وبگاه المپیاد ریاضی ایران

سال دوم، شماره‌ی هشتم، بهار ۱۳۹۴

پرگار

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم ۱۳۹۴

سرمقاله

از $x^2 \geq 0$ تا مسأله هفدهم هیلبرت

مسائل

بازی و معما

عدد توران و ترکیبیات احتمالاتی

شگفت‌انگیز ۲ اتحادهای

مسأله ویژه

راه‌حل مسائل همین شماره

کلاس ترکیبیات (۱)

فصل‌نامه‌ی کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

پرگار | فصل‌نامهٔ کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران

سال دوم، شمارهٔ هشتم، بهار ۱۳۹۴

در این شماره می‌خوانید

وبگاه: MathYSC.com/journal/

رایانامه: Pargar@MathYSC.ir

فهرست

مطالب این شماره . . . آ

سرمقاله
سردبیر . . . ۱

کلاس ترکیبیات (۱)
سیدصالحی . . . ۲

عدد توران و ترکیبیات احتمالاتی
ملکیان . . . ۹

اتحادهای شگفت‌انگیز ۲!
عین اله زاده . . . ۱۴

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور . . . ۲۰

از $x^2 \geq 0$ تا مسألهٔ هفدهم هیلبرت
صلواتی . . . ۲۸

بازی و معما
زیارتی . . . ۴۰

مسائل این شماره
پویا، زارع . . . ۴۳

پاسخ مسائل این شماره
پویا، زارع . . . ۴۶

مسألهٔ ویژهٔ این شماره، چندوجهی‌ها . . . ۵۴

بیست و هشتم اردیبهشت ماه

مصادف با روز بزرگداشت عمر خیام

ستاره‌شناس، فیلسوف، شاعر و ریاضیدان ایرانی است.

به پاس خدمات علمی و ادبی وی این شماره از پرگار تقدیم می‌شود به روح حکیم عمر خیام نیشابوری.

سرمقاله

با سلام به خوانندگان محترم پرگار،
شماره بهار ۱۳۹۴ پرگار اینک تقدیم شما می‌گردد.
یکی از مقالات این شماره، مقاله اتحادهای شگفت‌انگیز ۲ است که ادامه مقاله‌ای با همین عنوان در شماره قبل است و اتحادی واقعاً شگفت‌انگیز را در مورد تابع مجموع مقسوم‌علیه‌ها بیان و اثبات می‌کند که منسوب به اویلر است.
مقاله دوم، عدد توران و ترکیبیات احتمالاتی، روش احتمالاتی را معرفی می‌کند و قدرت آن را در حل برخی مسائل ترکیبیاتی نشان می‌دهد.
مقالهٔ سوم، مقدماتی از نابرابری‌ها را مطرح کرده و سپس روش مجموع مربعات را معرفی کرده و آن را در اثبات چند نابرابری معروف به کار می‌برد و نهایتاً نشان می‌دهد که بسط این روش چه‌طور منجر به طرح یکی از مسائل معروف ریاضیات موسوم به مسأله هفدهم هیلبرت شده است.
یکی از مأموریت‌های پرگار از ابتدای انتشار آن، ارتباط با جامعهٔ معلمین بوده است، هدفی که بسیار ارزشمند است. اگر چه ما در هیئت تحریریه پرگار از وجود برخی معلمین و اساتید باتجربه بهره‌مند هستیم ولی وجود یک ارتباط دوطرفه بین پرگار و معلمین عزیز برای ما بسیار مغتنم است. انشالله باید به دنبال راه‌کارهایی برای ایجاد این ارتباط دوطرفه در آینده باشیم. در همین جا از همهٔ معلمان عزیز دعوت می‌کنیم پیشنهادات خود را در این خصوص از طریق رایانامه‌ی پرگار (pargar@mathysc.ir) با ما در میان بگذارند. در این شماره مقاله‌ای داریم که شاید بتوان آن را گامی نخست در این راستا دانست. مقالهٔ کلاس ترکیبیات گزارشی است از سه جلسهٔ یک کلاس ترکیبیات که با محوریت حل مسأله برگزار شده است. مطالعهٔ این مقاله را به همهٔ معلمان، خصوصاً معلمان جوان توصیه می‌کنیم.
همچنین خواننده را به مطالعهٔ مسائل و راه‌حل‌های آزمون مرحله دوم امسال و نیز مسائل و معماهای این شماره و نیز مسألهٔ ویژهٔ این شماره دعوت می‌کنیم.

سید محمد حسین سیدصالحی
دانشجوی کارشناسی
مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

کلاس ترکیبیات (۱)

۱.۲ مقدمه

سلام، این مجموعه: درسنامه‌ی کلاس‌های ترکیبیاتی است که قبلاً با بچه‌های کلاس **سوم دبیرستان** داشتم و تصمیم به نوشتن آن گرفتم.
مخاطب آن: کسانی هستند که قبل‌تر احتمالاً با خواندن کتاب‌های مختلف، آشنایی با اصول ترکیبیات دارند و حس می‌کنند که فرصت آن شده تا با مسائل سخت و آسان و ایده‌های مختلف خود را ورزیده کنند. (به طور شهودی، عموم المپیادی‌هایی که درآغاز سوم دبیرستان هستند به بعد) به نظرم برای چنین مخاطبی، سطح‌بندی سؤالات کار درستی نبود و سؤالات در سطوح مختلف در همه جای این مقاله هستند. البته سطح عمومی سؤالات در این مجموعه **بالاست.**
اما از نظر موضوعی و ساختار: این مجموعه مساله محور است. درس در **لابه لای مساله‌ها و حل‌شان** گفته می‌شود و در قسمت پاسخ‌ها نکاتی فراتر از آن مساله وجود دارد. به ترتیب در هر جلسه تاکید بر روی یک موضوع خاص خواهد بود اما در هرجلسه سؤالاتی سخت یا از ایده‌های دیگر وجود دارد. به نظرم با این کار، خواننده در کنار ذهن منظمی که پیدا می‌کند، یاد می‌گیرد که بیش‌تر به خلاقیت خود تکیه کند تا به آموخته‌هایش. در ضمن توصیه می‌شود سوالات هر قسمت را **به ترتیب** حل کنید و پس از حل و یا فکر کردن روی هر سوال، همان موقع نکات انتهایی مربوط به آن را بخوانید.
این مجموعه در سه سری نوشته خواهد شد و نیازهای اصلی برای حل مساله را پوشش خواهد داد. این سری با موضوعات اصلی گراف و حاشیه‌هایش، پیوستگی و گسستگی ، ناوردایی و البته موضوعاتی فرعی استقرا، شمارش، هندسه ترکیبیاتی....
در خدمت شماست!

۲.۲ سوالات

۱.۲.۲ جلسه‌ی اول

تقریبا گراف!

۱. جایگشت دل‌خواهی از اعداد ۱ تا n داریم. در هر مرحله اگر اولین عدد جایگشت k باشد، ترتیب k عضو اول را آینه‌وار عوض می‌کنیم. (مثال: از ۴ ۲ ۱ ۵ ۳ به ۴ ۲ ۳ ۵ ۱ می‌رسیم.) ثابت کنید بعد از مدتی ۱ به ابتدای جایگشت می‌آید.

۲. یک گراف هم‌بند n رأسی داریم. ثابت کنید با شروع از یک نقطه‌ی دل‌خواه و حداکثر $2n - 4$ سفر، می‌توان از همه‌ی رئوس دیدن کرد. (سفر: رفتن از یک رأس به یک رأس دلخواه مجاور. توجه کنید که عبور چند باره از یک یال یا رأس مجاز است.)

۳. دریک گراف با ۱۹۹۳ رأس، درجه‌ی هر رأس حداقل ۹۳ است. ثابت کنید اگر بین دو رأس مسیری وجود داشته باشد، آن‌گاه فاصله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو از ۶۲ بیش‌تر نیست.

۴. در طرفین یک رودخانه تعدادی شهر وجود دارد. از هر شهر دقیقاً به k شهر در طرف دیگر خط قایق‌رانی وجود دارد (خطوط قایق‌رانی دو طرفه هستند). می‌دانیم در هر شهری که باشیم، می‌توانیم با تعدادی سفر به هر شهر دیگری سفر کنیم. ثابت کنید اگر یکی از خطوط قایق‌رانی متوقف شده و کار نکند، باز هم این خاصیت (امکان سفر از هر شهر به هر شهر دیگر- هم‌بندی) برقرار است. (ایران، مرحله ۲)

۵. n تیم والیبال دو به دو با هم مسابقه داده‌اند (هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند). برای هر دو تیم مثل A و B، دقیقاً t تیم دیگر وجود دارند که به هر دوی این دو تیم باخته‌اند. ثابت کنید $n = 4t + 3$. (ایران، مرحله ۲)

۶. $12k$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر با $3k + 6$ نفر دیگر دست داده است، از طرفی تعداد افرادی که با هر دو نفر مشخص دست داده‌اند مقداری ثابت است. k را بیابید. (ایران، مرحله ۲)

۲.۲.۲ جلسه‌ی دوم

تقریباً پیوستگی و گسستگی

۱. ۳۰ چکمه (۱۵ جفت) در یک ردیف در کنار هم به طور نامرتب قرار دارند. ثابت کنید ۱۰ چکمه‌ی متوالی هستند که ۵ تای آن‌ها برای پای راست و ۵ تا برای پای چپ هستند.

۲. $x_1, x_2, , x_n \in [-1, 1]$، ثابت کنید اندیس $1 \le k \le n$ موجود است که:

$$|(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) - (x_{k+1} + \cdots + x_n)| \le 1$$

۳. آیا بر روی یک سهمی، یک ۲۰۱۱ ضلعی منتظم داریم؟ (یعنی رئوسش روی سهمی باشد. منظور از منتظم فقط تساوی طول اضلاع است.) ۲۰۱۲ ضلعی چطور؟

۴. ثابت کنید روی هر خم بسته‌ی محدب که خود را قطع نمی‌کند، چهار نقطه وجود دارد که رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۵. هزار نفر دور یک دایره نشسته‌اند. ثابت کنید عدد طبیعی k وجود دارد که $2k$ نفر متوالی باشند که تعداد خانم‌ها در نیمه‌ی اول افراد با نیمه‌ی دوم برابر باشد.

۶. $2n$خانه از یک جدول $n \times n$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید ۴ خانه از جدول هستند که مراکز آن‌ها تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهد.

۷. n نقطه در وضعیت عمومی در صفحه داریم (هیچ سه تایی هم‌خط و هیچ چهارتایی هم‌دایره نیستند). ثابت کنید سه نقطه در صفحه هستند که دایره‌ی محیطی آن‌ها شامل کل نقاط می‌شوند. (یعنی همه‌ی نقاط درون آن دایره قرار می‌گیرند.)

۸. ۱۰۰ عدد سیب و ۱۰۰ عدد پرتقال را درون ۱۰۰ جعبه قرار پخش‌کرده‌ایم (نه لزوماً به طور یکنواخت). ثابت کنید می‌توان ۵۰ جعبه انتخاب کرد که حداقل نیمی از سیب‌ها و نیمی از پرتقال‌ها درون آن‌ها باشند.

۳.۲.۲ جلسه‌ی سوم

تقریبا ناوردایی

۱. دریک جدول 10×10، ۴۵ خانه را آبی و ۴۶ خانه را قرمز کرده‌ایم. ثابت کنید دو خانه‌ی آبی و قرمز هستند که مجاور یک‌دیگر قرار دارند.

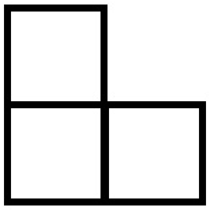
۲. اعداد ۱ تا ۲۵ را روی تخته نوشته‌ایم. در هر مرحله سه عدد a, b, c را از روی تخته پاک می‌کنیم و به جای آن‌ها عدد $a^3 + b^3 + c^3$ روی تخته می‌نویسیم. آیا ممکن است در انتها عدد 2013^{2013} روی تخته باقی بماند؟

۳. ۱۳ آفتاب پرست قرمز، ۱۵ تا آبی و ۱۷ تا قهوه‌ای داریم. هر بار که دو آفتاب‌پرست با رنگ‌های مختلف با هم برخورد کنند، هر دو به رنگ سوم تغییر رنگ می‌دهند. آیا ممکن است در انتها همه هم‌رنگ شوند؟

۴. دریک جدول2000×2000، در هر خانه دقیقاً یک مهره گذاشته‌ایم. در هر مرحله، یک مستطیل 1×3 و یا 3×1 انتخاب کرده و در صورتی که در هر دو خانه‌ی کناری آن حداقل یک مهره وجود داشته باشد، از هر کدام یک مهره

برداشته و آن دو را در خانه‌ی وسطی آن‌ها می‌گذاریم. آیا ممکن است در انتها همه‌ی مهره‌ها دریک خانه جمع شوند؟

۵. آیا می‌توان یک مستطیل ۷×۵ را با تعدادی مهره به شکل زیر و دوران‌هایش پوشاند که هر خانه توسط تعداد یکسانی مهره پوشانده شود؟ (یعنی مثلا روی هر خانه‌ی جدول ۴ تریمینو قرار بگیرد.)



۶. تعدادی عدد طبیعی دریک سطر نوشته شده‌اند. هر بار می‌توانیم دو عدد مجاور x و y که $x > y$ و x در سمت چپ y قرار دارد را انتخاب کنیم و جفت (x, y) را با $(y + ۱, x)$ یا $(x - ۱, x)$ تعویض کنیم. ثابت کنید این کار متناهی بار قابل انجام است.

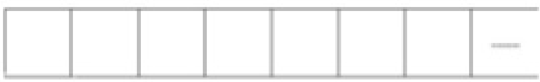
۷. جدولی با یک سطر و تعداد نامتناهی خانه در نظر بگیرید که از سمت چپ متناهی باشد . تعدادی مهره در این جدول قرار گرفته است(ممکن است دریک خانه بیش ازیک مهره قرار گرفته باشد). دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

• اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست حذف کرد.

• در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی را از مهره‌ها را یک خانه به راست، و یک مهره‌ی دیگر را یک خانه به چپ برد.

الف) ثابت کنید با آغاز از هر حالتی، به حالتی می‌رسیم که دیگر نمی‌توانیم کاری انجام دهیم.

ب) فرض کنید در هریک از خانه‌های ۱ تا n ام یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام این کارها هیچ مهره‌ای از خانه‌ی $n + ۱$ جلوتر نخواهد رفت.



۳.۲ درسنامه و راهنمایی‌ها

۱.۳.۲ جلسه‌ی اول

۱. حل ۱: به هر جایگشت یک عدد در مبنای دو نسبت می‌دهیم. به این طریق که رقم i ام عدد ما برابر صفر است اگر عدد i در جایگشت در جایگاه i قرار نداشته باشد. حال در هر مرحله این عدد را بررسی کنید.

حل۲: استقرا بزنید. روی این حالت‌بندی کنید که عدد n به انتهای جایگشت می‌آید یا نه.

۲. طبیعی است که گرافمان هر چه قدر یال بیشتری داشته باشد، برای سفر کردن گراف مناسب‌تری است و در تعداد سفرهای کمتری می‌توان گراف را گشت. پس ما برعکس آن عمل می‌کنیم! و بدترین حالت مساله، یعنی وقتی گرافمان یک درخت باشد را درنظر می‌گیریم و ابتدا مساله را در آن به کمک حذف یک برگ و استقرا حل می‌کنیم. حال به این توجه کنید که هر گراف یک زیردرخت فراگیر دارد.

۳. کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس را در نظر بگیرید. (به این "ترین"ها را گرفتن اکسترمال می‌گویند.) همین فرض کوتاه‌ترین بودن، که خودتان آن را به مسئله اضافه کرده‌اید، بیش از همه‌ی فرض‌های مسئله در حل اهمیت دارد! حال هر راس بیرون از این مسیر، حداکثر سه همسایه درون راس‌های مسیر دارد. به کمک این موضوع یک نامساوی برای حداقل تعداد رئوس بیرون از این مسیر بنویسید.

۴. ساده است. فرض خلف کنید. فرض کنید هم‌بندی از دست برود. سپس تعداد یال‌ها را از دو طرف برای یکی از مولفه‌ها بشمارید.

۵. به زیرساختارهای مختلفی که در یک گراف (یا هر ساختمان دیگری!) وجود دارد توجه کنید و با آن‌ها کار کنید. "یک رأس و همسایه‌هایش" ، یا "دو رأس و همسایه‌های مشترکشان"، "همه‌ی رئوسی که در خاصیتی مشترک هستند"، .... نمونه‌هایی از ساختارهایی‌اند که در یک گراف وجود دارند و در مسایل مربوط با گراف می‌توان رابطه‌ی آن‌ها را با فرض‌های سوال سنجید.

۶. در شروع کار این سوال نیز مانند سوال قبل است. باید تعداد مسیرهای به طول دو در گراف را بشمارید و بعد در رابطه‌ی به دست آمده از نظریه اعداد استفاده کنید.

۲.۳.۲ جلسه‌ی دوم

۱. این مسأله‌ای ساده و آموزشی است. همه‌ی ده‌تایی‌های کنار هم از چکمه‌ها را در نظر بگیرید و به ترتیب از چپ به راست در بین آن‌ها حرکت کنید و در هر مرحله تعداد چکمه‌های راست را بشمارید. این روند را به خاطر داشته باشید! : مشخص کردن حالت‌ها(۱۰ تاییهای کنار هم)، تعریف حرکت بین آن‌ها (به ترتیب از چپ به راست) و تعریف تابعی (تعداد چکمه‌های راست) روی هر حالت.

۲. ساده است! حالت ابتدایی و نهایی خود را مشخص کنید، و در بین حالت‌های مختلفی که برای انتخاب اندیس دارید حرکت کنید. برای این که شهود خود را تقویت کنید از نمایش روی یک محور مختصات استفاده کنید! گاهاً یک خوب دیدن از چند ساعت فکر بیشتر فایده دارد!

۳. ۲۰۱۱ ضلعی داریم و ۲۰۱۲ ضلعی نه . برای ۲۰۱۱ ضلعی یک راسش را روی پایین ترین نقطه‌ی سهمی قرار دهید و در دوطرف شاخه‌های سهمی ۱۰۰۵ نقطه با فاصله‌های برابر قرار دهید. حال تنها مشکل طول بالاترین ضلع سهمی است که بالاترین نقاط دو طرف را متصل می‌کند. توجه کنید که طول این ضلع تابعی از طول آن فاصله‌ی برابری است که برای نقاط روی سهمی انتخاب کرده بودیم.

۴. یک خط را خارج خم در نظر بگیرید و آن را با حفظ راستایش به سمت خم حرکت دهید تا با آن تقاطع کند و از آن بگذرد. هم چنین تابع خود را در هر مرحله برابر طول پاره خطی از خطتان تعریف کنید که درون خم قرار دارد. این تابع در ابتدا و انتها صفر است و مقادیر ناصفر نیز اختیار کرده است. شما به دنبال دو مقدار ناصفر و برابر این تابع در دو نقطه‌ی مختلف هستید.

