابل تقسیم نیست پس خارج‌قسمت صفر است. پس در کل خارج‌قسمت $x-۲$ می‌باشد.

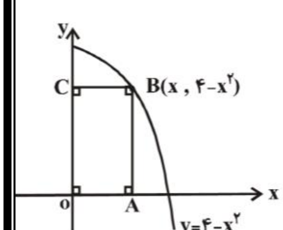
سوال ۵۵:

گزینه‌ی «۲»

$$\text{OABC محیط}=۲(OA+OC)=۲(x+۴-x^۲)=-۲x^۲+۲x+۸$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(-۲)}=\frac{۱}{۲}$ ماکزیمم دارد.

$$\text{OABC ماکزیمم محیط} \overset{x=\frac{۱}{۲}}{=\!=} -۲(\frac{۱}{۲})^۲+۲\times\frac{۱}{۲}+۸=۸+\frac{۱}{۲}=۸/۵$$



سوال ٥٦:

گزینه‌ی «۳»

جمله‌ی n ام از سطر k ام مثلث خیام- پاسکال برابر $\binom{k-1}{n-1}$ است. $(k \ge 2)$

$$\binom{k-1}{3-1}=\binom{k-1}{2}=45 \Rightarrow \frac{(k-1)(k-2)}{2}=45$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-2)=90 \Rightarrow k=11$$

جمله‌ی چهارم $=\binom{11-1}{4-1}=\binom{10}{3}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}=120$

سوال ٥٧:

گزینه‌ی «۳»

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} a_1+a_3=1 \\ S_4=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_1q^2=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q^2)=1 \\ \dfrac{a_1(1-q)(1+q)(1+q^2)}{(1-q)}=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q^2)=1 \\ a_1(1+q)(1+q^2)=3 \xrightarrow{a_1(1+q^2)=1} 1\times(1+q)=3 \\ \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2 \end{cases}$$

$$a_1(1+q^2)=1 \Rightarrow a_1(1+2^2)=1 \Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$

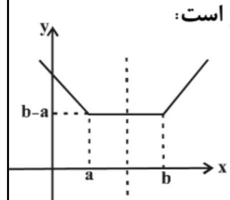
بنابراین:

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-2^6)}{1-2}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{-1}=\frac{1}{5}\times 63=\frac{63}{5}=12/6$$

سوال ٥٨:

گزینه‌ی «۱»

نمودار $(b>a)$ $y=|x-a|+|x-b|$ به‌صورت زیر است:



بنابراین محور تقارن آن $x=\frac{a+b}{2}$ است. داریم:

$$\frac{3+(-2k)}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 3-2k=1 \Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$$

سوال ٥٩:

گزینه‌ی «۳»

با توجه به صفحه‌های ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی اگر $x=a$ ریشه‌ی چند جمله‌ای درجه‌ی n به معادله‌ی، $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ باشد، $x=\frac{1}{a}$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ است. $(a_0 \neq 0)$

اگر $P(x)=2x^3+mx^2-nx+1$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، یعنی $x=-2$ ریشه‌ی $P(x)$ است و در نتیجه $x=\frac{-1}{2}$ ریشه‌ی $Q(x)=x^3-nx^2+mx+2$ است. یعنی $Q(x)$ بر $x+\frac{1}{2}$ و یا $2x+1$ بخش‌پذیر است.

سوال ٦٠:

گزینه‌ی «۴»

مجموع ضرائب بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ برابر 2^n است، بنابراین:

$$2^n=128 \Rightarrow n=7$$

$$(x-y)^7+(x+y)^7$$

$$=(x^7-\binom{7}{1}x^{7-1}y+\binom{7}{2}x^{7-2}y^2-\ldots-\binom{7}{7}y^7)$$

$$+(x^7+\binom{7}{1}x^{7-1}y+\binom{7}{2}x^{7-2}y^2+\ldots+\binom{7}{7}y^7)$$

$$\Rightarrow (x-y)^7+(x+y)^7$$

$=2x^7+2\binom{7}{2}x^5y^2+2\binom{7}{4}x^3y^4+2\binom{7}{6}xy^6 \Rightarrow$ چهار جمله دارد.