۵. رجوع کنید به سوالات پیشنهادی برای المپیاد جهانی ۲۰۱۱، سوالات ترکیبیات ، سوال دو.
این سوالات را می‌توانید از این لینک دریافت کنید: آرشیو سوالات پیشنهادی المپیاد جهانی ریاضی

۶. یک ضلع از پوش محدب نقاط را در نظر بگیرید. حال زاویه‌ی دیده‌شدن این خط توسط بقیه‌ی نقاط را ببینید. به مسأله‌هایی از این دست –که درون خود هم ترکیبیات و هم هندسه دارند- هندسه‌ی ترکیبیاتی می‌گویند.(بدیهی!) بد نیست اگر کمی وقت بگذارید و بدون داشتن هیچ مسأله‌ی خاصی، کمی فکر کنید که روی مسائلی از این دست که با خط و نقطه و دایره و ...سر وکار دارند، چه ایده‌هایی می‌توانید بزنید، چه ساختارهایی می‌توانید ایجاد کنید... . مثلا پوش محدب یکی از همین ساختارهاست که بر روی مجموعه‌ای متناهی از نقاط در صفحه تعریف می‌شود.

۷. ابتدا جعبه‌ها را به ترتیب تعداد سیب‌هایشان از چپ به راست مرتب کنید. دسته‌های ۴۹ تایی از جعبه‌های متوالی را در نظر بگیرید و به ترتیب از چپ بین آن‌ها حرکت کنید و در هر مرحله تعداد پرتقال‌ها را در نظر بگیرید.

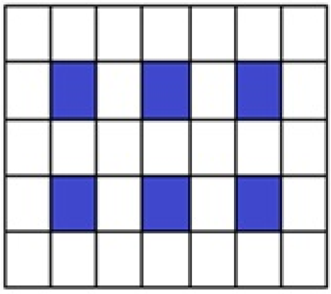
۳.۳.۲ جلسه‌ی سوم

۱. مجموع اعداد به پیمانه‌ی سه را در نظر بگیرید و بررسی کنید که در هر مرحله ثابت می‌ماند. حال حالت نهایی مجموع اعداد به پیمانه‌ی سه را با حالت اولیه‌ی آن مقایسه کنید. با این روند بخوبی آشنا شوید!: تحلیل حرکت‌ها و تاثیر آن روی حالت‌ها، یعنی تحلیل این که حالت‌ها (مجموعه‌های مختلفی از اعداد که روی تخته نوشته می‌شوند) چه ویژگی‌ها و چه متغیرهایی(باقیمانده به پیمانه‌ی سه) دارند، و حرکت‌ها(پاک کردن و نوشتن عدد جدید) چه تاثیری روی این متغیرها دارند. و هم چنین یاد بگیرید که به نقاط حساس در حین حرکت(در این‌جا ابتدا و انتها) که در مورد آن‌ها فرض‌های بیشتری داریم (در حالت ابتدایی و انتهایی مجموع اعداد را می‌دانیم) توجه کنید.

۲. اختلاف تعداد آفتاب‌پرست‌ها را به پیمانه‌ی سه در نظر بگیرید.

۳. یکی از مهارت‌های تفکر ، توانایی پیدا کردن حالت‌های ساده‌تر مسأله، و ایده‌گرفتن از آن‌هاست. (پیداکردن مسأله‌های ساده‌تر و مربوط به سؤال اولیه) مثلاً می‌توانید روی حالت یک بعدی مساله فکر کنید و از آن ایده بگیرید. برای حل مساله دو راه (نه چندان متفاوت!) دارید: الف) از نقطه‌ی وسط جدول به همه‌ی مهره‌ها یک بردار بکشید و مجموع بردارها را حساب کنید. ب) مجموع مختصات دکارتی مهره‌ها را در هر کدام از راستاها در نظر بگیرید.

۴. این سوال نسبتاً سخت است! تعداد مهره‌هایی که یک خانه از آن‌ها روی خانه‌های رنگی قرار گرفته را بررسی کنید. بعد از حل سوال، با توجه به نامساوی‌هایی که نوشته‌اید تحلیل کنید که چرا از همان اول این طور رنگ‌آمیزی کرده‌ایم و به دنبال چه خاصیتی بوده‌ایم.



۵. رجوع کنید به سوالات پیشنهادی برای المپیاد جهانی ۲۰۱۳، سوالات ترکیبیات ، سوال یک.
این سوالات را می‌توانید از این لینک دریافت کنید: آرشیو سوالات پیشنهادی المپیاد جهانی

۶. ساده است. استقرای قوی بزنید. به حالتی فکر کنید که مهره‌های شما در خانه‌هایی با نصف شماره‌ی خانه‌ی حکم استقرا قرار دارند.

۷. رجوع کنید به کتاب حل سوالات مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰، سوال ۶.
این کتاب را می‌توانید از این لینک دریافت کنید: صفحه‌ی انتشارات سایت کمیته‌ی المپیاد ریاضی

ریحانه ملکیان
دانش‌جوی کارشناسی
ریاضی
دانش‌گاه صنعتی شریف

عدد توران و ترکیبیات احتمالاتی

چکیده

در این مقاله ابزاری با عنوان «روش احتمالاتی» را معرفی می‌کنیم و با اثبات چند قضیهٔ معروف، زیبایی و ظرافت آن را نشان می‌دهیم. به طور خاص یک اثبات احتمالاتی نامعمول برای قضیه‌ای کلاسیک در مورد عدد توران [۱] $T(n,k,l)$ ارائه می‌دهیم.

مقدمه

ترکیبیات احتمالاتی، شاخه‌ای از ترکیبیات است که توسط یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان طول تاریخ، پال اردوش، [۲] پایه‌ریزی شد و در آن با استفاده از مفاهیمی در نظریهٔ احتمال (عمدتاً نظریهٔ احتمال گسسته)، نتایج وجودی اثبات می‌شود. مثلاً راه حل‌هایی برای سؤالات زیر ارائه می‌شود:

- آیا در هر گراف G، می‌توان زیرگرافی دوبخشی پیدا کرد که حداقل نیمی از یال‌های G را داشته باشد؟
- اگر خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ داده شده باشد که اندازهٔ آن را بدانیم، آیا می‌توان دو عضو $A,B\in\mathcal{F}$ را یافت طوری که $A\subset B$ ؟

پاسخی برای سؤال دوم را در ادامه خواهید دید.
ریاضی‌دانان از ابزارهای ترکیبیات احتمالاتی با اصطلاح کلی «روش احتمالاتی» یاد می‌کنند. دامنهٔ تکنیک‌ها در ترکیبیات احتمالاتی گسترده است و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مرجع [۲] مراجعه کند.
با وجود این تنوع، ایده‌های اساسی روش احتمالاتی را معرفی می‌کنیم. شاید آسان‌ترین راه برای رسیدن به این هدف، حل یک مسئله باشد. قضیهٔ زیر که منسوب به منتل (۱۹۰۷)[۴] است، بیان می‌کند که در هر گراف با تعداد یال‌های به اندازهٔ کافی زیاد، همواره یک مثلث وجود دارد. برای روشن‌تر شدن بیشتر بحث، یک اثبات غیراحتمالاتی نیز برای این قضیه بیان می‌کنیم.

این مقاله ترجمه‌ای از مقالهٔ A. Aw, The Turan Number and Probabilistic Combinatorics, June-July 2012 است که در نشریهٔ American Mathematical Monthly به چاپ رسیده است. البته با اندکی دخل و تصرف!

[۱] Paul Turan (1910 -1976)
[۲] Paul Erdos (1913 -1996)

قضیه ۱. اگر گراف $G(V,E)$ که $|V|=n$، هیچ مثلثی نداشته باشد، آن‌گاه: $|E|\leq[\frac{n^۲}{۴}]$.

اثبات. (غیراحتمالاتی) رئوس گراف را $v_۱,v_۲,\dots,v_n$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم رأس v_p که $\deg(v_p)=k$، رأسی با بیشترین درجه در G باشد. P را مجموعهٔ k عضوی رأس های مجاور v_p در نظر می‌گیریم. اگر دو رأس در P وجود داشته باشد که به هم وصل باشند، یعنی G مثلث دارد که خلاف فرض است.
پس هیچ دو رأسی از اعضای P به هم وصل نیستند، یعنی درجهٔ هر رأس در P حداکثر $n-k$ است. هم‌چنین $n-k-۱$ رأس مخالف v_p وجود دارد که در P نیستند و درجهٔ هر یک از آن‌ها حداکثر k است. پس داریم:

$$۲|E|=\sum_{i=۱}^{n}\deg(v_i)\leq k+k(n-k)+(n-k-۱)k=۲(n-k)k,$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی:

$$|E|\leq(n-k)k\leq\left(\frac{(n-k)+k}{۲}\right)^۲=\frac{n^۲}{۴}.$$

و چون $|E|$ عددی طبیعی است، پس:

$$|E|\leq\left[\frac{n^۲}{۴}\right].$$

□

اثبات. (احتمالاتی) ابتدا توجه کنید که در این اثبات منظور از یک انجمن s عضوی، مجموعه‌ای از s رأس است که هر دو رأس آن به هم وصل هستند.
اعداد حقیقی $p_۱,p_۲,\dots,p_n$ متناظر با رئوس G را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\forall i,\ p_i\geq ۰$ و $\sum_i p_i=۱$. به این ترتیب یک توزیع احتمالی روی رئوس G داریم که احتمال انتخاب شدن v_i برابر p_i است. دو رأس u و v را با این توزیع احتمال به صورت تصادفی و مستقل از هم انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)=\sum_{\substack{i,j\\ \{i,j\}\in E}}p_ip_j.$$

توزیع احتمال را تغییر می‌دهیم تا $\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)$ تا حد امکان زیاد شود.
فرض کنید دو رأس غیر مجاور i,j وجود دارند که $p_i,p_j>۰$. قرار می‌دهیم:

$$s_i=\sum_{\substack{k\\ \{i,k\}\in E}}p_k$$

و مشابهاً s_j را نیز تعریف می‌کنیم. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $s_i\geq s_j$. احتمال رأس i را از p_i به p_i+p_j و احتمال رأس j را از p_j به ۰ تغییر می‌دهیم. با این کار مقدار $\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)$ از $p_is_i+p_js_j$ به $s_i(p_i+p_j)$ تغییر می‌کند، یعنی به اندازهٔ $s_i(p_i+p_j)-(p_is_i+p_js_j)=p_j(s_i-s_j)\geq ۰$ افزایش می‌یابد.
اگر این فرآیند را برای هر دو رأس غیرمجاور i,j با احتمال‌های مثبت تکرار کنیم، بعد از متناهی گام به وضعیتی می‌رسیم که برای هر دو رأس غیرمجاور i و j، $p_ip_j=۰$. یعنی توزیع احتمال روی یک انجمن Q متمرکز شده است. پس:

$$\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)=\mathbb{P}(u\neq v)=۱-\sum_{i\in Q}p_i^۲.$$

G مثلث ندارد، پس هیچ انجمنی با بیشتر از ۲ عضو در G وجود ندارد. با توجه به نامساوی ینسن[۳] و محدب بودن تابع $f(z)=z^۲$، عبارت بالا وقتی بیشینه می‌شود که $\forall i,\ p_i=\frac{۱}{|Q|}$. پس:

$$\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)=۱-\sum_{i\in Q}p_i^۲\leq ۱-\frac{۱}{|Q|}\leq ۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}.$$

اگر توزیع احتمال در ابتدا یکنواخت باشد، یعنی: $p_۱=p_۲=\ldots=p_n=\frac{۱}{n}$، داریم:

$$\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)=\sum_{\substack{i,j\\ \{i,j\}\in E}}p_ip_j=\frac{۲|E|}{n^۲}.$$

طی این فرآیند سعی کردیم $\mathbb{P}(\{u,v\}\in E)$ را افزایش دهیم، پس،

$$\frac{۲|E|}{n^۲}\leq\frac{۱}{۲}\Longrightarrow |E|\leq\frac{n^۲}{۴}\Longrightarrow |E|\leq\left[\frac{n^۲}{۴}\right].$$

□

در واقع قضیهٔ [۱] می‌تواند برای انجمن‌های با اندازهٔ $s\geq ۳$ نیز تعمیم یابد. این مسئله در حالت کلی توسط ریاضی‌دان اهل مجارستان، پال توران حل شد و یک اثبات احتمالاتی شگفت‌انگیز از آن را می‌توانید در مرجع [۱] ببینید.

مثال‌های بیشتر

دومین سؤال مطرح‌شده در مقدمه را به یاد آورید. شهوداً، اگر $|\mathcal{F}|$ به اندازهٔ کافی زیاد باشد، باید $A,B\in\mathcal{F}$ را بتوان یافت که $A\subset B$. قضیهٔ زیر از اسپرنر،[۴] شرط کافی روی $|\mathcal{F}|$ را برای تحقق این آرزو(!) بیان می‌کند.

قضیه ۲. اگر $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ پادزنجیر از زیر مجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشد، یعنی برای هر $A,B\in\mathcal{F}$ داشته باشیم: $B\not\subseteq A$ و $A\not\subseteq B$، آن‌گاه:

$$|\mathcal{F}|\leq\binom{n}{[n/۲]}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم: $\mathcal{F}=\{A_۱,A_۲,\ldots,A_{|\mathcal{F}|}\}$، عضو دلخواهی از $\mathcal{F}$ مثل A_i را در نظر می‌گیریم، $|A_i|=a_i$. یکی از $n!$ جایگشت $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را با توزیع احتمال یکنواخت، (احتمال انتخاب هر جایگشت $\frac{۱}{n!}$ است) به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد E_i را ظاهر شدن اعضای A_i در بین a_i عدد ابتدایی جایگشت انتخاب شده تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\mathbb{P}(E_i)=\frac{۱}{\binom{n}{a_i}}\geq\frac{۱}{\binom{n}{[n/۲]}}.$$

توجه داریم که $\binom{n}{p}$ وقتی بیشینه می‌شود که $p=[\frac{n}{۲}]$.

---
[۳] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 -1925)
[۴] Emanuel Sperner (1905 - 1980)

هم‌چنین E_iها دو به دو مجزا هستند، چون $E_i \cap E_j$ پیشامد این است که اعضای A_i در بین a_i عدد ابتدایی جایگشت و اعضای A_j در بین a_j عدد ابتدایی جایگشت ظاهر شوند، یعنی $A_i \subset A_j$ یا $A_j \subset A_i$ که مخالف فرض است.
حال داریم:

$$۱ \geq \mathbb{P}(\bigcup_{i=۱}^{|\mathcal{F}|} E_i) = \sum_{i=۱}^{|\mathcal{F}|} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=۱}^{|\mathcal{F}|} \frac{۱}{\binom{n}{a_i}} \geq \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{[n/۲]}},$$

و حکم نتیجه می‌شود. $\square$

عدد توران $T(n,k,l)$ که $l \leq k \leq n$، کمترین تعداد زیرمجموعه‌های l-عضوی از یک زیرمجموعهٔ n-عضوی X است که هر زیرمجموعهٔ k-عضوی از X، شامل حداقل یکی از آن زیرمجموعه‌ها باشد.
در ادامه قضیهٔ کلاسیکی را در مورد عدد توران خواهیم دید و یک اثبات احتمالاتی متفاوت با اثبات غیراحتمالاتی معمول، (برای دیدن این اثبات می‌توانید به فصل اول [۳] مراجعه کنید.) برای آن بیان می‌کنیم.

قضیه ۳. اگر $|\mathcal{F}| = T(n,k,l)$ که $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های l-عضوی از یک مجموعهٔ n-عضوی باشد و شرط بالا را برآورده سازد، آن‌گاه:

$$|\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}.$$

اثبات. k عضو از X را به تصادف و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. اگر A پیشامد تعلق داشتن l عضو اول به یکی از اعضای $\mathcal{F}$ باشد، داریم:

$$\mathbb{P}(A) = |\mathcal{F}|.(\frac{l}{n}.\frac{l-۱}{n-۱}.\dots.\frac{۱}{n-l+۱}) = |\mathcal{F}|.\frac{l!(n-l)!}{n!} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{l}}.$$

از طرف دیگر اگر E_i پیشامد تعلق داشتن k عضو اول به i-اُمین زیرمجموعهٔ k-عضوی باشد، داریم:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=۱}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}(A \cap E_i) \geq \sum_{i=۱}^{\binom{n}{k}} (\frac{۱}{\binom{n}{k}}.\frac{۱}{\binom{k}{l}}) = \frac{۱}{\binom{k}{l}},$$

چون هر زیرمجموعهٔ k-عضوی X شامل حداقل یک عضو $\mathcal{F}$ است. پس:

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{l}} \geq \frac{۱}{\binom{k}{l}},$$

و اثبات تمام است. $\square$

کتاب‌نامه

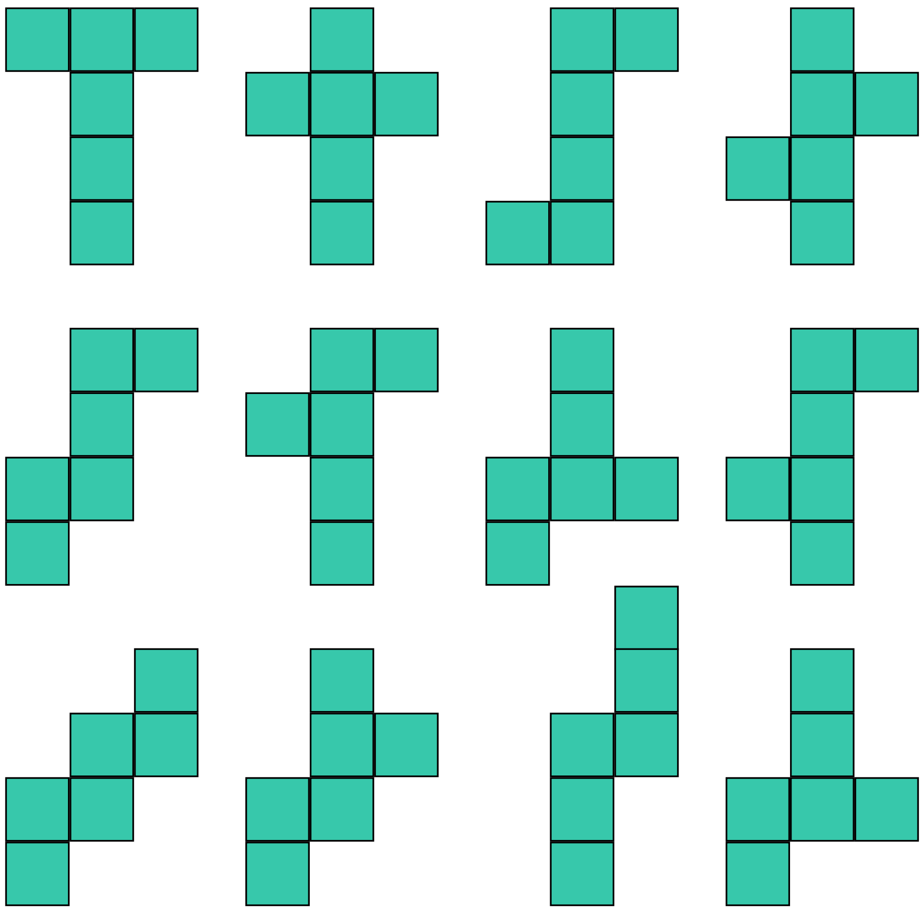
[1] M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] N. Alon, J. Spencer,The Probabilistic Method, second edition. Wiley-Intersciences Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] S. Jukna, Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science, Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] W. Mantel, Problem 28, Wiskundige Opgaven 10 (1907) 60–61.

طرح‌های گسترده مکعب



مصطفی عین اله زاده
دانش‌جوی دکتری
ریاضی
دانش‌گاه صنعتی شریف

اتحادهای شگفت‌انگیز ۲!

در شمارهٔ قبلی مجلهٔ پرگار، ترجمهٔ مقاله‌ای از دیمیتری فوخس را با عنوان «اتحادهای شگفت‌انگیز» منتشر کردیم. در ابتدای آن مقاله، یک سری نامتناهی با نام «تابع اویلر» به صورت زیر تعریف شده بود:

$$\phi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots .$$

همچنین جملات ابتدایی بسط این تابع نیز محاسبه شده بود:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40}\\ &\quad + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + x^{92} + x^{100} + \cdots .\end{aligned}$$

این بسط نشان می‌داد که ضرایب تابع اویلر فقط برای توان‌های $0, 1, 2, 5, 7, 12, \ldots$ ناصفر است و همهٔ ضرایب ناصفر هم برابر مثبت و یا منفی یک هستند. همان‌طور که در مقالهٔ فوخس دیدیم، اویلر با بررسی توان‌های ظاهر شده در تابع ϕ، حدس زد که این توان‌ها دقیقاً همان اعداد «مخمسی (تعمیم‌یافته)» هستند و ضرایب هم بعد از ضریب اول، به صورت دو تا منفی، دو تا مثبت، دو تا منفی و ... ظاهر می‌شوند. او نهایتاً توانست این اتحاد را ثابت کند:

$$\phi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}} \right).$$

این اتحاد یک کاربرد جالب ترکیبیاتی داشت و آن اینکه برای سری نامتناهی زیر

$$\pi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$$

($p(n)$ تعداد افرازهای عدد n و $p(0) = 1$) داشتیم:

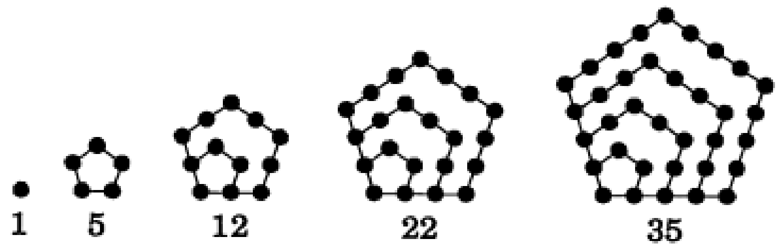
$$\pi(x)\phi(x) = 1.$$

در نتیجه با توجه به اتحاد اویلر و برابر قرار دادن ضرایب دو طرف، رابطهٔ بازگشتی زیر برای تابع افراز به دست می‌آمد ($n \geq ۱$):

$$p(n) = p(n-۱) + p(n-۲) - p(n-۵) - p(n-۷) + p(n-۱۲) + p(n-۱۵) - \cdots .$$

اعداد مخمسی

ساختاری از تعدادی پنج‌ضلعی منتظم درون هم مانند شکل‌های زیر در نظر بگیرید، که روی هر یک از اضلاع k امین پنج‌ضلعی درونی، $k+۱$ نقطه علامت زده شده است. به تعداد نقاط در ساختار شامل $n-۱$ پنج‌ضلعی، عدد مخمسی n ام می‌گویند. این اعداد با فرم صریح $\frac{۳n^۲-n}{۲}$ ($n \geq ۱$) داده می‌شوند.



اگر در این تعریف همهٔ اعداد صحیح n را اجازه دهیم، به اعداد به دست‌آمده معمولاً «اعداد مخمسی تعمیم‌یافته» می‌گویند. (مثل: $۰, ۱, ۲, ۵, ۷, ۱۲, ۱۵, ۲۲, ۲۶, \ldots$) اما ما در این مقاله برای راحتی، برای این اعداد هم از اصطلاح اعداد مخمسی استفاده می‌کنیم.

مدتی بعد از ترجمهٔ مقالهٔ فوخس، به قضیهٔ بسیار جالب دیگری از اویلر برخورد کردم که می‌گوید تابع جمع مقسوم‌علیه‌ها (σ) هم در یک رابطهٔ بازگشتی کاملاً مشابه رابطهٔ بالا برای تابع افراز صدق می‌کند:

$$\sigma(n) = \sigma(n-۱) + \sigma(n-۲) - \sigma(n-۵) - \sigma(n-۷) + \sigma(n-۱۲) + \sigma(n-۱۵) - \cdots .$$

(البته یک تفاوت کوچک وجود دارد و آن اینکه در اینجا مقادیر σ را در اعداد منفی برابر صفر می‌گیریم و اگر در عبارت بالا $\sigma(۰)$ ظاهر شود آن را برابر با n می‌گیریم.) این رابطهٔ بازگشتی هم معادل با یک اتحاد در سری‌های نامتناهی است. خوشبختانه توانستم یک مرجع خوب برای اثبات مقدماتی این اتحاد پیدا کنم (مرجع [۱]) و همین باعث شد تا خلاصه‌ای از آنچه یاد گرفتم را در مقاله‌ای دیگر به خوانندگان مجلهٔ پرگار تقدیم کنم. ضمناً خوب است که یادآور شوم، یک فصل از مرجع [۲]، مقاله‌ای است که نسخه‌ای کاملتر از مقالهٔ قبلی دیمیتری فوخس است و در آن برای بعضی از اتحادهایی که در مقالهٔ قبل بدون اثبات بودند، اثبات‌های مقدماتی ارائه شده و همچنین تعدادی تمرین اضافه شده است. مطالعهٔ این مقاله را هم به خوانندگان علاقه‌مند پیشنهاد می‌کنم.

تابع مجموع مقسوم‌علیه‌ها

همان‌طور که در مقدمه آمد، جمع مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n را معمولاً با $\sigma(n)$ نشان می‌دهند. با استفاده از قضایای مقدماتی نظریه‌اعداد می‌توان نشان داد که برای هر دو عدد نسبت به هم اول m و n:

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

به این خاصیت، «ضربی» بودن تابع σ می‌گویند. یک تابع ضربی با مقادیرش در توان‌های اعداد اول به صورت یکتا تعیین می‌شود. در مورد تابع σ هم می‌توان به سادگی دید که برای هر عدد اول p:

$$\sigma(p^k) = ۱ + p + \cdots + p^k = \frac{p^{k+۱} - ۱}{p - ۱}.$$

در نتیجه برای یک عدد طبیعی n که تجزیهٔ آن به عوامل اول به صورت $p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (p_i ها اول و متمایز) است، داریم:

$$\sigma(n) = \frac{p_۱^{\alpha_۱+۱} - ۱}{p_۱ - ۱} \cdot \frac{p_۲^{\alpha_۲+۱} - ۱}{p_۲ - ۱} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+۱} - ۱}{p_k - ۱}.$$

بنابراین مقدار $\sigma(n)$ رابطهٔ نزدیکی با تجزیهٔ n دارد، مثلاً $\sigma(n) = n + ۱$ اگر و فقط اگر n اول باشد. نگاه کردن به دنبالهٔ مقادیر σ هم در اعداد طبیعی، تا حدودی پیچیدگی آن را نشان می‌دهد:

$$۱, ۳, ۴, ۷, ۶, ۱۲, ۸, ۱۵, ۱۳, ۱۸, ۱۲, ۲۸, ۱۴, ۲۴, ۲۴, ۳۱, ۱۸, ۳۹, ۲۰, ۴۲, ۳۲, ۳۶, \ldots$$

اما آیا می‌توان مقادیر تابع σ را به وسیلهٔ یک رابطهٔ بازگشتی جمعی (یعنی بر حسب جمع و تفریق مقادیرش در اعداد کوچکتر) به دست آورد؟ جواب مثبت این سؤال یکی از کشفیات قابل توجه ریاضیدان معروف قرن هجدهم، لئونارد اویلر است. خود او در مقاله‌ای که در این رابطه نوشته است، می‌گوید:

> «به همین علت، به نظرم می‌آید که پیدا کردن قانون مشخصی که پیشرفت جملات دنبالهٔ $۱, ۳, ۴, ۷, ۶, \ldots$ را نشان می‌دهد و به وسیلهٔ آن هر جمله از دنباله به وسیلهٔ جملات پیشین قابل محاسبه است، را نباید ترقی کمی برای علم اعداد به شمار آورد؛ زیرا آنچه من یافتم، بسیار شگفت‌انگیز است و نشان می‌دهد که این دنباله به گونهٔ مشخصی از دنباله‌ها متعلق است که معمولاً بازگشتی نامیده می‌شوند و طبیعت آنها به صورتی است که هر جمله توسط جملات قبلی با قاعدهٔ مشخصی تعیین می‌شود. و چه کسی باور می‌کرد که این دنباله که بسیار آشفته است و در ظاهر هیچ وجه مشترکی با دنباله‌های بازگشتی ندارد، با این وجود در این دسته از دنباله‌ها قرار گیرد و یافتن رابطه‌ای بازگشتی برای آن ممکن باشد؟» [۱]

برای به دست آوردن این رابطهٔ بازگشتی، «تابع مولد» σ را در نظر می‌گیریم:

$$S(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \sigma(n) x^n.$$

[۱] [۳] پاراگراف ۷

به راحتی با توجه به اینکه σ از جمع مقسوم‌علیه‌ها تشکیل شده است، می‌توانیم ببینیم که:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{d=1}^{\infty} d(x^d + x^{2d} + x^{3d} + \cdots) \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{dx^d}{1-x^d}. \end{aligned}$$

صورت عبارت $\frac{dx^d}{1-x^d}$ را می‌توان با اندکی تغییر از مشتق مخرج به دست آورد و این نکتهٔ ساده در واقع ایدهٔ اصلی اثبات اویلر است.

$$\begin{aligned} S(x) &= -x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{-dx^{d-1}}{1-x^d} \\ &= -x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(1-x^d)'}{1-x^d} \end{aligned}$$

لم ۱. برای هر دو تابع مشتق‌پذیر و ناصفر f و g داریم:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

اثبات.

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + g'f}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

(یک روش دیگر هم استفاده از رابطهٔ $(\log(f))' = \frac{f'}{f}$ است.) □

با کمک استقرا، لم بالا را می‌توان به راحتی به تعداد دلخواهی از توابع گسترش داد:

$$\frac{(f_1 f_2 \cdots f_n)'}{f_1 f_2 \cdots f_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n}.$$

و این رابطه برای سری‌های توانی صوری هم برقرار است.

حال اگر همانند مقالهٔ قبل از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

$$\phi_n(x) = (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n),$$

با استفاده از لم برای هر n خواهیم داشت:

$$\sum_{d=1}^{n} d(x^d + x^{2d} + \cdots) = -x \sum_{d=1}^{n} \frac{(1-x^d)'}{1-x^d} = -x\frac{\phi_n'(x)}{\phi(x)}.$$

حال توجه کنید که برای هر توان ثابت از x مانند x^m، ضریب x^m در دو طرف تساوی از جایی به بعد (یعنی برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ) ثابت است. این مقدار برای طرف چپ به وضوح برابر $\sigma(m)$ است. برای طرف راست هم با کمی زحمت می‌توان دید که این ضریب برابر ضریب x^m در $-x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ است. (اثبات این ادعا، تمرین خوبی برای محک زدن توانایی شما

در کار کردن با سری‌های نامتناهی است!) بنابراین نهایتاً به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$S(x) = -x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

و در نتیجه:

$$S(x)\phi(x) = -x\phi'(x). \qquad (۱)$$

بنابر اتحاد اویلر داریم:

$$\phi(x) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \left(x^{\frac{۳n^۲-n}{۲}} + x^{\frac{۳n^۲+n}{۲}}\right).$$

پس با مشتق‌گیری از طرفین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -x\phi'(x) &= \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\left(\frac{۳n^۲-n}{۲}x^{\frac{۳n^۲-n}{۲}} + \frac{۳n^۲+n}{۲}x^{\frac{۳n^۲+n}{۲}}\right) \\ &= x + ۲x^۲ - ۵x^۵ - ۷x^۷ + ۱۲x^{۱۲} + ۱۵x^{۱۵} - \cdots . \end{aligned}$$

(یعنی ضریب x^k در $-x\phi'(x)$ تنها در صورتی ناصفر است که k مثبت و مخمسی باشد و در این حالت‌ها برابر مثبت یا منفی k است.)

در نتیجه با محاسبهٔ ضریب x^n در اتحاد ۱، برای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$\sigma(n) - \sigma(n-۱) - \sigma(n-۲) + \sigma(n-۵) + \sigma(n-۷) - \cdots = \begin{cases} (-۱)^{k+۱}n, & n = \frac{۳k^۲ \pm k}{۲} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

(در اینجا $\sigma(۰)$ را صفر در نظر گرفته‌ایم.) یک روش جالب دیگر برای بیان رابطهٔ بازگشتی بالا، صورت هوشمندانه‌ای است که در مقدمه ذکر شد، به این صورت که مقدار $\sigma(۰)$ را اگر در رابطهٔ بالا ظاهر شود، برابر n در نظر می‌گیریم. با این قرارداد می‌توانیم خیلی راحت بنویسیم:

$$\sigma(n) = \sigma(n-۱) + \sigma(n-۲) - \sigma(n-۵) - \sigma(n-۷) + \cdots .$$

> «از این [نتایج به دست‌آمده]، می‌توان دید که چه رابطهٔ نزدیک و شگفت‌آوری بین آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها [یعنی تئوری مشتق و انتگرال] نه تنها با آنالیز معمولی، بلکه با نظریهٔ اعداد (که به نظر فاصلهٔ زیادی با آن نوع حسابان پیشرفته دارد) وجود دارد.» [۲]

چند مسأله

با استفاده از ایده‌هایی کاملاً مشابه، می‌توان روابط دیگری بین تابع جمع مقسوم‌علیه‌ها و تابع افراز به دست آورد که به صورت یک مسألهٔ چندقسمتی در زیر آمده است. اثبات هر یک از این قسمت‌ها با استفاده از مطالبی که در این مقاله و

[۲] [۳] صفحهٔ ۳

مقالهٔ قبل خواندید، بسیار ساده و سرراست است. (در اینجا $\sigma(۰)$ را برابر با صفر در نظر بگیرید!)

الف) نشان دهید اگر $f(x)g(x) = ۱$، آنگاه

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = ۰.$$

ب) نشان دهید:

$$S(x) = -x\phi'(x)\pi(x),$$

و

$$S(x) = x\frac{\pi'(x)}{\pi(x)}.$$

ج) نشان دهید برای هر $n \geq ۱$،

$$\sigma(n) = p(n-۱) + ۲p(n-۲) - ۵p(n-۵) - ۷p(n-۷) + ۱۲p(n-۱۲) + \cdots ,$$

و

$$np(n) = \sigma(n) + \sigma(n-۱)p(۱) + \sigma(n-۲)p(۲) + \sigma(n-۳)p(۳) + \cdots .$$

و یک مسألهٔ دیگر: آیا می‌توانید با استفاده از روابط بازگشتی‌ای که در این مقاله دید، نتایجی در مورد رفتار دو تابع افراز و جمع مقسوم‌علیه‌ها (از قبیل خواص حسابی مانند باقیمانده بر یک عدد خاص و یا رشد و مرتبهٔ بزرگی) به دست آورید؟

کتاب‌نامه

[1] T. Osler, A. Hassen, T. Chandrupatla, Surprising connections between partitions and divisors. College Math. J. 38 (2007), no. 4, 278–287.

[2] D. Fuchs, S. Tabachnikov, Mathematical omnibus, Thirty lectures on classic mathematics. American Mathematical Society, (2007).

[3] L. Euler, J. Bell (tr.), An observation on the sums of divisors. arXiv:math/0411587 (2009).

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

نوشتهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست.

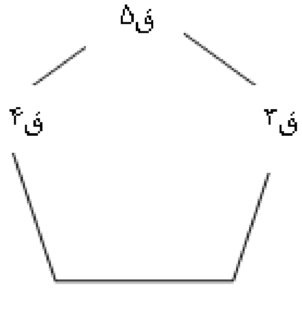
۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

راه حل.

قطعات را از سبک به سنگین، ق۱ تا ق۵ می‌نامیم. واضح است که اگر آرش (ق۵ و ق۳) یا (ق۵ و ق۴) را به دست آورد، به نیمی از کیک رسیده است زیرا بهرام دو قطعه را دارد که هر کدام از یکی از این دو قطعه سبک‌تر است.

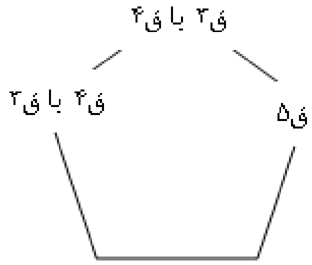
اکنون با توجه به موقعیت سه قطعهٔ سنگین‌تر نسبت به هم، مسأله را در چهار حالت مختلف حل می‌کنیم:

حالت اول. ق۳، ق۴ و ق۵ کنار هم باشند و ق۵ وسطی باشد. در این صورت کافی است آرش ق۵ را بردارد زیرا او در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۳ یا ق۴ را بردارد.



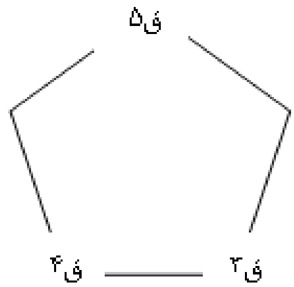
شکل ۱. حالت اول

حالت دوم. ق۳، ق۴ و ق۵ در کنار هم باشند و ق۵ وسط نباشد. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



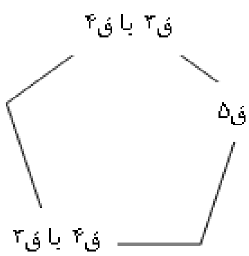
شکل ۲. حالت دوم

حالت سوم. ق۳، ق۴ هیچ‌کدام مجاور ق۵ نباشند. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



شکل ۳. حالت سوم

حالت چهارم. یکی از ق۳ یا ق۴ مجاور ق۵ باشد و دیگری مجاور این دو نباشد. در این صورت روش آرش بستگی به این دارد که آیا جمع ق۳ و ق۴ کم‌تر از نصف است یا نه. اگر کم‌تر بود، ق۵ را برمی‌دارد و در ادامه در به‌ترین حالت بهرام به ق۳ و ق۴ می‌رسد. در غیر این صورت (یعنی حالتی که جمع ق۳ و ق۴ دست‌کم نصف کیک است.) در این صورت آرش باید از بین ق۳ و ق۴ آنی که مجاور ق۵ نیست را بردارد. هر قطعه‌ای که بهرام در نوبت بعد بردارد، آرش یا به ق۵ یا به قطعهٔ باقی‌مانده از بین ق۳ و ق۴ دست‌رسی خواهد یافت و لذا از بین ق۳، ق۴ و ق۵ دو تایش به آرش می‌رسد که طبق فرض این قسمت از نصف کم‌تر نیست.



شکل ۴. حالت چهارم

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظهٔ خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظهٔ کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظهٔ آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظهٔ کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این‌که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظهٔ کامپیوتر باشند، می‌توان $f+g$ و $f-g$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند.)

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x-\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$، $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ و ...

همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنهٔ هر دو باشد، برابر باشند.)

راه حل.

ثابت می‌کنیم جواب مسأله، اعداد طبیعی فرد است.

اولاً توجه کنید که هر عبارتی که بتوان در حافظه ذخیره کرد، تابعی فرد است زیرا عبارت x که در ابتدا در حافظهٔ کامپیوتر است تابعی فرد است و نیز اگر f و g توابعی فرد باشند، $\frac{1}{f}$، $f+g$ و $f-g$ نیز توابعی فرد هستند.

پس برای nهای زوج، نمی‌توان x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. اکنون نشان می‌دهیم برای n فرد، می‌توان عبارتی متحد با x^n را در حافظه ذخیره کرد.

این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n=۲k+۱$. پایهٔ استقرا برای $k=۰$ واضح است. اکنون فرض کنید توانسته‌ایم عبارت‌های x، $x^۳$، $x^۵$، . . .، $x^{۲k-۱}$ (یا عبارت‌هایی متحد با آن‌ها) را در حافظه ذخیره کنیم. بنابراین می‌توانیم $x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳}$ و نیز $\frac{۱}{x^{۲k-۱}}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم. حال به ترتیب عبارات زیر را در حافظه ذخیره می‌کنیم:

$$x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳}} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱}}-\frac{۱}{x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳}} \equiv \frac{۱}{x^{۲k+۱}+x^{۲k-۱}}$$
$$\Rightarrow x^{۲k+۱}+x^{۲k-۱} \Rightarrow x^{۲k+۱}$$

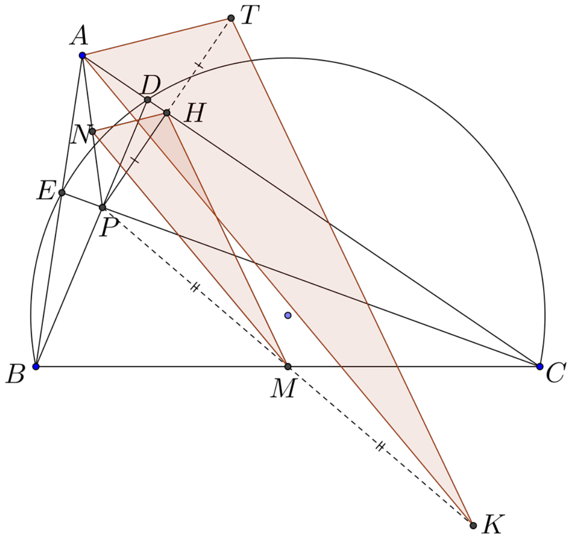
پس توانستیم $x^{۲k+۱}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم و حکم استقرا ثابت شد.

۳. دایرهٔ دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر Pمحل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

راه حل.

قرینه‌ی نقطه‌ی P نسبت به H و M را به ترتیب T و K می‌نامیم. در این صورت ادعا می‌کنیم مثلث‌های MNH و KAT متشابه هستند. برای این ادعا توجه کنید که $PN=NA$، $PH=HT$ و $PM=MK$ است. پس طبق قضیه‌ی تالس اضلاع این دو مثلث با هم موازی هستند و بنابراین ادعا ثابت شده است. از طرف دیگر با توجه به $\angle EBD=\angle ECD$ و برابری زاویه‌ی $\angle BAC$ در دو مثلث ABD و ACE این دو مثلث متشابه هستند. بنابراین برای اثبات حکم مسئله کافی است ثابت کنیم که دو مثلث AKT و ABD متشابه هستند. دقت کنید

که این معادل است با متشابه بودن مثلث‌های ABK و ADT است (چون $\angle BAD = \angle KAT$ اگر و تنها اگر $\angle BAK = \angle DAT$). یعنی کافی است ثابت کنیم که $\angle BAD = \angle KAT$ و هم‌چنین $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AT}$.

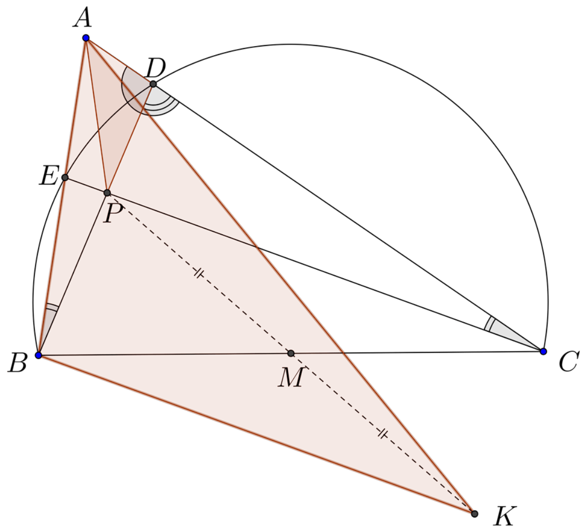


اما با توجه به این که T از قرینه‌کردن P نسبت به ضلع AC به دست آمده‌بود، مثلث‌های ADT و ADP با هم هم‌نهشت هستند و بنابراین برای اثبات حکم باید نشان دهیم که دو مثلث ABK و ADP متشابه هستند.

چون در چهارضلعی $BKCP$ قطرها یک‌دیگر را نصف کرده‌اند، این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است و لذا $BK \parallel CE$. این نتیجه می‌دهد که

$$\angle ABK = \angle AEC = ۱۸۰^\circ - \angle BEC = ۱۸۰^\circ - \angle BDC = \angle ADP$$

از سوی دیگر توجه کنید که مجدداً با توجه به این که $BKCP$ متوازی‌الاضلاع است، $BK = CP$. پس برای کامل شدن اثبات تشابه دو مثلث باید نشان دهیم $\frac{AD}{DP} = \frac{AB}{BK} = \frac{AB}{CP}$.



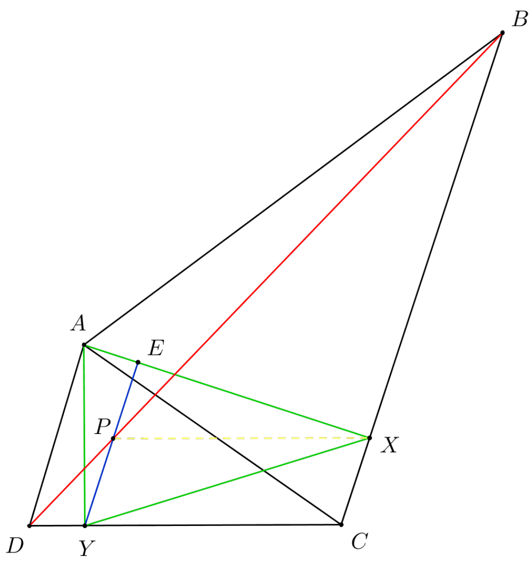
برای این هم طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و PDC باید ثابت کنیم:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle CDP)}$$

اما $\angle ABD = \angle DCP$ و $\angle ADB = ۱۸۰^\circ - \angle CDP$ است، پس سینوس‌های این زوایا با هم برابر هستند و بنابراین تساوی مورد نظر ما برقرار هست و بنابراین اثبات حکم مسئله به پایان می‌رسد.

۴. در چهارضلعی $ABCD$، AC نیمساز زاویهٔ A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

راه حل.



پای عمود وارد از Y بر AX را E می‌نامیم. اگر تقاطع YE با BD را P بنامیم برای اثبات حکم کافیست ثابت کنیم XP بر AY عمود است یا معادلاً XP موازی CD است. داریم:

$$YE||CB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$$

ازطرفی

$$ADC \sim ACB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$$

پس

$$\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه‌ی تالس XP با CD موازی است.

۵. محیط یک دایره را با $۲n$ نقطه به $۲n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n+۱$ بازه به طول‌های ۱، ۲، …، $n+۱$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

راه حل.

فرض کنید حکم برقرار نباشد. دراین‌صورت $n+۱$ بازه با شرایط مسأله وجود دارد که هیچ‌کدام داخل دیگری نیست. بازهٔ به طول ۱ را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که هیچ یک از بازه‌های دیگر شامل این بازه نیست، بقیهٔ بازه‌ها با این بازه (مگر احتمالاً در نقاط انتهایی) اشتراک ندارند و اگر درون این بازه را از دایره حذف کنیم و کمان باقی‌مانده را صاف کنیم، چنین چیزی خواهیم داشت:

> پاره‌خطی به طول $۲n-۱$ که $۲n$ نقطه با فاصله‌های واحد روی آن علامت زده شده است. همچنین n بازه با سر و ته این نقاط و به طول‌های ۲، …، $n+۱$ که هیچ کدام شامل دیگری نیست.

حال بازهٔ به طول $n+۱$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی که هیچ بازهٔ دیگری کاملاً درون این بازه قرار ندارد و بقیهٔ بازه‌ها از آن کوچکترند، هر کدام از این $n-۱$ بازه شامل یک نقطه در سمت چپ و یا یک نقطه در سمت راست بازهٔ به طول $n+۱$ است و فقط یکی از این حالات اتفاق می‌افتد. حال سرهای (یعنی چپ‌ترین نقطه‌های) هر یک از بازه‌های دستهٔ اول را در نظر بگیرید. این نقاط در سمت چپ بزرگترین بازه قرار دارند و متمایز هستند، چون اگر سر دو بازه یکی باشد، بازهٔ بزرگ‌تر بازهٔ کوچک‌تر را می‌پوشاند. به همین ترتیب نقاط ته بازه‌های دستهٔ دوم را در نظر بگیرید که در سمت راست بزرگترین بازه قرار دارند و متمایزند. پس در مجموع باید $n-۱$ نقطهٔ متمایز (سرهای دستهٔ اول و ته‌های دستهٔ دوم) داشته باشیم که همگی از میان نقاط علامت‌زده‌شده و بیرون بزرگترین بازه هستند. اما بزرگترین بازه خود شامل $n+۲$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده است و $n-۲$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده بیرون آن قرار دارد، پس نمی‌توان $n-۱$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده بیرون آن انتخاب کرد. پس فرض خلف به تناقض می‌انجامد و حکم ثابت می‌شود.

۶. $n \geq ۵۰$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می‌توان به صورت $۸۰+۱۴$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{۹۴}$ بزرگ‌تر نیستند.

راه حل.

از آن‌جا که در طول راه‌حل بارها از عبارت ((عوامل اول x از y بیش‌تر نیستند))، استفاده می‌کنیم، در همین ابتدا نماد $\sqsubseteq$ را برای نمایش این مفهوم قرارداد می‌کنیم. به این صورت که $x \sqsubseteq y$ یعنی همهٔ عوامل اول x کم‌تر یا مساوی y هستند.

دو نکتهٔ ساده ما را در رسیدن به این نمایش برای عدد n کمک می‌کند.

- برای هر عدد طبیعی $r \leq m$، $r \sqsubseteq m$. (اگر r عامل اولی بزرگ‌تر از m داشته باشد، باید $r > m$.)
- اگر $r \sqsubseteq m$ و $s \sqsubseteq m$، آن‌گاه $rs \sqsubseteq m$. (هر عامل اول rs عاملی از r یا s است.)

به طور خاص این نکته‌ها نتیجه می‌دهند که اگر بتوان عدد r را به صورت حاصل‌ضرب اعدادی کم‌تر یا مساوی m نوشت $r \sqsubseteq m$، برای مثال همواره $m^۲ \sqsubseteq m$.

فرض کنید m^2 و $(m+1)^2$ دو مربع کامل متوالی باشند که $m^2 \le n < (m+1)^2$. پس $n = m^2+r$ که $0 \le r \le 2m$. دقت کنید که در این صورت $[\sqrt{n}] = m$ و باید نشان دهید که n را می‌توان به صورت $a+b$ نوشت که $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$.

مسئله را بر حسب زوج یا فرد بودن m به دو حالت تقسیم می‌کنیم. (توجه کنید که چون $n \ge 50$ فرض شده است، $m \ge 7$ خواهد بود.)

اگر m فرد باشد، $m+1$ زوج است. حال $m+1$ عدد متوالی زیر را در نظر بگیرید:

$$n-(m+1), n-m, \dots, n-2, n-1$$

از بین این $m+1$ عدد متوالی یکی از آن‌ها مثلاً $n-j = m^2+r-j$ بر $m+1$ بخش‌پذیر است. ادعا می‌کنیم که در این صورت

$$n = \underbrace{(n-j)}_{a} + \underbrace{j}_{b}$$

نمایش مطلوب برای n را به دست می‌دهد. توجه کنید که برای هر $1 \le j \le m+1$، داریم $j \sqsubseteq m$، زیرا اگر $j \le m$ باشد، با توجه به نکتهٔ بالا این موضوع واضح است و اگر $j = m+1$، آن‌گاه $m+1 = 2(\frac{m+1}{2})$ و چون $2 \le m$ و $\frac{m+1}{2} \le m$، مجدداً طبق نکته‌های بالا $m+1 \sqsubseteq m$. پس در هر صورت $j \sqsubseteq m$. از طرف دیگر با توجه به نحوهٔ تعریف m، $n-j < (m+1)^2$ و در نتیجه $\frac{n-j}{m+1} < m+1$. پس $\frac{n-j}{m+1} \sqsubseteq m$ و این یعنی می‌توان نوشت:

$$n = \underbrace{(m+1)(\tfrac{n-j}{m+1})}_{a} + \underbrace{j}_{b}$$

که چون $m+1 \sqsubseteq m$ و $\frac{n-j}{m+1} \sqsubseteq m$ نتیجه می‌گیریم که $a \sqsubseteq m$ و بنابراین کار تمام است.

در حالتی که m زوج باشد، شبیه به حالت قبل این بار $m+2$ زوج خواهد بود. در این حالت $m+2$ عدد متوالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n-m, n-(m-1), \dots, n-1, n, n+1$$

از بین این $n+2$ عدد متوالی حتماً یکی از آن‌ها بر $m+2$ بخش‌پذیر است.

- اگر $1 \le j \le m$ یافت شود که $m+2 | n-j$، مشابه حالت قبل $\frac{n-j}{m+2} \le m$ و لذا $\frac{n-j}{m+2} \sqsubseteq m$. از طرف دیگر $m+2 = 2(\frac{m+2}{2})$ که $\frac{m+2}{2} \le m$, 2. پس $m+2 \sqsubseteq m$. بنابراین در کل $a = n-j$ و $b = j$ نمایش مطلوب ما خواهد بود.
- اگر خود n بر $m+2$ بخش‌پذیر باشد، چون $m+2$ زوج است می‌توان نوشت:

$$n = 2(\frac{m+2}{2})(\frac{n}{m+2}) = \underbrace{(\frac{m+2}{2})(\frac{n}{m+2})}_{a} + \underbrace{(\frac{m+2}{2})(\frac{n}{m+2})}_{b}$$

- اگر $m+2 | n+1$، چون $m^2+1 \le n+1 \le (m+1)^2$، $n+1 = (m-1)(m+2) = m^2+m-2$ و یا $n+1 = m(m+2)$ (مضرب‌های دیگر $m+2$ بزرگ‌تر از $(m+1)^2$ و یا کوچک‌تر از m^2 هستند). در حالت اول چون $m-3 < m$، $a = m^2$ و $b = m-3$ همان نمایش مطلوب است. در حالت دوم $n = (m+1)^2 - 2$.

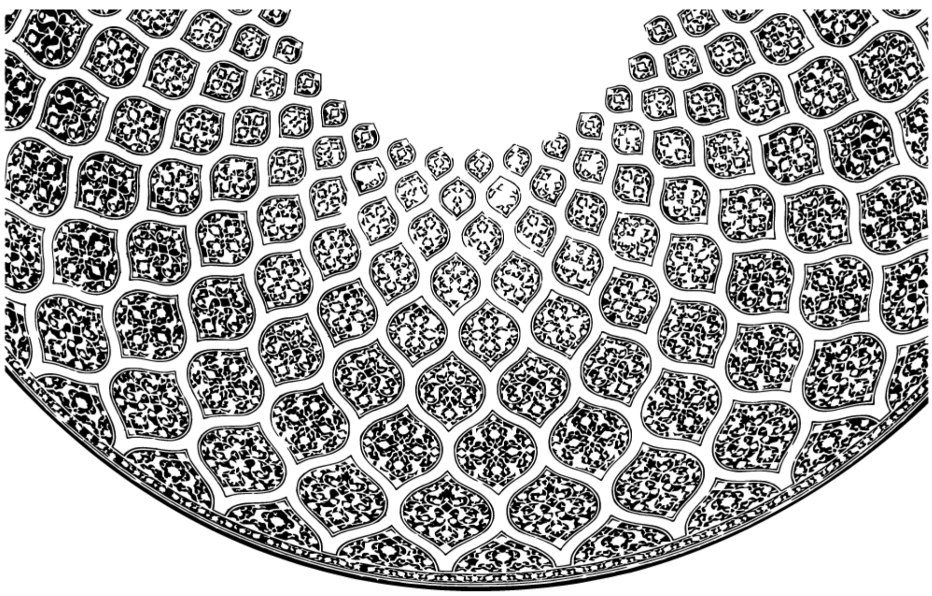
پس می‌توان نوشت:

$$n = (m+۱)^۲ - ۲ = (m+۱)^۲ - ۹ + ۷ = (m-۲)(m+۴) + ۷ = \underbrace{۲(m-۲)(\tfrac{m+۴}{۲})}_{a} + \underbrace{۷}_{b}$$

حال چون $m \geq ۷$، $m \geq \frac{m+۴}{۲}$ و لذا $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$. پس در این حالت هم نمایش مطلوب وجود دارد و بنابراین کار تمام است.

توضیح. توجه کنید که در طول راه‌حل از فرض $m \geq ۷$ تنها در آخرین استدلال استفاده شد و در مابقی استدلال‌ها فرض $m \geq ۴$ ($n \geq ۱۶$) کفایت می‌کرد. با توجه به این نکته استدلال بالا حکم مسئله را برای همهٔ اعداد طبیعی مگر اعداد به شکل $m^۲ + ۲m - ۱$ که m عددی زوج و کم‌تر از ۷ است نتیجه می‌دهد. این چنین عددی برای $m = ۶$ برابر ۴۷ است که می‌توان آن را به صورت ۳۲ + ۱۵ نوشت. در مورد $m = ۴$ هم به عدد ۲۳ برمی‌خوریم که می‌توان به سادگی دید که چنین نمایشی ندارد. در واقع حکم مسئله برای همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۷ به جز ۲۳ درست است.

نمایی از گنبد مسجد شیخ لطف‌اله



عرفان صلواتی
دکترای ریاضی
پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

از $x^2 \geq 0$ تا مسألهٔ هفدهم هیلبرت

۱.۶ نابرابری‌های عددی و نابرابری‌های جبری

همهٔ ما در درس ریاضی سال‌های اول مدرسه یاد گرفتیم که چه‌طور اعداد را با هم مقایسه کنیم و به سؤالاتی از این قبیل جواب دهیم:

- $\frac{22}{7}$ بزرگ‌تر است یا $\sqrt{10}$؟
- $2^{2^{2^2}}$ بزرگ‌تر است یا 3^{3^3}؟

این‌ها سؤالاتی دربارهٔ بزرگ‌تر و کوچک‌تر بودن اعدادی مشخص هستند.
ولی بعداً در دبیرستان، به مسائلی برخوردیم که در آن‌ها، رابطهٔ بزرگ‌تری و کوچک‌تری نه فقط برای دو عدد خاص، بلکه برای رده‌ای از اعداد برقرار بود. مثلاً:

- مجذور هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.
- قدرمطلق مجموع دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مجموع قدرمطلق‌های آن‌هاست.
- مجذور مجموع دو عدد مثبت، بزرگ‌تر است از مجموع مجذور آن‌ها.
- میانگین حسابی دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آن‌ها است.

عبارت‌های بالا را می‌توان به شکل جبریِ زیر نوشت:

- $x^2 \geq 0$،
- $|x+y| \leq |x|+|y|$،
- $(x+y)^2 > x^2+y^2$ برای $x, y > 0$،
- $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ برای $x, y > 0$.

به نابرابری‌هایی از این دست، نابرابری‌های جبری گویند. نابرابری‌های جبری، نابرابری‌هایی هستند که به ازای هر مقداردهی به متغیرهایشان (که در دامنهٔ آن‌ها باشد) برقراراند.

۲.۶ اصول موضوع نابرابری‌ها

رابطهٔ بزرگ‌تری و کوچک‌تری (یا به زبان ریاضی، رابطهٔ ترتیب)، که با $>$ و $<$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای بین اعداد حقیقی است. خواص اصلی این رابطه، که سایر خواص آن را می‌توان از آن‌ها نتیجه گرفت را می‌توان در چند اصل زیر خلاصه کرد:

اصل ۱. برای هر دو عدد حقیقی x و y، دقیقاً یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

$x < y$ یا $x = y$ یا $x > y$.

اصل ۲. اگر $x > y$ و $y > z$ آن‌گاه $x > z$.

اصل ۳. اگر $x > y$، آن‌گاه $x + z > y + z$.

اصل ۴. اگر $x > y$ و $z > 0$، آن‌گاه $xz > yz$.

البته نمادهای $\leq$ و $\geq$ نیز به کار می‌روند که منظور از $x \leq y$ این است که x کوچک‌تر یا مساوی y است.
شاید به نظرتان برسد که رابطهٔ $>$ خواص دیگری هم دارد که باید جزو اصول قرار بگیرند. ولی همان‌طور که خواهیم دید، همهٔ خواص رابطهٔ $>$ از همین چهار اصل ساده نتیجه می‌شوند. به عنوان مثال، چند نتیجهٔ مقدماتی را از این اصول موضوعه به دست می‌آوریم:

نتیجه ۱. اگر $x > 0$، آن‌گاه $-x < 0$.

اثبات. بنابر اصل ۱، دقیقاً یکی از سه حالت $-x > 0$، $-x = 0$ و $-x < 0$ رخ می‌دهد. حالتِ $-x = 0$ ممکن نیست چون در آن صورت $x = 0$ در حالی‌که بنابر فرض، $x > 0$. حالت $-x > 0$ نیز ممکن نیست، چون در آن صورت بنابر اصل ۳،

$$-x + x > 0 + 0 = 0,$$

یعنی $0 > 0$ که غلط است. پس تنها حالت ممکن، $-x < 0$ است. $\square$

نتیجه ۲. $x > y$، اگر و تنها اگر $x - y > 0$.

اثبات. بنابر اصل ۳ واضح است. $\square$

نتیجه ۳. اگر $x > y$، آن‌گاه $-x < -y$.

اثبات. با استفاده از نتیجهٔ ۱ و ۲ واضح است. $\square$

نتیجه ۴. اگر $x > y$ و $z < 0$، آن‌گاه $xz < yz$ (یعنی ضرب کردن در یک عدد منفی، جهت نابرابری را برعکس می‌کند).

اثبات. بنابر نتیجهٔ ۱، $-z > 0$ و در نتیجه بنابر اصل ۴،

$$x(-z) > y(-z),$$

پس $-xz > -yz$. اکنون بنابر نتیجهٔ ۳، $xz < yz$. $\square$

نتیجه ۵. برای هر عدد حقیقی x، $x^2 \geq 0$.

اثبات. بنابر اصل ۱، دقیقاً یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $x > 0$،

ب) $x = 0$،

ج) $x < 0$.

در حالت (الف)، بنابر اصل ۴، $x^2 = x \times x > 0$. در حالت (ب)، داریم $x^2 = 0$ و در نتیجه $x^2 \geq 0$. در حالت (ج)، بنابر نتیجهٔ ۱، $-x > 0$ و در نتیجه $x^2 = (-x)^2 > 0$. □

این‌ها نتایج بسیار مقدماتی‌ای بودند که چه بسا برای خواننده کاملاً بدیهی بوده و نیاز به اثبات نداشتند، اما هدف ما در این بخش این بود که نشان دهیم همهٔ ویژگی‌های ترتیبی اعداد حقیقی را می‌توان از ۴ اصل ارائه شده در ابتدای این بخش نتیجه گرفت.

تمرین ۱. رابطهٔ ترتیب، ارتباط تنگاتنگی با مفهوم اعداد مثبت و منفی دارد. اعداد مثبت عبارتند از اعدادی که از ۰ بزرگ‌تر هستند و اعداد منفی عبارتند از اعدادی که از صفر کوچک‌تر هستند. مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ و مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی را با $\mathbb{R}^-$ نشان می‌دهند. همانطور که می‌توان مجموعهٔ $\mathbb{R}^+$ را از روی رابطهٔ $<$ تعریف کرد، می‌توان رابطهٔ $<$ را نیز از روی مجموعهٔ $\mathbb{R}^+$ تعریف کرد، به این صورت که می‌گوییم $x > y$ هرگاه $x - y \in \mathbb{R}^+$.
ثابت کنید اصول ۱ تا ۴ برای رابطهٔ ترتیب، معادل با ۳ اصل زیر برای $\mathbb{R}^+$ هستند:

اصل ۱'. برای هر عدد ناصفر x، دقیقاً یکی از x و $-x$ در $\mathbb{R}^+$ است.

اصل ۲'. $\mathbb{R}^+$ نسبت به جمع بسته است (یعنی اگر $x, y \in \mathbb{R}^+$، آن‌گاه $x + y \in \mathbb{R}^+$).

اصل ۳'. $\mathbb{R}^+$ نسبت به ضرب بسته است (یعنی اگر $x, y \in \mathbb{R}^+$، آن‌گاه $xy \in \mathbb{R}^+$).

۳.۶ چند نابرابری جبری مقدماتی

ابتدا با چند نابرابری یک‌متغیره شروع می‌کنیم.

الف) $x^2 \geq 0$

این نابرابری را می‌توان مقدماتی‌ترین نابرابری جبری دانست که خود، پایهٔ بسیاری از نابرابری‌های جبری دیگر است.

ب) برای $x > 0$، $x + \frac{1}{x} \geq 2$

اثبات. داریم

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}.$$

از آن‌جا که $(x-1)^2 \geq 0$ و $x > 0$ پس $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$، که حکم از آن نتیجه می‌شود. □

پ) برای هر x، $x^۲ + x + ۱ > ۰$

اثبات.

$$x^۲ + x + ۱ = (x + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴} \geq \frac{۳}{۴} > ۰.$$

□

روش بالا را «مربع کامل‌سازی» گویند و با استفاده از آن می‌توان هر چندجمله‌ای درجه دوم یک متغیره را تعیین علامت کرد. به طور کلی داریم:

$$ax^۲ + bx + c = a(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}.$$

عبارت $b^۲ - ۴ac$، مبین چندجمله‌ای درجه ۲ خوانده می‌شود و با Δ نشان داده می‌شود.
بنابراین اگر $\Delta < ۰$ و $a > ۰$، آن‌گاه برای هر x، داریم $ax^۲ + bx + c > ۰$ و اگر $\Delta < ۰$ و $a < ۰$، آن‌گاه برای هر x، داریم $ax^۲ + bx + c < ۰$.
یعنی به طور خلاصه، اگر Δ منفی باشد، آن‌گاه $ax^۲ + bx + c$ همواره هم‌علامت با a است.
اکنون با چند نابرابری چندمتغیره ادامه می‌دهیم.

ت) برای هر x, y، $x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$

اثبات.

$$x^۲ + y^۲ - ۲xy = (x - y)^۲ \geq ۰.$$

□

ث) برای هر x, y, z، $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx$

اثبات. در این‌جا نیز از ایدهٔ مربع کامل‌سازی استفاده می‌کنیم. یعنی سعی می‌کنیم چیزی را که می‌خواهیم ثابت کنیم نامنفی است، به صورت مجموع مربعات عبارت‌هایی دیگر بنویسیم.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - (xy + yz + zx) = \frac{۱}{۲}\left((x - y)^۲ + (y - z)^۲ + (z - x)^۲\right).$$

دقت کنید که عبارت سمت راست بالا، مجموع سه عدد نامنفی است پس خودش نیز نامنفی است و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. علاوه بر آن، این نتیجه را می‌گیریم که اگر در نابرابری بالا تساوی رخ دهد، باید هر سه عدد $x - y$، $y - z$ و $z - x$ صفر باشند که از آن نتیجه می‌شود $x = y = z$. □

ج) برای هر x, y, z مثبت، $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \geq \frac{۹}{x+y+z}$

اثبات. با ضرب کردن دو طرف در $x + y + z$ به حکم معادل زیر می‌رسیم:

$$(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z})(x + y + z) \geq ۹,$$

که با بسط دادن عبارت سمت چپ و مرتب کردن جملات، به نابرابری معادل زیر می‌رسیم:

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\geq 6.$$

اکنون دقت کنید که بنابر گزاره (ب) این بخش، داریم،

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{x} &\geq 2,\\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y} &\geq 2,\\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x} &\geq 2,\end{aligned}$$

که با جمع کردن این نابرابری‌ها، حکم نتیجه می‌شود. □

خواننده لازم است به نحوهٔ اثبات بالا توجه کند. ما از حکم شروع کردیم و با اعمال مُجازی مانند ضرب و تقسیم دو طرف نابرابری در یک عدد مثبت، به نابرابری‌های ساده‌تری رسیدیم و آن‌قدر این کار را ادامه دادیم تا به یک نابرابری بدیهی رسیدیم. از آن‌جا که اعمال استفاده شده در بالا، همگی برگشت‌پذیر هستند پس نهایتاً می‌توانیم با شروع از آن نابرابری بدیهی و حرکت رو به عقب، حکم را نتیجه بگیریم. این روش در اثبات نابرابری‌ها بسیار مفید است، فقط همواره باید مراقب بود که اعمال به کار رفته، برگشت‌پذیر باشند.

ج) برای هر a,b,c مثبت، $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

اثبات. دو طرف نابرابری را با ۳ جمع می‌کنیم:

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2},$$

که با گرفتن مخرج مشترک، تبدیل می‌شود به:

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2},$$

که معادل است با:

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9.$$

اکنون اگر متغیرهای جدید $x=b+c$، $y=a+c$ و $z=a+b$ را تعریف کنیم، می‌توانیم نابرابری بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq 9,$$

که آن را در گزاره قبل ثابت کردیم. □

همان‌طور که در مثال اخیر دیدید، «تعریف متغیرهای جدید»، یکی از فنون مفید در اثبات نابرابری‌ها است.

تمرین ۲. نشان دهید برای هر عدد حقیقی x،

$$x^۸ - x^۵ + x^۲ - x + ۱ > ۰.$$

تمرین ۳. نشان دهید برای هر دو عدد مثبت a و b،

$$\frac{(۱+a)(۱+b)}{۲+a+b} < \frac{۱+a+b}{۲}.$$

تمرین ۴. نشان دهید برای هر a, b مثبت، $a^a.b^b \geq a^b.b^a$.

تمرین ۵. نشان دهید اگر $a > b > ۰$ و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\frac{n+۱}{n}a > \frac{a^{n+۱} - b^{n+۱}}{a^n - b^n} > \frac{n+۱}{n}b.$$

تمرین ۶. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن عبارت زیر را برای اعداد مثبت a، b، c و d بیابید:

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

تمرین ۷. نشان دهید برای هر x، y و z حقیقی،

$$x^۴ + y^۴ + z^۴ \geq xyz(x+y+z).$$

تمرین ۸. کم‌ترین مقدار ممکن عبارت $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$ را برای اعداد مثبت a، b و c که در شرط $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$ صدق می‌کنند، بیابید.

۴.۶ روش مجموع مربعات

روش مجموع مربعات در نابرابری‌ها، مبتنی بر این ایده است که هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \geq B$، کافی است $A - B$ را به صورت مجموع مربعات عبارت‌های دیگر بنویسیم.
این روش یکی از مقدماتی‌ترین و در عین حال پرکاربردترین روش‌ها در اثبات نابرابری‌هاست. در این بخش، دو نابرابری معروف، نابرابری کوشی-شوارتز و نابرابری حسابی-هندسی را بیان و با استفاده از روش مجموع مربعات اثبات می‌کنیم. البته لازم به ذکر است که این نابرابری‌ها اثبات‌های ساده‌تری هم دارند که از بعضی جهات آموزنده‌تر هم هستند. به همین دلیل خواننده را به مطالعهٔ اثبات‌های دیگر در منابع دیگر دعوت می‌کنیم.

۱.۴.۶ نابرابری کوشی-شوارتز

اگر $x_۱, \dots, x_n$ و $y_۱, \dots, y_n$ اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(x_۱y_۱ + \dots + x_ny_n)^۲ \leq (x_۱^۲ + \dots + x_n^۲)(y_۱^۲ + \dots + y_n^۲),$$

و تساوی زمانی رخ می‌دهد که یکی از دو دنبالهٔ $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$ مضربی حقیقی از دیگری باشد (یعنی عدد ثابت c موجود باشد که برای هر $i = 1, \dots, n$، $x_i = cy_i$ و یا عدد ثابت c موجود باشد که برای هر $i = 1, \dots, n$، $y_i = cx_i$).

اثبات با روش مجموع مربعات. اتحاد زیر را داریم:

$$(\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i^2) - (\sum x_i y_i)^2 = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

اتحاد بالا (که چک کردن صحت آن را به خواننده واگذار می‌کنیم) نابرابری کوشی-شوارتز را اثبات می‌کند و علاوه بر آن نشان می‌دهد که تساوی در نابرابری کوشی-شوارتز زمانی رخ می‌دهد که برای هر i و j، $x_i y_j = x_j y_i$. خواننده می‌تواند به راحتی بررسی کند که این شرایط معادل همان حالت تساوی‌ای است که در صورت قضیه بیان شده است. $\square$

۲.۴.۶ نابرابری حسابی-هندسی

اگر $a_1, \dots, a_n \geq 0$، آن‌گاه

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

و تساوی زمانی رخ می‌دهد که همهٔ a_iها برابر باشند.
(سمت چپ عبارت بالا، میانگین حسابی اعداد $a_1, \dots, a_n \geq 0$ و سمت راست، میانگین هندسی آن‌ها نامیده می‌شود.)

اثبات با روش مجموع مربعات. ابتدا لازم است نابرابری را به شکل یک عبارت چندجمله‌ای بنویسیم که متغیرهای آن هیچ قیدی (مثلاً نامنفی بودن) ندارند. بدین‌منظور متغیرهای جدید x_1، ...، x_n را به صورتی می‌گیریم که

$$x_1^{2n} = a_1, \; \dots, \; x_n^{2n} = a_n.$$

با تعریف این متغیرهای جدید، نابرابری حسابی-هندسی تبدیل به نابرابری معادل زیر می‌شود:

$$\frac{x_1^{2n} + \cdots + x_n^{2n}}{n} \geq x_1^2 \cdots x_n^2,$$

که این معادل است با

$$x_1^{2n} + \cdots + x_n^{2n} - n x_1^2 \cdots x_n^2 \geq 0.$$

اکنون عبارت بالا را به صورت مجموع مربع‌های عبارات جبری دیگری می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}x_1^{2n}+\cdots+x_n^{2n}-nx_1^2\cdots x_n^2 &=\\ &\frac{1}{2(n-1)}\sum_{\text{متمایز } i_1,i_2}(x_{i_1}^{2n-2}-x_{i_2}^{2n-2})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)\\ &+\frac{1}{2(n-1)(n-2)}\sum_{\text{متمایز } i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}^{2n-4}-x_{i_2}^{2n-4})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_3}^2\\ &+\frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{\text{متمایز } i_1,i_2,i_3,i_4}(x_{i_1}^{2n-6}-x_{i_2}^{2n-6})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_3}^2x_{i_4}^2\\ &+\cdots\\ &+\frac{1}{2(n-1)!}\sum_{\text{متمایز } i_1,\ldots,i_n}(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_3}^2\cdots x_{i_n}^2.\end{aligned}\tag{1}$$

بررسی درستی اتحاد بالا را به خواننده واگذار می‌کنیم. اکنون کافی است در عبارت بالا، حاصل‌ضرب‌های به شکل $(x_i^{2k}-x_j^{2k})(x_i^2-x_j^2)$ را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$(x_i^{2k}-x_j^{2k})(x_i^2-x_j^2)=(x_i^2-x_j^2)^2(x_i^{2k-2}+x_i^{2k-4}x_j^2+\cdots+x_j^{2k}).$$

با این کار، عبارت (۱) را می‌توان کاملاً به صورت حاصل‌جمعی از مربعات عبارت‌های جبری نوشت و بنابراین نابرابری حسابی-هندسی اثبات می‌شود. □

به عنوان مثال، برای $n=3$، اتحاد بالا، همان اتحاد اویلر را می‌دهد:

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2=\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

و برای $n=4$، اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}a^8+b^8+c^8+d^8-4a^2b^2c^2d^2 &=\\ &\frac{1}{3}\Bigg(\Big((a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(a^2-d^2)^2+(b^2-c^2)^2+(b^2-d^2)^2+(c^2-d^2)^2\Big)\cdot\\ &\Big(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\Big)\\ &+(a^2-b^2)^2(a^4+b^4)+(a^2-c^2)^2(a^4+c^4)+(a^2-d^2)^2(a^4+d^4)+(b^2-c^2)^2(b^4+c^4)+(b^2-d^2)^2(b^4+d^4)+(c^2-d^2)^2(c^4+d^4)\Bigg).\end{aligned}$$

۵.۶ مسألهٔ هفدهم هیلبرت

در بخش قبل دیدیم که روش مجموع مربعات، روشی قدرتمند برای اثبات نابرابری‌هاست. این سؤال طبیعی پیش می‌آید که ظرفیت این روش چه قدر است؟ آیا هر نابرابری را می‌توان با استفاده از آن ثابت کرد؟
البته روشن است که اثبات هر نابرابری انتظار نابه‌جایی است و طبیعی است که خود را محدود به نابرابری‌های چندجمله‌ای

کنیم.
فرض کنید $P(x_1, \ldots, x_n)$ یک چندجمله‌ای n متغیره باشد که برای هر x_1، ...، x_n حقیقی، داشته باشیم

$$P(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$

آیا می‌توان P را به صورت مجموع مربعات تعدادی چندجمله‌ای دیگر نوشت؟
ساده‌ترین حالت این مسأله، حالت $n = 1$ است. جواب سؤال بالا در این حالت مثبت است و در واقع داریم:

قضیه ۶. هر چند جمله‌ای یک‌متغیرهٔ $P(x)$ که برای هر x، $P(x) \geq 0$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی نوشت. یعنی

$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2.$$

اثبات. اثبات این قضیه با استفاده از قضیهٔ اساسی جبر انجام می‌گیرد. ابتدا یک لم اثبات می‌کنیم:

لم ۷. اگر $P(x)$ و $Q(x)$ هر کدام به شکل مجموع مربعات دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه PQ نیز همین‌طور است.

اثبات لم. فرض کنید $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$ و $Q(x) = C(x)^2 + D(x)^2$. آن‌گاه داریم:

$$PQ = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

□

اکنون به اثبات قضیه باز می‌گردیم. از قضیهٔ معروف زیر که نتیجه‌ای از قضیهٔ اساسی جبر است استفاده می‌کنیم:

قضیه ۸. هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ای‌های درجه یک و درجه دوی تحویل‌ناپذیر نوشت.

بنابر قضیهٔ بالا، می‌توان نوشت

$$P(x) = a(x - \alpha_1)^{t_1} \cdots (x - \alpha_r)^{t_r} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdots (x^2 + \beta_s x + \gamma_s),$$

که α_iها متمایز هستند.
از آن‌جا که چندجمله‌ای‌های $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ تحویل‌ناپذیر هستند، نتیجه می‌گیریم که ریشهٔ حقیقی ندارند و در نتیجه $\beta_i^2 < 4\gamma_i$، پس می‌توان نوشت:

$$x^2 + \beta_i x + \gamma_i = (x + \frac{\beta_i}{2})^2 + (\sqrt{\gamma_i - \frac{\beta_i^2}{4}})^2.$$

یعنی هر عامل دوی $P(x)$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو چندجمله‌ای نوشت. پس بنابر لم بالا، حاصل‌ضرب همهٔ آن‌ها را نیز می‌توان به شکل مجموع مربعات دو چندجمله‌ای نوشت. پس چندجمله‌ای‌های $C(x)$ و $D(x)$ وجود دارند که

$$(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdots (x^2 + \beta_s x + \gamma_s) = C(x)^2 + D(x)^2.$$

از طرف دیگر، چون همواره $P(x) \geq \circ$ پس باید $a > \circ$ و علاوه بر آن، همهٔ t_iها نیز زوج باشند. چون اگر یک t_i فرد باشد، آن‌گاه $P(x)$ در α_i تغییر علامت می‌دهد. پس اگر قرار دهیم

$$V(x) = \sqrt{a}(x-\alpha_{\text{۱}})^{\frac{t_{\text{۱}}}{\text{۲}}} \cdots (x-\alpha_r)^{\frac{t_r}{\text{۲}}},$$

داریم:

$$P(x) = (V(x)C(x))^{\text{۲}} + (V(x)D(x))^{\text{۲}} = A(x)^{\text{۲}} + B(x)^{\text{۲}}.$$

□

اکنون باز می‌گردیم به حالت کلی مسأله‌ای که در ابتدای این بخش مطرح کردیم. جواب در حالت $n > \text{۱}$ مثبت نیست. مثلاً گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که چندجمله‌ای سه‌متغیره‌ای وجود دارد که همواره نامنفی است ولی نمی‌توان آن را به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت.

گزاره ۹. چندجمله‌ای $P(x,y,z) = x^{\text{۴}}y^{\text{۲}} + y^{\text{۴}}z^{\text{۲}} + z^{\text{۴}}x^{\text{۲}} - \text{۳}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}z^{\text{۲}}$ همواره نامنفی است ولی نمی‌توان آن را به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت.

اثبات. نامنفی بودن P نتیجهٔ مستقیم نابرابری حسابی-هندسی است.
فرض کنید P را بتوان به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت، مثلاً

$$P(x,y,z) = f_{\text{۱}}(x,y,z)^{\text{۲}} + \cdots + f_m(x,y,z)^{\text{۲}}.$$

اولاً می‌توان فرض کرد که هر f_i، فقط از جملات درجهٔ ۳ تشکیل شده است (چون اگر جملات با درجهٔ پایین‌تر را از f_iها حذف کنیم، تغییری در جملات درجهٔ ۶ در $f_i^{\text{۲}}$ها حاصل نمی‌شود).
سپس توجه کنید که f_iها نمی‌توانند جملات $x^{\text{۳}}$، $y^{\text{۳}}$ و $z^{\text{۳}}$ را داشته باشند، چون در آن صورت در $f_i^{\text{۲}}$ جملات $x^{\text{۶}}$، $y^{\text{۶}}$ و $z^{\text{۶}}$ با ضریب مثبت ظاهر می‌شوند که با هیچ جملهٔ دیگری ساده نمی‌شوند.
همچنین f_iها نمی‌توانند جملات $xy^{\text{۲}}$، $yz^{\text{۲}}$ یا $zx^{\text{۲}}$ را داشته باشند. چون در آن صورت در $f_i^{\text{۲}}$، جملات $x^{\text{۲}}y^{\text{۴}}$، $y^{\text{۲}}z^{\text{۴}}$ و $z^{\text{۲}}x^{\text{۴}}$ با ضریب مثبت ظاهر می‌شوند و از آن‌جا که $x^{\text{۳}}$، $y^{\text{۳}}$ و $z^{\text{۳}}$ نداریم، این جملات به هیچ طریق دیگری نمی‌توانند ظاهر شوند که ساده شوند.
پس هر f_i باید به شکل $a_ix^{\text{۲}}y + b_iy^{\text{۲}}z + c_iz^{\text{۲}}x + d_ixyz$ باشد که در این صورت ضریب $x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}z^{\text{۲}}$ در $\sum f_i^{\text{۲}}$ عبارت است از $\sum d_i^{\text{۲}}$ که مثبت است و نمی‌تواند $\text{۳}-$ باشد.
این تناقض نشان می‌دهد که P را نمی‌توان به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت. □

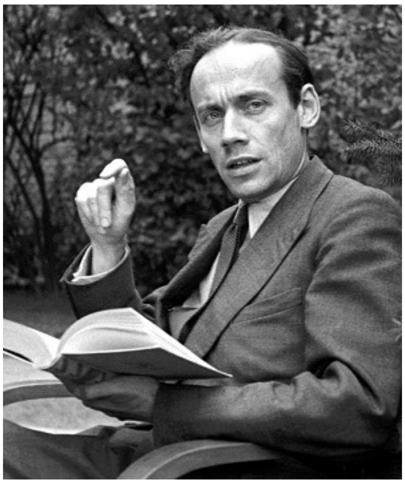
تمرین ۹. نشان دهید چندجمله‌ای $P(x,y) = x^{\text{۴}}y^{\text{۲}} + x^{\text{۲}}y^{\text{۴}} + \text{۱} - \text{۳}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}$ همواره نامنفی است ولی نمی‌توان آن را به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت.

تمرین ۱۰. نشان دهید چندجمله‌ای زیر همواره نامنفی است ولی نمی‌توان آن را به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت.

$$S(x,y) = x^{\text{۲}}(x^{\text{۲}}-\text{۱})^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}(y^{\text{۲}}-\text{۱})^{\text{۲}} - (x^{\text{۲}}-\text{۱})(y^{\text{۲}}-\text{۱})(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}-\text{۱}).$$

راهنمایی: به نقاطی که S در آن‌ها صفر می‌شود توجه کنید.

دیوید هیلبرت



امیل آرتین

از گزارهٔ ۹ و تمرین‌های بالا، شاید به نظر برسد که لزوماً نمی‌توان نابرابری‌های چندجمله‌ای را با روش مجموع مربعات ثابت کرد. اما دیوید هیلبرت [۱]، ریاضی‌دان معروف آلمانی، سؤال هوشمندانه‌ای مطرح کرد و آن را به عنوان هفدهمین مسأله در لیست ۲۳ مسألهٔ معروفش که در سال ۱۹۰۰ در کنگرهٔ جهانی ریاضی‌دانان در پاریس مطرح کرد، جای داد. این مسأله به مسألهٔ هفدهم هیلبرت معروف شد.

مسألهٔ هفدهم هیلبرت: آیا هر چندجملهٔ چندمتغیرهٔ نامنفی را می‌توان به صورت مجموع مربعات عبارت‌های گویا نوشت؟ (عبارت گویا یعنی عبارتی به شکل $\frac{F}{G}$ که F و G خودشان چندجمله‌ای‌های چندمتغیره هستند.)

خود هیلبرت موفق به حل این مسأله در حالت کلی نشد، ولی توانست آن را در حالت چندجمله‌ای‌های دو متغیره، با روشی بسیار دشوار حل کند، تا این‌که در سال ۱۹۲۷، امیل آرتین [۲]، ریاضی‌دان معروف دیگری، مسألهٔ هیلبرت را حل کرد و نشان داد که جواب آن مثبت است.

اثبات آرتین اگرچه دشوار نیست ولی از مفاهیم جبر مجرد پیشرفته استفاده می‌کند و امکان آوردن آن در این‌جا نیست. حالتِ خاصی از مسألهٔ هفدهم هیلبرت را می‌توان با روشی مقدماتی حل کرد:

گزاره ۱۰. فرض کنید $P(x_۱, \ldots, x_m)$ یک چندجمله‌ای همگن باشد که اگر $x_۱, \ldots, x_m \geq ۰$، و حداقل یکی از x_iها ناصفر باشند، آن‌گاه $P(x_۱, \ldots, x_m) > ۰$. ثابت کنید P را می‌توان به شکل

$$P = \frac{F}{G}$$

نوشت که F و G چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب مثبت هستند.

خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند اثباتی از این گزاره را در منبع [۴]، صفحهٔ ۵۷ ببینند.

در پایان نیز، تعدادی مسألهٔ مرتبط با مسألهٔ هفدهم هیلبرت می‌آوریم.

تمرین ۱۱. (آزمون مرحلهٔ سوم المپیاد ریاضی ۱۳۸۶) فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای باشد که برای $x \geq ۰$ داریم $P(x) \geq ۰$.

---
[۱] David Hilbert
[۲] Emil Artin

ثابت کنید $P(x)$ را می‌توان به صورت

$$P(x) = A(x)^۲ + xB(x)^۲$$

نوشت که A و B چندجمله‌ای هستند.

تمرین ۱۲. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد که برای $x \geq ۰$ داشته باشیم $P(x) > ۰$. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد که چندجمله‌ای $(x+۱)^n P(x)$، همهٔ ضرایبش نامنفی باشند.
(با استفاده از این حکم، می‌توان گزارهٔ ۱۰ را در حالت دو متغیره نتیجه گرفت.)

تمرین ۱۳. چندجمله‌ای معرفی شده در گزارهٔ ۹ را به صورت مجموع مربعات عبارت‌های گویا بنویسید.

تمرین ۱۴. فرض کنید $P(x_۱, \ldots, x_n)$ یک چندجمله‌ای همگن از درجهٔ ۲ و همواره نامنفی باشد. نشان دهید P را می‌توان به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت.

تمرین ۱۵. این مسأله را هیلبرت طرح و حل کرده است: هر چندجمله‌ای درجهٔ ۴ دومتغیرهٔ $P(x,y)$ که همواره نامنفی باشد را می‌توان به صورت مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها نوشت. (هیلبرت در واقع نشان داد که P را می‌توان به صورت جمع مربعات سه چندجمله‌ای نوشت.)
برای راه حل این مسأله به منبع [۳]، صفحهٔ ۲۵۳ مراجعه کنید.

کتاب‌نامه

[1] J. Herman, R. Kucera, J. Simsa, Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory. Vol 1, CMS Books in Mathematics, Springer, 2000.

[2] E. Barbeau, Polynomials. Problem Books in Mathematics, Springer, 2003.

[3] V. Prasolov, Polynomials. Algorithms and Computation in Mathematics, Vol 11, Springer, 2009.

[4] G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya, Inequalities. Cambridge University Press, 1952.

حمیدرضا زیارتی
معلم و فعال در زمینه‌ی آموزش ریاضی

بازی و معما

مسأله ۱. در سه جدول پرشده‌ی زیرد سه عبارت ریاضی را می‌بینید که مقدار هر سه ردیف برابر ۱۰ است. به علاوه قسمت‌های هم‌رنگ در سطرهای مختلف محتویات یک‌سانی دارند.

1	.	5	*	4	+	4

1	.	2	*	1	0	-	2

3	*	5	0	-	1	4	0

شش ردیف زیر را هم با همین شرایط پر کنید.

1					6			+	1

2	+	2			+	2			2

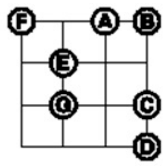
3			3			3	

4		-	4			+	2	

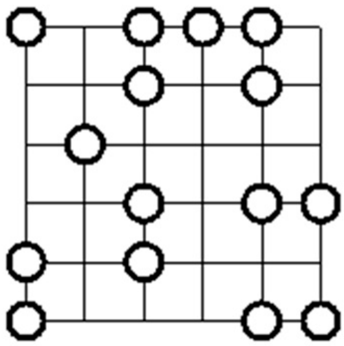
5		-			9			-	6

6			-	2	

مسأله ۲. منظور ما از XY کوتاه‌ترین مسیر افقی و عمودی از X به Y است، به گونه‌ای که از حرف دیگری به جز این دو حرف عبور نکنیم. مانند مثال حل‌شده‌ی روبه‌رو حرف‌های A تا O را داخل دایره‌های شکل زیر به گونه‌ای قرار دهید که تمام نابرابری‌های خواسته‌شده برقرار باشند.

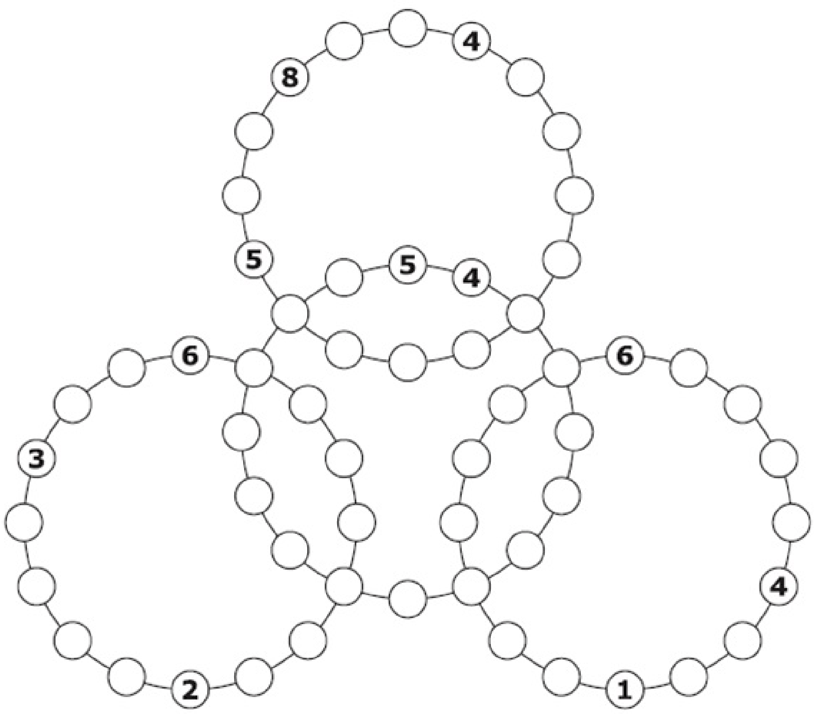


$AB < BC < AC < DE < DF < BF$

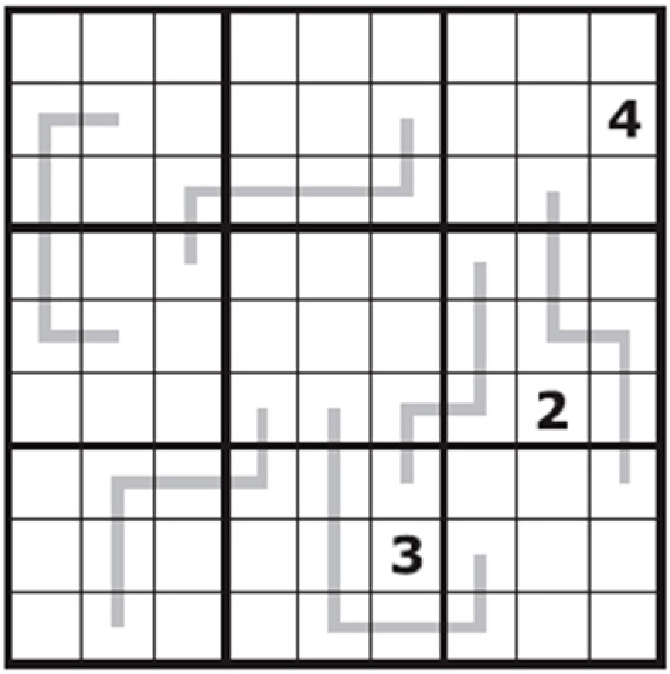


$AB < CD < EF < CG < HI < EJ < BK < FJ < LM < JM < HN < DL < MN$

مسأله ۳. دایره‌های خالی را با ارقام ۱ تا ۸ طوری پر کنید که روی محیط هر دایره، هر یک از ارقام ۱ تا ۸ دقیقاً دوبار تکرار شده باشند و فاصله‌ی هر دو رقم یک‌سان، برابر همان رقم‌ها باشد. به عنوان مثال بین دو رقم ۳ دقیقاً ۳ رقم دیگر واقع شده باشد.

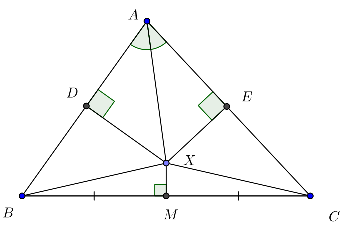


مسأله ۴. سودوکوی زیر را پرکنید. تنها شرط اضافی این سودوکو این است که اعدادی که روی هر یک از پاره‌خط‌های خاکستری قرار دارند، باید به ترتیب (صعودی یا نزولی) مرتب شده باشند.



تناقض!

اثبات زیر نشان می‌دهد که هر مثلثی متساوی‌الساقین است! کجای اثبات غلط است؟



فرض کنید ABC مثلثی دلخواه باشد. مطابق شکل، X را نقطه‌ی برخورد نیم‌ساز زاویه‌ی A و عمودمنصف ضلع BC بگیرید. از X بر دو ضلع مثلث عمود کنید. اکنون چون X روی نیم‌ساز زاویه‌ی A است پس $XD = XE$. پس مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی XEA و XDA دارای وتر و یک ضلع قائمه‌ی برابر هستند پس ضلع دیگر آن‌ها نیز برابر است یعنی $AE = AD$.
هم‌چنین چون X روی عمودمنصف BC نیز هست پس $XB = XC$ و چون $XD = XE$، پس مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی XEC و XDB دارای وتر و یک ضلع قائمه‌ی برابر هستند پس ضلع دیگر آن‌ها نیز برابر است. یعنی $DB = EC$. پس

$$AB = AD + DB = AE + EC = AC$$


امیرحسین پویا
دانشجوی کارشناسی
مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف


مجتبی زارع
دانشجوی کارشناسی
مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

مسائل این شماره

سوال ۱. یک کپه شامل ۲۰۱۵ سنگ موجود است. A و B با این کپه یک بازی می‌کنند. بازی را A شروع می‌کند و در هر مرحله، به اندازه‌ی یکی از مقسوم‌علیه‌های تعداد سنگ های کپه، از آن سنگ بر می‌دارد. بازنده کسی است که آخرین سنگ را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

سوال ۲. فرض کنید $n \equiv 2 \pmod 3$ و $a, n > 2$. ثابت کنید $a^{n^2} + a^n + 1$ اول نیست.

سوال ۳. آیا مجموعه‌ی حداقل سه عضوی و متناهی S موجود است که برای هر $i, j \in S$ که $i \neq j$، $\frac{i+j}{(i,j)}$ عضوی از S باشد؟

سوال ۴. فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ اعداد حقیقی و مثبت باشند به طوری که $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 200$ و $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 2500$. ثابت کنید $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 50$.

سوال ۵. n عددی طبیعی است. ثابت کنید جدولی $n \times n$ با درایه های طبیعی وجود دارد که جمع اعضای هر سطر و ستون آن مربع کامل باشد.

سوال ۶. n خط در صفحه داده شده است که هیچ دو تایی موازی و هیچ سه تایی همرس نیستند. ثابت کنید میتوان درون نواحی تشکیل شده بین این خطوط را اعداد حقیقی نوشت به طوری که برای هر کدام از خطوط، جمع اعداد داخل نواحی مجاور آن از یک طرف با جمع اعداد داخل نواحی مجاور آن از طرف دیگر برابر باشد.

سوال ۷. نقطه P و مثلث ABC مفروض هستند. دایره‌ی محیطی مثلث PAB ضلع BC را در Q و دایره‌ی محیطی مثلث PAC ضلع BC را در R قطع می‌کند. T محل برخورد خط گذرنده از Q و موازی AC با خط گذرنده از R و موازی AB است. ثابت کنید P، A و T هم‌خط هستند.

سوال ۸. نقطه P درون مثلث ABC داده شده است. پای عمودهای وارد از P بر AB، BC و CA به ترتیب P_c، P_a و P_b هستند و قرینه خطوط AP، BP و CP نسبت به نیمسازهای A، B و C را l_a، l_b و l_c می‌نامیم. ثابت کنید خطوط رسم شده از P_a، P_b و P_c و موازی l_a، l_b و l_c همرسند.

سوال ۹. همه توابع $f : [0,1] \to [0,1]$ را بیابید که $\forall x \in [0,1] : f(2x - f(x)) = x$ و $2x - f(x)$ همواره عضو دامنه‌ی تابع شود.

سوال ۱۰. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. می‌دانیم که $AB = CD$ و $AC = BD$. فرض کنید M و N وسط اضلاع AD و BC باشند؛ ثابت کنید MN بر AD عمود است.

سوال ۱۱. تعداد زیادی کارت داریم که روی هر کدام عددی از بین اعداد ۱ تا n نوشته شده است. می‌دانیم k طبیعی وجود دارد که جمع اعداد روی همه کارت های کپه برابر $k \cdot n!$ شود. ثابت کنید میتوان کارتها را به k دسته تقسیم کرد که جمع اعضای هر دسته برابر $n!$ شود.

سوال ۱۲. مماس مشترک خارجی دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به ترتیب در A و B بر این دو دایره مماس است و M وسط AB است. نقاط C و D روی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ قرار دارند. E و F به ترتیب محل برخورد MC و MD با $\omega_۱$ و $\omega_۲$ هستند. فرض کنید AF و BE در نقطه‌ای برخورد کنند که از A و B هم فاصله باشد. ثابت کنید A، E و D هم‌خط‌اند اگر و تنها اگر B، F و C هم‌خط باشند.

سوال ۱۳. $x_۱, x_۲, \dots, x_n > ۰$ اعدادی حقیقی هستند به طوری که $x_۱x_۲\cdots x_n = ۱$. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \geq \sum_{i=۱}^{n} \frac{۲}{۱+x_i}$$

سوال ۱۴. جدولی ۹ × ۹ داریم که روی هر خانه‌ی آن ۱+ یا ۱− نوشته شده است. در هر مرحله، برای هر کدام از ۸۱ خانه از این جدول، ضرب اعداد درون تمام خانه‌های مجاور ضلعی آن را در نظر می‌گیریم (یک خانه با خودش مجاور نیست) و سپس این ۸۱ عدد را در خانه های مربوطه یادداشت می‌کنیم. آیا از هر جدول دلخواهی که شروع کنیم، در نهایت به جدولی می‌رسیم که همه خانه‌های آن ۱+ هستند؟

سوال ۱۵. P یک پنج‌ضلعی محدب با رئوس شبکه‌ای است. قطرهای آن را رسم می‌کنیم و محل برخوردهای قطرها را در نظر می‌گیریم تا به پنج‌ضلعی Q برسیم. ثابت کنید نقطه‌ای شبکه‌ای رو یا درون Q واقع شده است.

سوال ۱۶. فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_n, b_۱, b_۲, \dots, b_n$ اعدادی حقیقی و متمایز باشند به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$ مقدار $\prod_{j=۱}^{n}(a_i + b_j)$ مقداری ثابت و مستقل از i باشد. ثابت کنید برای هر $۱ \leq j \leq n$، $\prod_{i=۱}^{n}(a_i + b_j)$ مقداری ثابت و مستقل از j است.

سوال ۱۷. فرض کنید $\alpha \geq ۲$ عددی گنگ باشد به طوری که برای هر n طبیعی α^n هم گنگ است. برای هر i صحیح نامنفی ۶ سکه به ارزش α^i ضرب کرده‌ایم. آیا ممکن است که تمامی مقادیر طبیعی را بتوان با این سکه ها پرداخت؟ توجه کنید که باقی پول برگردانده نمی‌شود.

سوال ۱۸. ثابت کنید معادله‌ی $x^۴ + y^۴ + ۴z^۴ = ۱$ در مجموعه‌ی اعداد گویا بی‌نهایت جواب دارد.

سوال ۱۹. m, n اعدادی طبیعی هستند؛ ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{n} \frac{(-۱)^i}{m+i+۱}\binom{n}{i} = \sum_{i=۰}^{m} \frac{(-۱)^i}{n+i+۱}\binom{m}{i}$$

سوال ۲۰. آیا تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ وجود دارد که به ازای یک a حقیقی که $۰ < a < ۱$، داشته باشیم

$$f\left(f(x) + \frac{۱}{f(x)}\right) = a + x$$

سوال ۲۱. همه چندجمله‌ای‌های $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم

$$p(x^{۲}+۱)=p(x)^{۲}+۳$$

سوال ۲۲. فرض کنید $s \geq ۲$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جوابی دارد که در آن x_iها متمایز باشند.

$$\sum_{i=۱}^{s} \frac{۱}{x_i^{۲}} = \frac{۱}{x_۰}^{۲}$$

سوال ۲۳. همه‌ی nهای طبیعی را بیابید که برای هر k طبیعی، عدد طبیعی n یافت شود که $n | a^{۳}+a-k$.

بخشی از یک اثبات قضیه‌ی نقطه‌ثابت براور

$f: T \xrightarrow{\text{پیوسته}} T$ فرض کنیم نقطه ثابت نداشته باشد. $\Leftarrow$ $r(x)=\|f(x)-x\|$

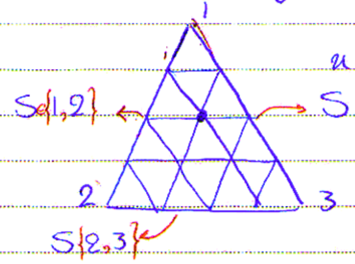
$r: T \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$

ادعا: r روی T دارای مینیمم است. $0<r(x_n)<\frac{1}{n}$ $\quad x_n \to x \Rightarrow r(x)=0$ ✗

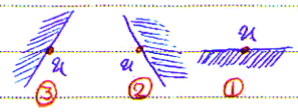
$f: T \to T,\ f(x)\neq x \Rightarrow$ وجود دارد $c>0$ که $\|x-f(x)\|>c$

فرض کنید $\varepsilon=\frac{c}{100}$

$\Rightarrow \exists\, \delta<\frac{\varepsilon}{2}: \ d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$



$x \longrightarrow f(x)$



$f(x)$ در حداقل یکی از صفحات می‌افتد. به هر راس عدد نیم‌صفحه‌ای که داخل آن است را نسبت می‌دهیم. رئوس بزرگ مثلث فقط همان شماره‌ها را دارند. رئوس روی ضلع 2-3 نمی‌توانند شماره ۱ داشته باشند...

امیرحسین پویا
دانشجوی کارشناسی
مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

مجتبی زارع
دانشجوی کارشناسی
مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

پاسخ مسائل این شماره

سوال ۱. یک کپه شامل ۲۰۱۵ سنگ موجود است. A و B با این کپه یک بازی می‌کنند. بازی را A شروع می‌کند و در هر مرحله، به اندازه‌ی یکی از مقسوم‌علیه‌های تعداد سنگ های کپه، از آن سنگ بر می‌دارد. بازنده کسی است که آخرین سنگ را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. دقت کنید که A در مرحله اول تنها تعداد فردی سنگ می‌تواند بردارد، زیرا ۲۰۱۵ فرد است. پس در آغاز حرکت B، او زوج سنگ دارد. حال دقت کنید که اگر B در هر مرحله دقیقا یک سنگ بردارد، تعداد سنگ‌ها در آغاز حرکت A در همواره فرد است، و دوباره تعداد سنگهای B زوج می شود و او می‌تواند دوباره همین کار را تکرار کند. پس چون صفر زوج است، هیچ‌گاه B نمی‌بازد چون در پایان مراحل او، همواره فرد سنگ باقی می‌ماند. پس B استراتژی برد دارد. ■

سوال ۲. فرض کنید $n \equiv 2 \pmod{3}$ و $a, n > 2$. ثابت کنید $a^{n^2} + a^n + 1$ اول نیست.

راه‌حل. دقت کنید که $n^2 = 3k+1$ پس $a^{n^2} \equiv a^{3k+1} \equiv 1^k \times a \equiv 1 \pmod{a^3 - 1}$ و $n = 3t+2$ پس $a^n \equiv a^{3t+2} \equiv 1^t \times a^2 \equiv a^2 \pmod{a^3 - 1}$ پس $a^{n^2} + a^n + 1 \equiv a + a^2 + 1 \pmod{a^3 - 1}$ پس از آن‌جا که $a^2+a+1 | a^3-1$ داریم $a^2+a+1 | a^{n^2}+a^n+1$. اما چون $a, n > 2$ پس $a^2+a+1 > 1$ و $a^{n^2}+a^n+1 > a^2+a+1$، پس $a^{n^2} + a^n + 1$ اول نیست. ■

سوال ۳. آیا مجموعه‌ی حداقل سه عضوی و متناهی S موجود است که برای هر $i, j \in S$ که $i \neq j$، $\frac{i+j}{(i,j)}$ عضوی از S باشد؟

راه‌حل. فرض کنید دو عضو این مجموعه a و b باشند $(a < b)$. مساله را دو حالت می‌کنیم.

(آ) اگر $(a, b) = 1$ آنگاه دقت کنید که $a + b \in S$. اما $(a, b) = (b, a + b)$ پس $b + (a + b) \in S \Rightarrow a + 2b \in S$. بدیهی است که به همین روش با استقرا می‌توان ثابت کرد بی‌نهایت عدد به فرم $ma + nb$ در S هستند، که با متناهی بودن مجموعه در تضاد است.

(ب) داریم $(a, b) \geq 2$. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید این دو عدد کوچک‌ترین اعضای مجموعه هستند. $\frac{a+b}{(a,b)} \leq \frac{a+b}{2} < b$ اما تنها عضو مجموعه که از b کوچک‌تر است، همان a است. پس $a(a, b) = a+b$. پس $a|b$ و $b = ak$. پس $(a, b) = a$ یعنی $b = a^2 - a$. حال سومین عضو کوچک مجموعه را c بگیرید. با استدلالی مشابه، یکی از دو حالت $a(a, c) = a + c$ و $a + c = b(a, c)$ رخ می‌دهد. اگر حالت اول پیش بیاید، مشابه حالت قبل $c = a^2 - a$ یعنی $c = b$ که تناقض است. پس $a+c = (a^2-a)(a, c) \Rightarrow a|c \Rightarrow (a, c) = a \Rightarrow c = a^3-a^2-a$.

اما $\frac{b+c}{(b,c)} \in S$ یعنی $b+c=(b,c)a$ یا $b+c=(b,c)b$. دقت کنید $(b,c)=a$، پس در حالت اول $b=۲ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow a^۲=a^۳-a^۲-a+a^۲-a=a^۳-۲a$ که تناقض است. در حالت دوم، $a=۲ \Rightarrow a^۲-a=۲-a^۲ \Rightarrow a^۳-۲a=a(a^۲-a)$ که باز هم تناقض است. پس در همه حالات به تناقض رسیدیم و مجموعه مورد نظر مساله یافت نمی‌شود.

■

سوال ۴. فرض کنید $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_n$ اعداد حقیقی و مثبت باشند به طوری که $a_۱+a_۲+\cdots+a_n \leq ۲۰۰$ و $a_۱^۲+\cdots+a_n^۲ \geq ۲۵۰۰$. ثابت کنید $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴ \geq ۵۰$.

راه‌حل. فرض خلف کنید که حکم مساله درست نباشد. فرض کنید $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴=B$ که $B<۵۰$ و فرض کنید $a_۱+a_۲+\cdots+a_n=A$ که $A \leq ۲۰۰$. پس داریم

$$۲۵۰۰ \leq \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \leq a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲+a_۴^۲+a_۴(A-B) \leq a_۱B+a_۴(A-B)$$

$$\Rightarrow ۲۵۰۰ \leq B(a_۱-a_۴)+a_۴A < ۲۰۰a_۴+۵۰(a_۱-a_۴)=۱۵۰a_۴+۵۰a_۱$$

$$\Rightarrow ۵۰ \leq ۳a_۴+a_۱ \leq a_۴+a_۳+a_۲+a_۱ < ۵۰$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم مساله درست است. ■

سوال ۵. n عددی طبیعی است. ثابت کنید جدولی $n \times n$ با درایه های طبیعی وجود دارد که جمع اعضای هر سطر و ستون آن مربع کامل باشد.

راه‌حل. در همه خانه های یک جدول $(n-۱)\times(n-۱)$، عدد ۱ را قرار دهید. سپس از پایین و از چپ یک سطر و یک ستون به آن اضافه کنید. حال یک مربع کامل زوج بزرگتر از $n-۱$ مثل $a^۲$ را در نظر بگیرید و در همه خانه‌های خالی جدول به غیر از خانه پایین چپ، مقدار $a^۲-(n-۱)$ را قرار دهید. حالا جمع اعضای همه‌ی سطرها و ستون‌ها غیر از پایین چپ مربع کامل است (برابر است با $a^۲$). پس کافیست درون این خانه عدد x را طوری بنویسیم که $(a^۲-(n-۱))(n-۱)+x$ مربع کامل شود، که این نیز بدیهی است. ■

سوال ۶. n خط در صفحه داده شده است که هیچ دو تایی موازی و هیچ سه تایی همرس نیستند. ثابت کنید میتوان درون نواحی تشکیل شده بین این خطوط را اعداد حقیقی نوشت به طوری که برای هر کدام از خطوط، جمع اعداد داخل نواحی مجاور آن از یک طرف با جمع اعداد داخل نواحی مجاور آن از طرف دیگر برابر باشد.

راه‌حل. استقرا می زنیم. فرض کنید با n خط این کار ممکن باشد. مجموعه ای از $n+۱$ خط را در نظر بگیرید. یک خط را در نظر نمی‌گیریم و طبق فرض استقرا برای n خط باقی‌مانده، نواحی صفحه را عددگذاری می‌کنیم. حال خط $n+۱$-ام را در نظر بگیرید و اعداد همه نواحی یک طرف آن را با c که عددیست که بعداً مشخص می‌کنیم جمع کنید. ثابت کنید می‌توان c را طوری تعیین کرد که حکم مساله برقرار شود. ■

سوال ۷. نقطه P و مثلث ABC مفروض هستند. دایره‌ی محیطی مثلث PAB ضلع BC را در Q و دایره‌ی محیطی مثلث PAC ضلع BC را در R قطع می‌کند. T محل برخورد خط گذرنده از Q و موازی AC با خط گذرنده از R و موازی AB است. ثابت کنید P، A و T هم‌خط هستند.

راه‌حل. فرض کنید دایره گذرنده از P، A و C، ω_1 و دایره گذرنده از P، A و B، ω_2 باشد. کافیست بگوییم T روی محور اصلی دو دایره است. فرض کنید RT و QT و ω_1 در X و ω_2 در Y برخورد کنند. کافیست بگوییم $TX \cdot TR = TQ \cdot TY$ که معادل محاطی بودن $XRQY$ است. حال دقت کنید

$$\angle YAC = ۱۸۰ - \angle AYQ = \angle ABC = \angle XRC = ۱۸۰ - \angle XAC$$

پس X، A و Y هم‌خطاند.

$$\angle YXR = \angle AXR = \angle ACQ = ۱۸۰ - \angle YQR$$

پس $YXRQ$ محاطیست، که معادل حکم مساله است. ■

سوال ۸. نقطه P درون مثلث ABC داده شده است. پای عمودهای وارد از P بر AB، BC و CA به ترتیب P_c، P_a و P_b هستند و قرینه خطوط AP، BP و CP نسبت به نیمسازهای A، B و C را l_a، l_b و l_c می‌نامیم. ثابت کنید خطوط رسم شده از P_a، P_b و P_c و موازی l_a، l_b و l_c همرسند.

راه‌حل. دقت کنید که $\angle AP_bP = ۹۰$ و $\angle AP_cP = ۹۰$. پس AP قطر دایره محیطی AP_bPP_c است و از مرکز دایره می‌گذرد، پس هنگامی که نسبت به نیمساز قرینه شود بر ضلع P_bP_c عمود می‌شود. پس خط موازی l_a که از P_a می‌گذرد ارتفاع مثلث $P_bP_cP_a$ است. به طریق مشابه سه خط دیگر نیز ارتفاع هستند، پس همرسند و حکم ثابت شد. ■

سوال ۹. همه توابع $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را بیابید که $\forall x \in [۰, ۱] : f(۲x - f(x)) = x$ و $۲x - f(x)$ همواره عضو دامنه‌ی تابع شود.

راه‌حل. فرض کنید $nx - (n - ۱)f(x) = a_{n-۱}$. با استقرا ثابت می‌کنیم $f(a_n) = a_{n-۱}$ و $a_n \in [۰, ۱]$. پایه استقرا $n = ۱$ درست است. فرض کنید حکم برای n درست باشد برای $n + ۱$ ثابت می‌کنیم.

$$a_n \in [۰, ۱] \Rightarrow ۲a_n - f(a_n) \in [۰, ۱] \Rightarrow ۲((n + ۱)x - nf(x)) - (nx - (n - ۱)f(x)) = a_{n+۱} \in [۰, ۱]$$

و البته

$$۲a_n - f(a_n) = a_{n+۱} \Rightarrow f(a_{n+۱}) = a_n$$

پس حکم استقرا ثابت شد. در نتیجه خواهیم داشت

$$۰ \leq nx - (n - ۱)f(x) \leq ۱ \Rightarrow \frac{nx - ۱}{n - ۱} \leq f(x) \leq \frac{nx}{n - ۱}$$

از نابرابری بالا حد می‌گیریم ($n \to \infty$)

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x$$

■

سوال ۱۰. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. می‌دانیم که $AB = CD$ و $AC = BD$. فرض کنید M و N وسط اضلاع AD و BC باشند؛ ثابت کنید MN بر AD عمود است.

راه‌حل. فرض کنید B مرکز مختصات باشد. پس

$$|AB| = |CD| \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD} \Rightarrow \vec{a}^۲ = (\vec{c}-\vec{d})^۲$$
$$|AC| = |BD| \Rightarrow \vec{d}^۲ = (\vec{a}-\vec{c})^۲ \Rightarrow (\vec{a}-\vec{d})(\vec{a}+\vec{d}) = (\vec{d}-\vec{a})(\vec{d}+\vec{a}-۲\vec{c})$$
$$\Rightarrow (\vec{a}-\vec{d})(۲\vec{c}-۲\vec{a}-۲\vec{d}) = ۰ \Rightarrow (\vec{d}-\vec{a})(\frac{۱}{۲}\vec{c}-\frac{۱}{۲}(\vec{d}+\vec{a})) = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NM} = ۰$$

پس دو بردار $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{MN}$ بر هم عمودند که همان حکم مساله است. ■

سوال ۱۱. تعداد زیادی کارت داریم که روی هر کدام عددی از بین اعداد ۱ تا n نوشته شده است. می‌دانیم k طبیعی وجود دارد که جمع اعداد روی همه کارت های کپه برابر $k\cdot n!$ شود. ثابت کنید میتوان کارتها را به k دسته تقسیم کرد که جمع اعضای هر دسته برابر $n!$ شود.

راه‌حل.

لم ۱. اگر $a_۱,\dots,a_n \in \{۱,\dots,n\}$ در این صورت زیر مجموعه‌ای از این اعداد وجود دارد که جمعش بر n بخش‌پذیر است و حداکثر $n(n-۱)$ است.

اثبات لم بر عهده خواننده. حال در طی چند مرحله کارت‌های کپه را به کپه دیگری منتقل می‌کنیم: در هر مرحله تعدادی از کارت‌های کپه را انتخاب می‌کنیم که جمعشان بر n بخش‌پذیر باشد و حداکثر $n(n-۱)$ باشد. این کارت ها را دسته بندی می‌کنیم واگر جمعشان nt باشد، روی دسته آن‌ها t می‌نویسیم و به کپه دیگر منتقل می‌کنیم. طبق لم این عمل تا جایی ممکن است که حداکثر $n-۱$ کارت باقی بماند، پس جمعشان حداکثر $n(n-۱)$ است. اما دقت کنید در ابتدای کار جمع اعداد روی کارتها بر n بخش پذیر بود و هر مرحله دسته‌هایی جدا می‌کردیم که جمع اعداد رویشان بر n بخش‌پذیر باشد، پس جمع اعداد روی کارت‌های باقی‌مانده نیز بر n بخش‌پذیر است. پس این‌ها را هم مانند بقیه منتقل می‌کنیم. حال دقت کنید که کپه جدیدی داریم که شامل کارت‌هایی با اعداد $۱,\dots,n-۱$ است و جمع اعداد روی کارت‌ها $k(n-۱)!$ است. حال از استقرا استفاده کنید. ■

سوال ۱۲. مماس مشترک خارجی دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به ترتیب در A و B بر این دو دایره مماس است و M وسط AB است. نقاط C و D روی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ قرار دارند. E و F به ترتیب محل برخورد MC و MD با $\omega_۱$ و $\omega_۲$ هستند. فرض کنید AF و BE در نقطه‌ای برخورد کنند که از A و B هم فاصله باشد. ثابت کنید A، E و D هم‌خط‌اند اگر و تنها اگر B، F و C هم‌خط باشند.

راه‌حل. توجه کنید که $ME\cdot MC = MA^۲ = MB^۲ = MF\cdot MD$ پس $\triangle BME \sim \triangle CMB$ و $\triangle AMF \sim \triangle DMA$ و چهارضلعی $CDFE$ محاطی است. پس داریم

$$\angle EBM = \angle FAB \Rightarrow \angle ADM = \angle FAB = \angle EBM = \angle BCM$$

همچنین داریم $\angle MAF = \angle MBE$. حال دقت کنید که A، D و E همخط‌اند اگر و فقط اگر $\angle MCE = \angle ACM$،

اما داریم

$$\angle MDE = \angle ADM \Leftrightarrow \angle MCF = \angle ADM = \angle MAF \Leftrightarrow \angle MCF = \angle MBE \Leftrightarrow \angle MCF = \angle MCB$$

که بدیهتاً معادل هم‌خطی C، F و B است. پس حکم مساله ثابت شد. ■

سوال ۱۳. $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ اعدادی حقیقی هستند به طوری که $x_1x_2\cdots x_n = 1$. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1+x_i}$$

راه‌حل. طبق نابرابری حسابی هندسی

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + n}{2} \geq n$$

پس با جمع طرفین با $\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1+x_i}$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+x_i}{2} + \frac{2x_i}{1+x_i}\right) \geq 2n\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{2}\times\frac{2x_i}{1+x_i}} = 2n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = 2n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{2x_i}{1+x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+x_i}{2} + \frac{2x_i}{1+x_i}\right) \geq 2n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n}\left(2 - \frac{2x_i}{1+x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1+x_i}$$

■

سوال ۱۴. جدولی 9×9 داریم که روی هر خانه‌ی آن $+1$ یا -1 نوشته شده است. در هر مرحله، برای هر کدام از ۸۱ خانه از این جدول، ضرب اعداد درون تمام خانه‌های مجاور ضلعی آن را در نظر می‌گیریم (یک خانه با خودش مجاور نیست) و سپس این ۸۱ عدد را در خانه های مربوطه یادداشت می‌کنیم. آیا از هر جدول دلخواهی که شروع کنیم، در نهایت به جدولی می‌رسیم که همه خانه‌های آن $+1$ هستند؟

راه‌حل. مربعی را در نظر بگیرید که خانه وسط آن -1 است و باقی خانه‌های آن ۱ است. ثابت کنید بعد از ۹ مرحله انجام عملیات مورد نظر مساله، به همان نتیجه‌ای می‌رسیم که بعد از ۳ مرحله می‌رسیم، پس هیچگاه از این جدول به جدولی که تنها شامل خانه‌های ۱ است نمی‌رسیم. ■

سوال ۱۵. P یک پنج‌ضلعی محدب با رئوس شبکه‌ای است. قطرهای آن را رسم می‌کنیم و محل برخوردهای قطرها را در نظر می‌گیریم تا به پنج‌ضلعی Q برسیم. ثابت کنید نقطه‌ای شبکه‌ای رو یا درون Q واقع شده است.

راه‌حل. از فرض خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید پنج‌ضلعی‌ای وجود داشته باشد که در شرایط مساله صدق نکند. ابتدا دقت کنید که دو برابر مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای، عددی طبیعی است. با توجه به فرمول پیک، اثبات این مطلب بدیهی است. پس پنج ضلعی‌ای را در نظر بگیرید که مساحتش از همه پنج ضلعی‌های دیگر با

خاصیت فوق نابیشتر باشد، طبق اصل خوش‌ترتیبی این پنج‌ضلعی وجود دارد. فرض کنید رئوس این پنج‌ضلعی $ABCDE$ باشند. همچنین فرض کنید $A'B'C'D'E'$ پنج‌ضلعی حاصل از برخورد قطرها باشد به طوری که A روبروی A' است، B روبروی B' است و ... . دقت کنید که اگر نقطه‌ای شبکه‌ای مانند $X \neq A$ درون یا روی مثلث $AD'E'$ باشد در این‌صورت پنج‌ضلعی $XBCDE$ کاملا درون $ABCDE$ است و مساحتش از آن کم‌تر است؛ و پنج‌ضلعی حاصل از برخورد قطرهای آن نیز کاملا درون پنج‌ضلعی متناظر برای $ABCDE$ است پس شامل هیچ نقطه‌ای از نقاط شبکه‌ای نیست، که با فرض مساحت کمینه در تناقض است. به طریق مشابه رو یا درون هیچ کدام از مثلث‌های $BD'E'$، $CE'A'$، $DA'B'$ و $EC'B'$ نقطه‌ای شبکه‌ای غیر از رئوس چندضلعی یافت نمی‌شود. حال دقت کنید که وسط یکی از قطرها یا ضلع‌های چندضلعی، نقطه‌ای شبکه‌ای است. با استفاده از این موضوع و فرض کمینه بودن مساحت به تناقض برسید. ■

سوال ۱۶. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ اعدادی حقیقی و متمایز باشند به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ مقدار $\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j)$ مقداری ثابت و مستقل از i باشد. ثابت کنید برای هر $1 \leq j \leq n$، $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_j)$ مقداری ثابت و مستقل از j است.

راه‌حل. فرض کنید این مقدار ثابت c باشد پس $a_1, a_2, \dots, a_n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $p(x) = \prod_{j=1}^{n}(x + b_j) - c$ هستند اما این اعداد متمایزند و این چندجمله‌ای از درجه n است پس این اعداد تمام ریشه‌های این معادله هستند و با توجه به این‌که ضریب پیشرو این چندجمله‌ای هم ۱ است، خواهیم داشت

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) \Rightarrow \prod_{j=1}^{n}(x + b_j) - c = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$$

با جای‌گذاری $x = -b_j$ در رابطه‌ی بالا

$$\Rightarrow -c = \prod_{i=1}^{n}(-b_j - a_i) \Rightarrow -c(-1)^n = \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_j)$$

اما $-c(-1)^n$ عبارتی ثابت و مستقل از j است، پس حکم مساله ثابت شد. ■

سوال ۱۷. فرض کنید $\alpha \geq 2$ عددی گنگ باشد به طوری که برای هر n طبیعی α^n هم گنگ است. برای هر i صحیح نامنفی ۶ سکه به ارزش α^i ضرب کرده‌ایم. آیا ممکن است که تمامی مقادیر طبیعی را بتوان با این سکه ها پرداخت؟ توجه کنید که باقی پول برگردانده نمی‌شود.

راه‌حل. دقت کنید که $\alpha^3 > 7$ پس برای نمایش ۷، تنها سکه‌های به ارزش $1, \alpha, \alpha^2$ استفاده می‌شوند. بدیهی است که تنها با سکه‌های به ارزش یک این امر محال است. اما اگر تنها از یکی از دو نوع سکه α و α^2 استفاده شود، مثلا β، میدانیم β گنگ است. از طرفی $a + b\beta = 7$ که a, b اعدادی صحیح بین ۰ تا ۶ هستند. پس $\beta = \frac{7-a}{b}$ که با گنگ بودن β در تضاد است. پس هر دو سکه استفاده می‌شود، اما دقت کنید که $\alpha > 2$ پس $\alpha^2 + \alpha > 6$ پس در نمایش ۷، تنها از این دو سکه استفاده شده یعنی $\alpha^2 + \alpha = 7$. پس $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$. اما $\alpha > 2$ پس $\alpha = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم این α شرایط ما را برآورده می‌کند. ابتدا می‌گوییم α^n همواره گنگ است. با استقرا می‌گوییم $(-2\alpha)^n = (A - B\sqrt{29})$ که A, B اعدادی طبیعی و مثبت‌اند. پایه استقرا درست است و برای گام استقرا دقت کنید که $(-2\alpha)^{n+1} = (A - B\sqrt{29})(1 - \sqrt{29}) = A + 29B - \sqrt{29}(A + B)$ پس حکم درست است. حال ثابت می‌کنیم می‌توان عدد طبیعی دلخواه n را با حداکثر ۶ تا از هر سکه پرداخت. ابتدا فرض کنید محدودیت تعداد

سکه نداریم، بدیهی است که میتوان با n سکه این مقدار را پرداخت. حال می‌توان به ازای هر i نامنفی که حداقل ۷ سکه به ارزش α^i داریم، می‌توانیم ۷ سکه به ارزش α^i برداریم و در عوض یک سکه به ارزش α^{i+1} و یک سکه به ارزش α^{i+2} به جای آن قرار دهیم. دقت کنید با این عملیات تعداد سکه‌هایمان ۵ تا کم می‌شود پس چون تعداد سکه‌ها باید مثبت باشد متناهی بار می‌توان این کار را انجام داد و هرگاه از یک سکه بیشتر از ۷ تا داشته باشیم می‌توان این کار را انجام داد، پس بعد از چند مرحله، دیگر از هیچ سکه‌ای ۷ تا نداریم، پس راهی برای پرداخت n واحد با استفاده از این سکه ها یافتیم. پس $\alpha = \frac{\sqrt{29}-1}{2}$ در شرایط مساله صدق می کند. ■

سوال ۱۸. ثابت کنید معادله‌ی $x^4 + y^4 + 4z^4 = 1$ در مجموعه‌ی اعداد گویا بی‌نهایت جواب دارد.

راه‌حل. سعی کنید چهار چندجمله‌ای با ضرایب صحیح مانند P, Q, R, S بیابید که در $P^4+Q^4+4R^4 = S^4$ صدق کنند. در این صورت بدیهی است که برای هر عدد گویای x، $\frac{P}{S}(x), \frac{Q}{S}(x), \frac{R}{S}(x)$ در مساله صدق می‌کنند. دقت کنید که چند جمله‌ای‌های $P(x) = 2x^4 - 1$، $Q(x) = 2x$، $R(x) = 2x^3$ و $T(x) = 2x^4 + 1$ در این معادله صدق می‌کنند، و $\frac{P}{S}(x)$ برای xهای طبیعی بی‌نهایت مقدار متفاوت اخذ می‌کند، پس بی‌نهایت جواب متفاوت یافتیم. ■

سوال ۱۹. m, n اعدادی طبیعی هستند؛ ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{m+i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{n+i+1}\binom{m}{i}$$

راه‌حل. دقت کنید که $\int_0^1 t^{n+i}dt = \frac{1}{n+i+1}$. پس داریم

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i\binom{m}{i}}{i+n+1} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\int_0^1 t^{n+i}dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} t^n(-t)^i\binom{m}{i}dt = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt$$

حال به جای t قرار دهید $1-s$. پس داریم

$$\int_1^0 (1-s)^n s^m d(1-s) = -\int_0^1 (1-s)^n s^m d(1-s) = \int_0^1 (1-s)^n s^m ds$$

حال دقت کنید با طی کردن روندی مشابه فوق داریم

$$\int_0^1 (1-s)^n s^m ds = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i\binom{n}{i}}{i+m+1}$$

پس این دو عبارت برابر شدند و حکم ثابت شد. ■

سوال ۲۰. آیا تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ وجود دارد که به ازای یک a حقیقی که $0 < a < 1$، داشته باشیم

$$f\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = a + x$$

راه‌حل. با جای‌گذاری $x = f(y) + \frac{1}{f(y)}$ در صورت مساله داریم

$$f\left(a + y + \frac{1}{a+y}\right) = f(y) + \frac{1}{f(y)} + a$$

حال فرض کنید $x < ۱$ باشد. می‌دانیم که حداقل یکی از مقادیر $f(x)$ و $\frac{۱}{f(x)}$ از یک بیشتر است، پس از a هم بیشتر است. فرض کنید این مقدار همان $f(x)$ باشد (حالت دیگر مشابه است). فرض کنید $y = f(x) - a$. پس از جای‌گذاری y در رابطه فوق داریم

$$۲ > a + x = f\left(f(x) + \frac{۱}{f(x)}\right) = f(y) + \frac{۱}{f(y)} + a > ۲ + a$$

که تناقض است. ■

سوال ۲۱. همه چندجمله‌ای‌های $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم

$$p(x^۲ + ۱) = p(x)^۲ + ۳$$

راه‌حل. ابتدا با استقرا ثابت کنید اگر $p(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$ آنگاه a_iها اعدادی گویا خواهند بود. حال فرض کنید $x_۰$ ریشه معادله $x = ۵x^۲ + ۱$ باشد. پس $p(x)^۲ - p(x) + ۳ = ۰$. حال دقت کنید که $x = a + b\sqrt{۵}$ که a و b گویا هستند و در نتیجه $p(x) = c + d\sqrt{۵}$ که c و d گویا هستند. حال دقت کنید که ریشه‌های $y^۲ - y + ۳ = ۰$ اعدادی به فرم $m + n\sqrt{۳}$ هستند که m و n گویا و ناصفر هستند. ■

سوال ۲۲. فرض کنید $s \geq ۲$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جوابی دارد که در آن x_iها متمایز باشند.

$$\sum_{i=۱}^{s} \frac{۱}{x_i^۲} = \frac{۱}{x_۰}^۲$$

راه‌حل. حکم را با استقرا روی s ثابت می‌کنیم. برای $s = ۲$ دقت کنید حکم معادل جواب داشتن $x_۰^۲x_۱^۲ + x_۰^۲x_۲^۲ = x_۱^۲x_۲^۲$ است، اما با کمی دقت در تساوی $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$ می‌توانیم متوجه شویم $x_۰ = ۳ \times ۴$، $x_۱ = ۳ \times ۵$ و $x_۲ = ۴ \times ۵$ در این معادله صدق می‌کند و پایه استقرا درست است. حال فرض کنید حکم مساله برای s برقرار باشد. دقت کنید که بدیهتاً $x_۰$ کوچکترین x_i است. پس بنابر تقارن مساله، فرض کنید x_s بزرگترین x_i باشد. ثابت کنید $(۱۲x_۰, ۱۲x_۱, \ldots, ۱۲x_{s-۱}, ۱۵x_s, ۲۰x_s)$ در شرایط مساله صدق می‌کند. ■

سوال ۲۳. همه‌ی nهای طبیعی را بیابید که برای هر k طبیعی، عدد طبیعی n یافت شود که $n|a^۳ + a - k$.

راه‌حل. فرض کنید $p|n$. پس برای هر k طبیعی، a یافت می‌شود که $p|n|a^۳ + a - k$. پس $a^۳ + a$ها به پیمانه‌ی p یک دستگاه کامل مانده‌ها تشکیل می‌دهند. بنابراین اگر $p|a^۳ + a - b^۳ - b = (a - b)(a^۲ + b^۲ + ab + ۱)$ آنگاه $p|a - b$. حال دقت کنید اگر $p \neq ۳$، $۳x^۲$ به پیمانه‌ی p دقیقاً $\frac{p+۱}{۲}$ باقیمانده مختلف می‌سازد، و $-۴ - y^۲$ نیز دقیقاً $\frac{p+۱}{۲}$ باقیمانده مختلف می‌سازد. پس طبق اصل لانه کبوتری، x و y وجود دارند که $۳x^۲ \equiv -۴ - y^۲ \pmod{p}$ پس $p|۳x^۲ + y^۲ + ۴$. حال فرض کنید $p \neq ۲$. بدیهی است که برای $p = ۲$، حکم مساله غلط است. فرض کنید $a = \frac{x+y}{۲}$ و $b = \frac{x-y}{۲}$. پس

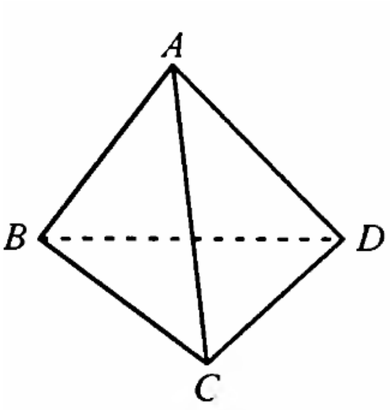
$$p|\frac{۳x^۲ + y^۲ + ۴}{۴} = a^۲ + b^۲ + ab + ۱ \Rightarrow p|a^۳ + a - b^۳ - b \Rightarrow p|a - b \Rightarrow p|y$$

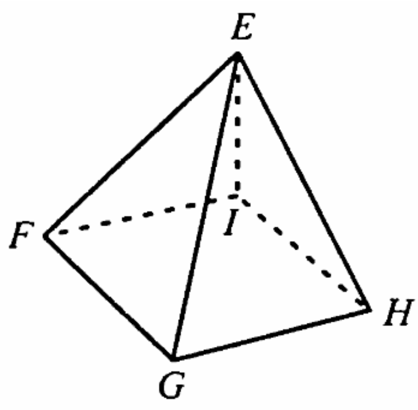
حال دقت کنید $p \neq ۲$ پس از آن‌جا که $(p, x) = ۱$ داریم $p|۳x^۲ + ۴$. حال با مقدارگذاری مناسبی به جواب برسید. ■

مسأله ویژهٔ این شماره، چندوجهی‌ها

در هر شماره از فصل‌نامه، یک مسأله با عنوان مسألهٔ ویژه مطرح می‌شود و از شما خوانندگان دعوت می‌شود راه حل‌های خود را برای این مسأله، با ذکر نام خود به ایمیل pargar@mathysc.ir ارسال کنید. راه حل‌های صحیح در شماره بعد اعلام خواهند شد.

در چندوجهی‌های $ABCD$ و $EFGHI$، وجه $FGHI$ یک مربع به ضلع یک و سایر وجه‌ها مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. اگر این دو چندوجهی را از روی وجوه ABC و EFG به هم بچسبانیم شکل حاصل چندوجهی خواهد بود؟





وبگاه المپیاد ریاضی ایران

وزارت آموزش و پرورش باشگاه دانش پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان