هر عدد مختلط را به صورت $z = x + iy$ نشان داد (x و y اعداد حقیقی اند) $\mathbb{C} : \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} , i^2 = -1 \}$

$$z = x + iy \quad \begin{cases} x = \mathrm{Re} & \text{قسمت حقیقی} \\ y = \mathrm{Im} & \text{قسمت موهومی} \end{cases}$$

مثال $\longrightarrow z = 3 + 2i \quad (i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1)$

یک عدد مختلط زوج مرتبی است از اعداد حقیقی x و y به صورت $z = (x, y)$ مشمول قواعد زیر:

۱- زوج مرتب $(x, 0)$ نشان دهنده اعداد حقیقی است $z = x$

۲- زوج مرتب $(0, 1)$ i را نشان می دهد (واحد عدد مختلط)

۳- اعداد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ زمانی با هم برابرند که $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

$$\begin{matrix} z_1 = 5 + 6i \\ z_2 = 5 + 4i \end{matrix} \longrightarrow z_1 \neq z_2$$

۴- مجموع و حاصل ضرب دو عدد مختلط z_1 و z_2 به صورت زیر است

(1) $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \longrightarrow z_1 + z_2 = z_3 (x_3 , y_3) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

(2) $z_1 \times z_2 = z_3 (x_3 , y_3) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + y_1 x_2)$

مثال: حاصل ضرب دو عدد مختلط زیر را به دست آورید

$$\begin{matrix} z_1 = 2 + 5i \\ z_2 = 4 - 3i \end{matrix} \longrightarrow 8 - 6i + 20i - 15 \underbrace{i^2}_{-1} = 8 + 15 + 14i = 23 + 14i$$

قضیه: از تقسیم عدد مختلط z_1 بر عدد مختلط z_2 عدد مختلطی مانند z_3 به دست می آید.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 z_3 \quad (z_2 \neq 0)$$

مثال: فرض کنید $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 1 - i$ حاصل $\frac{z_1}{z_2}$ را به دست آورید

$$\frac{z_1}{z_2} = z = (x + iy) \rightarrow z_2 (x + iy) = z_1$$

$$(x + iy)(1 - i) = (1 + 2i) \rightarrow x - xi + iy - i^2 y = 1 + 2i$$

$$x + y + i(y - x) = 1 + 2i \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{matrix} \rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$$

مثال: $z_1 = 1-i$ و $z_2 = 1+i$ حاصل $\frac{z_1}{z_2}$ را بدست آورید

$$\frac{z_1}{z_2} = z_2 \cdot (x+iy) \to (1-i) = (x+iy)(1+i) = x+ix+iy-y$$

$$(1-i) = x-y+i(x+y) = \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \to \begin{matrix} x=0 \\ y=-1 \end{matrix} \to z=-i$$

*مزدوج یک عدد مختلط:

مزدوج عدد مختلط $z = x+iy$ را با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{z} = x - iy \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{matrix} z_1 = 1+4i \\ z_2 = 5-2i \end{matrix} \to z_1+z_2 = 6+2i \to \bar{z} = 6-2i$$

(۱) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (۲) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (۳) $z\bar{z} = x^2+y^2$

* $z+\bar{z} = 2Re(z)$ * $z-\bar{z} = 2i\,Im(z)$

*نکته: اگر در مخرج کسر یک عدد مختلط داشتیم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و در مخرج از ویژگی $z.\bar{z} = x^2+y^2$ استفاده می‌کنیم

مثال: $\frac{1+2i}{1-i} = ? \to \frac{1+2i}{1-i} \times \underbrace{\frac{1+i}{1+i}}_{\text{مزدوج مخرج}} = \frac{3i-1}{1^2+1^2}$

مثال: $\frac{1-i}{1+2i} = ? \to \frac{1-i}{1+2i} \times \underbrace{\frac{1-2i}{1-2i}}_{\text{مزدوج مخرج}} = \frac{1-2i-i+2i^2}{1+4} = \frac{-1-3i}{5}$

*قدر مطلق یک عدد مختلط:

قدر مطلق یک عدد مختلط را با $|z|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

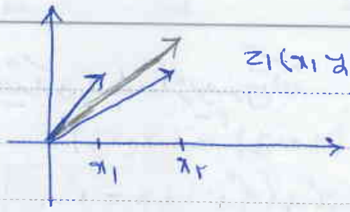
$$z = x+iy \quad (z\bar{z} = x^2+y^2)$$
$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

(۱) $|z^2| = z\bar{z}$ مزدوج عدد مختلط (۲) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (۳) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

مثال: قدر مطلق $z = \frac{i(2+3i)(5-2i)}{(2-i)}$ را بدست آورید

$$|z| = \left|\frac{i(2+3i)(5-2i)}{(2-i)}\right| = \frac{|i||2+3i||5-2i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{0^2+1^2} \times \sqrt{4+9} \times \sqrt{25+4}}{\sqrt{4+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{1885}}{\sqrt{5}}$$

جمع اعداد مختلط



$z_1(x_1, y_1)$ $z_2 = (x_2, y_2)$

$z_3 = z_1 + z_2$

* نکته: برای به دست آوردن θ باید دقت کرد که نقطه مورد نظر در کدام ربع مختصات قرار می‌گیرد و بر اساس آن θ را تعیین کرد

مثال: قدر مطلق آرگومان اعداد زیر را بیابید

الف) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i \rightarrow |z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ ربع اول

ب) $z_2 = -1 - \sqrt{3}\,i \rightarrow |z_2| = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$ ربع سوم

$\theta = \frac{-2\pi}{3}$

مثال: $\left|\frac{i(1+i)(1-2i)}{1-i}\right| = ? \rightarrow \left|\frac{i(1-2i+i+2)}{1-i}\right| = \left|\frac{i(3-i)}{1-i}\right| = \left|\frac{3i+1}{1-i}\right| = \frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

مکان هندسی در صفحه مختلط به جای z ($x+iy$ می‌گذاریم)

دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

مثال: مکان اعداد مختلط را بیابید که در عبارات زیر صدق می‌کند

① $|z+i| = 1 \rightarrow |x+iy+i| = 1 \rightarrow |x + i(y+1)| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 1 \rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$

مکان هندسی تمام نقاطی که روی دایره به مرکز $(0, -1)$ و شعاع 1 قرار دارند

② $|z+i| \leqslant 1$

مکان هندسی نقاطی که درون و روی دایره‌ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع 1 قرار دارند

③ $|z+i| > 1$

مکان هندسی خارج دایره

* $|z - z_0| = R$ معادله یک دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

مثال: $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| < \sqrt{2} \rightarrow \frac{|z+i|}{|z-i|} < \sqrt{2} \rightarrow \frac{|x+iy+i|}{|x+iy-i|} < \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} < \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$x^2 + y^2 + 2y + 1 < 2x^2 + 2y^2 - 4y + 2$

$x^2 + y^2 - 6y + 1 > 0$

مربع کامل $x^2 + y^2 - 6y + 1 + 9 - 9$

$\rightarrow x^2 + (y-3)^2 < 8$ $\begin{cases} \text{شعاع} = \sqrt{8} \\ \text{مرکز} = (0, 3) \end{cases}$

مربع کامل کردن: ضریب x یا y را بر دو تقسیم می‌کنیم و بعد به توان دو رسانده جمع و تفریق می‌کنیم

برای اینکه عدد مختلطی برابر صفر شود هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی اش باید صفر باشد

مثال: همه‌ی اعداد حقیقی x و y را تعیین کنید که در رابطه‌های زیر صدق کنند

الف) $(z)^2=(\bar{z})^2 \to (x+iy)^2=(x-iy)^2$

$$x^2+\cancel{i^2y^2}+2iyx=x^2+\cancel{i^2y^2}-2ixy \to 2iyx=-2iyx$$

$$4iyx=0 \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ب) $\frac{x+iy}{x-iy}=x-iy \to x+iy=(x-iy)^2 \to x+iy=x^2+i^2y^2-2iyx$

$$x^2+i^2y^2-2iyx-x-iy$$

$$x^2-y^2-x-i(2xy+y)=0 \Big\} \begin{cases} ① \; x^2-y^2-x=0 \\ ② \; y(2x+1)=0 \to y=0 \;,\; 2x+1=0 \to x=-\frac12 \end{cases}$$

در رابطه ① جایگذاری

$$y=0 \to x^2-x=0 \to x(x-1)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (0,1)\ \checkmark \\ (0,0)\ \times \end{cases}$$

$$x=-\frac12 \to \frac14+y^2+\frac12 \to y=\pm\frac{\sqrt3}{2} \quad \begin{cases} (-\frac12,-\frac{\sqrt3}{2})\ \checkmark \\ (-\frac12,+\frac{\sqrt3}{2})\ \checkmark \end{cases}$$

نقاطی که مخرج را صفر می‌کند قابل قبول نیست (۰و۰) قابل قبول نیست

اگر z یک عدد مختلط باشد مکان‌های زیر را در صفحه اعداد مختلط تعیین کنید

در مخرج قسمت مختلط داریم $\frac{1}{x-iy}\times\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}$

① $Re(\frac1z+1)>2 \to \frac{1}{x-iy}+1>2 \to \frac{x+iy}{x^2+y^2}+1>2 \to \frac{x+iy+x^2+y^2}{x^2+y^2}>2$

قسمت حقیقی $\frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}$ + قسمت موهومی $\frac{iy}{x^2+y^2}$ $>2 \to \frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2}>2 \to x^2+x+y^2>2x^2+2y^2>0$

$$x^2+y^2-x<0$$

$$x^2+y^2-x+\frac14-\frac14<0$$

$$(x-\frac12)^2+y^2<\frac14$$ داخل دایره

② $Im(\frac1z+1)<2$ $\quad \frac{y}{x^2+y^2}<2 \to y<2x^2+2y^2 \to 2x^2+2y^2-y>0$

$$x^2+y^2-\frac y2>0 \to x^2+y^2-\frac y2+\frac1{16}-\frac1{16}>0$$

$$x^2+(y-\frac14)^2>\frac1{16}$$

$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{فرمول اویلر}}$

نمایش یک عدد مختلط در مختصات قطبی

$z = x + iy$

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

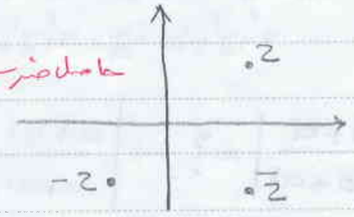
ضرب و تقسیم دو عدد مختلط $z_1 = r_1\cos\theta_1$ و $z_2 = r_2\cos\theta_2$ را در مختصات قطبی بررسی کنید

$$z_1 z_2 = r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1 \cdot r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2$$
$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$
$$= r_1 r_2\,\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$$

قضیه: اگر $z_1 = r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1$ و $z_2 = r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2$ باشد آنگاه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

حاصل ضرب ۲ عدد مختلط قطبی θ های آن‌ها با هم جمع می‌شود



$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$

(مثال) $\dfrac{i^3 + i^2 - 1}{1+i} = \dfrac{-i-2}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{2i-4}{\sqrt{2}} \qquad Re = \dfrac{-4}{\sqrt{2}} \qquad Im = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

مثال) اگر $z_1 = 5 + i$ و $z_2 = 2a+b + bi$ برابر باشند a و b را بیابید

قسمت حقیقی — قسمت حقیقی
قسمت موهومی — قسمت موهومی

$2a + b = 5$

$b = 1 \qquad a = 2$

$(ib = i \to b = 1)$

مکان هندسی بیابید

$|z-1| = |z+i|$

$|x+iy-i| = |x+iy+i|$

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| \qquad z = |z|e^{i\theta}$

مثال)

1/ اگر $z = 2i+3 \to \bar{z} = 3-2i$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{3-2i} \times \underbrace{\frac{3+2i}{3+2i}}_{\sqrt{9+4}} = \frac{3+2i}{13}$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2i+3} \times \frac{2i-3}{2i-3} = \frac{2i-3}{13}$

$z\bar{z} = 13 = x^2+y^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{13}$

مثال)

$\left|\frac{z-2i}{z+3i}\right| = 1 \quad \left|\frac{x+iy-2i}{x+iy+3i}\right| = \frac{|x+i(y-2)|}{|x+i(y+3)|} = 1$

$\to |x+i(y-2)| = |x+i(y+3)| \to \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$

$x^2+y^2+4-4y = x^2+y^2+9+6y \to 10y+5=0 \to 10y=-5 \to y=-1/2$

مثال) اگر a و b اعداد حقیقی باشند حاصل را بیابید

$A = \left|\frac{a+bi}{b+ai}\right| = ? \to \left|\frac{a+bi}{b+ai}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$

مثال) اگر $z_1 = 9+8i$ و $z_2 = 17i+15$

1) $z_1 - \bar{z}_2 = 9+8i-15+17i = 25i-6$

2) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 9-8i+15-17i = -25i+24$

3) $z_1 \times \bar{z}_2 = (9+8i)(15-17i) = 135-153i+120i+136$

$= -33i+271$

$|z-1|+|z-3| = 1 \to |x+iy-1|+|x+iy-3| = 1 \to \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 1$

$\to \sqrt{(x-1)^2+y^2}^{\,2} = 1-\sqrt{(x-3)^2+y^2}^{\,2} \to \cancel{x^2}+\cancel{1}-2x+\cancel{y^2} = \cancel{1}+\cancel{x^2}+9-6x+\cancel{y^2}-2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 9-4x \to 4(x^2+9-6x+y^2) = 81+16x^2-72x$

مثال) اگر $z_1 = 2cis\frac{\pi}{3}$ و $z_2 = 2cis\frac{\pi}{4}$ $\quad z_1 z_2 = 4cis(\frac{\pi}{12})$

نتیجه: اگر $z_1 = r_1 cis\theta_1$ و $z_2 = r_2 cis\theta_2$ و ... $z_n = r_n cis\theta_n$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n cis(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

اگر $\begin{cases} r_1 = r_2 = \cdots = r_n \\ \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n \end{cases} \Longrightarrow z_1 z_2 \ldots z_n = r^n cis(n\theta)$

فرمول دموآور

$$(cis\theta)^n = cis(n\theta)$$

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

تمرین: ثابت کنید

1) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

1) $Arg(z_1) = \theta_1 \quad Arg(z_2) = \theta_2 \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cis(\theta_1 - \theta_2)) \rightarrow Arg(\frac{z_1}{z_2}) = \theta_1 - \theta_2$

2) $z_1 = r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1 = r_1 cis\theta_1$
$z_2 = r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2 = r_2 cis\theta_2$ $\longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

مثال) حاصل عبارات زیر را بدست آورید

1) $(1+i)^2 =$

$z = 1+i \quad : \begin{cases} r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/4 \end{cases}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$

$z^2 = (\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4))^2 = 2(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2) = 2(0 + i1) = 2i$

2) $(1+i)^{99} = z^{99} = (\sqrt{2})^{99}(\cos 99\times\pi/4 + i\sin 99\times\pi/4)$

یادآوری $+(-\sin) = -\sin$, $+(-\cos) = +\cos$ / $-(-\sin) = +\sin$, $-(-\cos) = -\cos$

$(1+i)^{100} = 2^{100} = 2^{50}(\cos 25\pi + \sin 25\pi) = 2^{50}(-1+0) = -2^{50}$

مثال) با استفاده از فرمول دموآور $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ حساب کنید

$(\cos\theta + \sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$

$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2(\sin\theta\cos\theta) = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta - \cos\theta \end{cases}$$

تمرین) $\sin 3\theta$ و $\cos 3\theta$ ، $\sin 5\theta$ و $\cos 5\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ با استفاده از فرمول دموآور محاسبه کنید

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

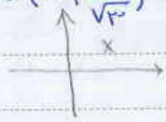
$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\rightarrow \cos^3\theta - i\sin^3\theta + 3\cos^2\theta \times i\sin\theta - 3\sin^2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

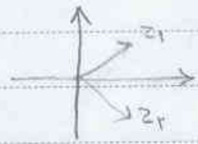
$\cos^3\theta - 3\sin^2\theta \times \cos\theta = \cos 3\theta$ $\quad$ $3\cos^2\theta \times i\sin\theta - i\sin^3\theta = \sin 3\theta$

مثال) اگر $A = (1+\frac{i}{\sqrt3})^n - (1-\frac{i}{\sqrt3})^n$ که در آن $n \in N$ ، $Im(A)$ و $Re(A)$ را محاسبه کنید

$z_1 = 1 + \frac{i}{\sqrt3}$: $\begin{cases} r : \sqrt{1+\frac13} = \frac{2\sqrt3}{3} \\ \tan\theta = \frac{\sqrt3}{3} \rightarrow \theta = \pi/4 \end{cases}$



$z_2 = 1 - \frac{i}{\sqrt3}$: $\begin{cases} r = \sqrt{1+\frac13} = \frac{2\sqrt3}{3} \\ \tan\theta = -\frac{\sqrt3}{3} \rightarrow \theta = -\pi/4 \end{cases}$



$z_1 = \frac{2\sqrt3}{3}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) \rightarrow z_1^n = (\frac{2\sqrt3}{3})^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$

$z_2 = \frac{2\sqrt3}{3}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4) \rightarrow z_2^n = (\frac{2\sqrt3}{3})^n(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4})$

$A = (\frac{2\sqrt3}{3})^n(2i\sin n\pi/4)$ $\quad$ $Re(A) = 0$

$Im(A) = (\frac{2\sqrt3}{3})^n(2\sin n\pi/4)$

مثال) مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که $1+i$ ریشه معادله $z^5+az^3+b=0$ باشد

$(1+i)^5+a(1+i)^3+b=0$ $\quad +b=0$

$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}) \to z^5=(\sqrt{2})^5(\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4})+a((\sqrt{2})^3(\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}))$

$4\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i(\frac{\sqrt{2}}{2}))+a(2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})+b=0$

$(-4-4i)+(-2a+2ai)+b=0 \quad \begin{cases}-4+2a=0\\ -4-2a+b=0\end{cases} \to \begin{cases}a=2\\ b=8\end{cases}$

فرمول مثلثی $\begin{cases} i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})\\ 1=1(\cos 0+i\sin 0)\end{cases}$

محاسبه ریشه n ام z $\quad \sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$ (ریشه n ام یک عدد مختلط)

فرض کنیم که ریشه n ام عدد مختلط z برابر z_0 باشد

$z^{\frac{1}{n}}=z_0 \to z=z_0^n$

$\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\\ z_0=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)\\ z_0^n=r_0^n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)\end{cases}$

$z=z_0^n \quad r(\cos\theta+i\sin\theta)=r_0^n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)$

$\to \begin{cases} r=r_0^n \to r_0=\sqrt[n]{r}\\ (1)\ \cos\theta=\cos n\theta_0\\ (2)\ \sin\theta=\sin n\theta_0\end{cases}$

$(2) \to \begin{cases} n\theta_0=2k\pi+\theta\\ n\theta_0=2k\pi+\pi-\theta\end{cases}$

$(1) \to \cos\theta=\cos n\theta_0 \to n\theta_0=2k\pi\pm\theta$

$\theta_0=\frac{2k\pi+\theta}{n} \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$

$\sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$

$z_1 z_2 = \theta_1 + \theta_2$

* هر معادله ی درجه n ام در اعداد مختلط n ریشه متمایز دارد

* ریشه های n ام یک عدد مختلط تشکیل یک n ضلعی منتظم محاط در دایره ای به شعاع $\sqrt[n]{|z|}$ می دهد

مثال) معادله $z^4 = -8+8\sqrt{3}i$ را حل کنید

ریشه چهارم

$z=\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$

$r=\sqrt{64+64\times 3} \to r_0=\sqrt[4]{r} = 2$

$\tan\theta = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3} \to \theta = \frac{2\pi}{3} \to \theta_0 = \frac{2k\pi + \left(\frac{2\pi}{3}\right)}{(4)\,n}$

$z_0 = 2\,cis\left(\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = 2\,cis\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \qquad k=0,1,2,3$

$k=0 \to \omega_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}+i$

$k=1 \to \omega_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})) = -1+\sqrt{3}i$

$k=2 \to \omega_3 = -\sqrt{3}-i$

$k=3 \to w_4 = -1-\sqrt{3}i$

مثال) ریشه n ام عدد مختلط 1+ را به دست آورید

$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \qquad r=\sqrt{1} \qquad \theta = 0$

$\theta_0 = \frac{2k\pi}{n} \qquad z_0 = 1\,cis\,\frac{2k\pi}{n} \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$

$\omega_1 = \cos 0 = 1 \qquad \omega_2 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \qquad \omega_3 = \cos\frac{4\pi}{n}$

مثال) ریشه چهارم $z=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را حساب کنید

$z_0 = \sqrt[n]{r}\,cis\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) \to 1-\sqrt{3}i = 2\,cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$1+\sqrt{3}i = 2\,cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$z=\left(\frac{2\,cis(-\frac{\pi}{3})}{2\,cis(\frac{\pi}{3})}\right)^{10} \to \left(cis\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10} = \left(cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10} = cis\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$

ریشه چهارم $= \sqrt[4]{1}\,cis\left(\frac{2k\pi-\frac{20\pi}{3}}{4}\right) \qquad k=0,1,2,3,\dots \qquad = cis\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\right)$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

تمرین ۱) ریشه دهم عدد مختلط $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$ را تعیین کنید

$z_1=1-i\sqrt{3}$ $\quad r=\sqrt{1+3}=2$ $\quad \tan\theta=-\sqrt{3}$ $\quad \theta=-\frac{\pi}{3}$

$z_2=1+i\sqrt{3}$ $\quad r=\sqrt{1+3}=2$ $\quad \tan\theta=\sqrt{3}$ $\quad \theta=\frac{\pi}{3}$ $\quad -\frac{2\pi}{3}$

$z_1=2cis(-\frac{\pi}{3})$ $\quad z_2=2cis(\frac{\pi}{3}) \to \frac{z_1}{z_2}=\frac{2cis(-\frac{\pi}{3})}{2cis(\frac{\pi}{3})}=cis(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$

$z_n=\sqrt[n]{r}\,cis(\frac{2k\pi+\theta}{n})=\sqrt[10]{1}\,cis(\frac{2k\pi-\frac{2\pi}{3}}{10}) \to k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$

$w_1=\sqrt[10]{1}cis(-\frac{\pi}{15})$ / $w_2=\sqrt[10]{1}cis(\frac{2\pi}{15})$ $\quad w_3=\sqrt[10]{1}(\frac{4\pi-\frac{2\pi}{3}}{10})$ $\quad w_4=\sqrt[10]{1}(\frac{6\pi-\frac{2\pi}{3}}{10})$

$w_5=\sqrt[10]{1}cis(\frac{8\pi-\frac{2\pi}{3}}{10})$ . . . . . .

تمرین ۲) معادله‌ی زیر را حل کنید

$z^6+z^4+z^2+1=z^5+z^3+z$

$z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0 \xrightarrow{\times(z+1)} z^7+1=0 \to z^7=-1$ $\quad z(-1)=cis(\pi)$

$z=eR^{i\theta} \to z=1R^{i\pi}$ $\quad (Re^{i\pi})^7$ $\quad z_0=cis(\frac{2k\pi+\pi}{7})$ $\quad k=0,1,2,\dots,6$

$w_0=cis(\frac{\pi}{7})$ $\quad w_1=cis(\frac{3\pi}{7})$ $\quad w_2=cis(\frac{5\pi}{7})$ $\quad w_3=cis(\pi)=-1$ غ ق ق $\quad \alpha$

$w_4=cis(\frac{9\pi}{7})$ $\quad w_5=cis(\frac{11\pi}{7})$ $\quad w_6=cis(\frac{13\pi}{7})$

تمرین ۳)

الف) $z^4-4z^2+16=0$

ب) $(z+1)^2+(z+1)+1=0$

الف) $z^2=t \to t^2-4t+16=0 \to \Delta=b^2-4ac=16-4(1)(16)=16-76=\sqrt{-60}$

$t_1,t_2=\frac{4\pm i\sqrt{-60}}{2}$ $\nearrow w_1$, $\searrow w_2$ $\quad t_1,t_2=2\pm\frac{\sqrt{60}}{2}i$ $\quad r=\sqrt{4+\frac{60}{4}} \to r=\sqrt{19}$

$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{60}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{60}}{4}$

$z+1=t \to t^2+t+1=0$ $\quad 1-4(1)(1)=-3$ $\quad t_1,t_2=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$z+1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\quad 2z+2=-1+\sqrt{3}i \to z_1=\frac{\sqrt{3}i-3}{2}$ $\quad z+1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \to 2z+2=-1-\sqrt{3}i$

$\to z_2=\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$

تمرین ۴)

$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

$\left(\frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n=\left(\frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{i\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{i\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n=\left(\frac{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n \xrightarrow{\div\cos} \left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^n$

$=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)}\right)^n \xrightarrow{\text{دموآور}} \frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos(-n\alpha)+i\sin(-n\alpha)}=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha} \xrightarrow{\times\frac{1}{\cos n\alpha}} =\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$

تمرین ۵) مکان هندسی عدد مختلط z را به دست آورید — مکان هندسی بیضی است

$|z-i+1|+|z+i-1|=3$

$|x+iy+1|+|x+iy-1|=3 \rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=3$

* نکته:

- $|z-z_0|=R$ نمایش یک دایره به مرکز z_0 شعاع r است
- $|z-z_1|=|z-z_2|$ نمایش عمود منصف پاره خط بین z_1 و z_2 است
- $|z-z_1|+|z-z_2|=C$ عموماً نمایش یک بیضی است
- $|z-z_1|-|z-z_2|=C$ نمایش یک هذلولی است

مثال) هرگاه $z=x+iy$ ، $\bar{z}$ مزدوج است معادله‌ی $z\bar{z}=36$ معرف چه شکلی است؟

$x^2+y^2=36$ مرکز دایره $(0,0)$

$r=6$

تمرین ۶) حاصل A را به دست آورید

$$A=\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{2^7(-1+\sqrt{3}i)}$$

تمرین ۷) معادله‌ی زیر را حل کنید

$$z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

$$z^5(z-1)+z^4(z-1)+z^3(z-1)+z^2(z-1)+z(z-1)+(z-1)=0$$

$$z^6-\cancel{z^5}+\cancel{z^5}-\cancel{z^4}+\cancel{z^4}-\cancel{z^3}+\cancel{z^3}-\cancel{z^2}+\cancel{z^2}-z+z-1 \rightarrow z^6-1=0 \rightarrow z^6=1$$

$$z^6=\text{cis}\left(\frac{2k\pi+0}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$z_0=\text{cis}\,0=1$ / $z_1=\text{cis}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ / $z_2=\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ / $z_3=\text{cis}\,\pi=-1$

$z_4=\text{cis}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ / $z_5=\text{cis}\frac{5\pi}{3}$

تمرین ۸)

فرض کنید $\omega \neq 1$ ریشه nام یک باشد $w^n = 1$ نشان دهید

$$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}=0$$

$$\omega^n = 1 \qquad \omega^{n-1} = 1$$

$$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1} = \frac{1(1-\omega^n)}{1-\omega} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{0}{\omega\neq 1} = 0$$

مثال) معادله زیر را حل کنید

$$z^4+z^2+1=0$$

تغییر متغیر $z^2 = t \rightarrow t^2+t+1=0$

$\Delta = -3$ ریشه ندارد $\quad \sqrt{-3} \rightarrow \sqrt{3i^2} \rightarrow i\sqrt{3}$

$$t_1, t_2 = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \nearrow \omega_1 \\ \searrow \omega_2 \end{cases} \qquad z^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \nearrow \omega_3 \\ \searrow \omega_4 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \arg\theta = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

(ریشه دوم) $z = cis\left(\frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{2}\right) \quad k=0,1 \begin{cases} \nearrow k=0 \quad cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \searrow k=1 \quad cis\left(\frac{2\pi+\frac{2\pi}{3}}{2}\right) = cis\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

انتگرال نامعین

فرض کنید $f(x)$ بر روی (a, b) تعریف شده باشد تابع $F(x)$ تابع اولیه و یا ضدمشتق $f(x)$ گویند هرگاه $F'(x)=f(x)$

مثال:

$y=\sin$ یک تابع اولیه بر روی $y=\cos$ می باشد $(-\infty, +\infty)$

یا $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ یک تابع اولیه روی $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ بر بازه $(-1,1)$ می باشد

ویژگی های انتگرال نامعین

فرض کنید $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد یعنی $F'(x)=f(x)$ در این صورت:

۱) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$

۲) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx$

۳) $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$

برخی از انتگرال های نامعین

عدد ثابت

۱) $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

۲) $\int \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

۳) $\int k\,dx = kx + C$

۴) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

۵) $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

۶) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

۷) $\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad \csc = \frac{1}{\sin x}$

$$\begin{cases} 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\ (\tan x)' = 1+\tan^2 x \end{cases}$$

۸) $\int \csc^2 x = -\cot x + C$

$\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x = 1+\cot^2 x$

$(\cot x)' = -(1+\cot^2 x)$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\quad \frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$

۹) $\int \sec x \tan x\,dx = -\csc x + C$

۱۰) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

۱۱) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$

۱۲) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

۱۳) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}|\ln(ax+b)| + C$

۱٤.) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax \, dx = \frac{1}{a} \ln|\csc ax - \cot ax| + c$

۱۵)

روش های انتگرال گیری:

۱- استفاده از تغییر متغیر

با استفاده از تغییر متغیر انتگرال ناآشنا را به انتگرال آشنا تبدیل می کنیم

$\int (x^2+2x-3)^2 (x+1)\, dx$

$u = x^2+2x-3 \rightarrow du = (2x+2)\,dx \rightarrow$

$\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln|\sec ax + \tan ax| + c$

$= \int u^2 \cancel{(x+1)} \frac{du}{2\cancel{(x+1)}} = \int \frac{u^2}{2} du = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} + c$

$= \frac{1}{6}(x^2+2x-3)^3 + c$

$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$

$u = \sin x \rightarrow du = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \sqrt{u}\, \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u^{\frac{1}{2}} dx = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt[2]{u^3} + c \rightarrow \frac{2}{3}\sqrt[2]{\sin^3 x} + c$

نمونه سوال (کلاس حل تمرین)

$y=(\tan x+\cos x)^3 \to y=u^3 \to y'=3u^2u'$

$y'=3(\tan x+\cos x)^2\times(1+\tan^2 x-\sin x)$

$y=\frac{\sin x}{\cos x-\sin x} \to y'=\frac{\cos x(\cos x-\sin x)-(-\sin x+\cos x)\sin x}{(\cos x-\sin x)^2}=$

$=\frac{\cos^2x-\cos x\sin x-[(-\sin^2x-\sin x\cos x)]}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}$

$y=\frac{F}{g}\to y'=\frac{F'g-g'F}{g^2}$

$y=\tan^{-1}(\sqrt{x+1})$ $y'=\frac{u'}{1+u^2}$

$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+(x+1)}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+2}$

$y=\cos^2(\sin^2 x+\sqrt{4x^2+5})$

$y'=\underset{n}{2}\cos(\underbrace{\sin^2 x+\sqrt{4x^2+5}}_{u^{n-1}})\times\left[-\sin(\underbrace{\sin^2 x+\sqrt{4x^2+5}}_{u'})\right]\times\left(2\cos x+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+5}}\right)$

$y=\cos^{-1}(5x^2\cos^{-1}x)$ $\cos^{-1}x=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$u'=(5x^2\cos^{-1}x)'=10x\cos^{-1}x+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\times5x^2=\frac{-(10x\cos^{-1}x+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\times5x)}{\sqrt{1-(5x^2\cos^{-1}x)^2}}$

$x-y=\arcsin x-\arccos y \to \arcsin x-\arccos y-x+y=0$

$y'=\frac{-F_x}{F_y}$

$y'=-\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{+1}{\sqrt{1-y^2}}+1}$

معادله خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 5$ که بر خط $2x - 4y + 1 = 0$ عمود باشد

$2x + 1 = 4y \rightarrow y = \frac{2x+1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad m = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{m' = -2}$

عمود

$y' = 3x^2 + 6x = -3 \rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در } y} y = 7$

معادله خط $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 7 = -2(x+1) \rightarrow y = -2x + 5$

ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases}$ در $t = 2$ حساب کنید

شیب خط مماس

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \xrightarrow{t=2} \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$y = \sin(n \arcsin x)$

$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

$$y' = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arcsin x)$$

$$y'' = \frac{0 \times \sqrt{1-x^2} - \frac{\cancel{-2}xn}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \times n}{(\sqrt{1-x^2})^2} \times \cos(n \arcsin x) - \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arcsin x) \times \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{nx}{\underbrace{\sqrt{(1-x^2)}}_{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}} \times \cos(n \arcsin x) - \frac{n^2 \sin(n \arcsin x)}{1-x^2} = \frac{n}{1-x^2}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \cos(n \arcsin x) - n \sin(n \arcsin x)\right]$$

$$(1-x^2)y'' = \left[\underbrace{\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}} \times \cos(n \arcsin x)}_{xy'} - n^2 \underbrace{\sin(n \arcsin x)}_{y}\right]$$

$(1-x^2)y'' = xy' - n^2 y$

$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

مثال) انتگرال حساب کنید: $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{x\frac{du}{2x}}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}u = \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$

تغییر متغیر

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

تمرین :

$\int x\sqrt{x-1}\,dx$

$u = x-1$

$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$u = \sqrt{x}$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$u = 1-x^2$

۲- روش جزء به جزء :

نقش: انتگرال را u و بخش دیگر را v فرض می‌کنیم و به صورت زیر عمل می‌کنیم

$d(uv) = du\,v + dv\,u$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

مثال) $\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

$\begin{cases} u = \sin^{-1}x \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$

هرگاه در انتگرال جزء به جزء ln با بود بهتر است ln را به عنوان u فرض کنیم و بقیه عبارت به عنوان dv

مثال)

$$\int x^2 \ln x \, dx =$$

$$\begin{cases} u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx=\frac{dx}{x} \\ dv=x^2 \rightarrow v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}\frac{dx}{\cancel{x}} = -\int \frac{x^2}{3}dx + \frac{x^3}{3}\ln x$$

$$= \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{9}+c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+c$$

۲_ روش جدول (حالت خاص روش جزء به جزء)

$$\int (\text{چند جمله‌ای}) \begin{pmatrix} e^{ax} \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} dx$$

مراحل روش جدول:

۱_ ابتدا از تابع چند جمله‌ای چند بار مشتق می‌گیریم تا صفر شود و از تابع دیگر به همان تعداد انتگرال می‌گیریم جدول را با ۲ ستون رسم می‌کنیم تابع چند جمله‌ای و مشتقات آن را در سمت چپ جدول و در سمت راست جدول تابع نمایی یا مثلثاتی به همراه انتگرال را می‌نویسیم

۲_ دو ستون جدول را به صورت مورب با علامت یکی در میان مثبت و منفی در هم دیگر ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم تا جواب انتگرال به دست آید

تابع چند جمله	تابع مثلثاتی یا نمایی
↓ مشتقات	↓ انتگرال

مثال) $\int x^2 \sin x \, dx$

x^2	$\sin x$	
$2x$	$-\cos x$	+
2	$-\sin x$	−
0	$\cos x$	+

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

$u \xrightarrow{\text{مشتق}} du$

$dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} v$

تمرین

$\int x\cdot e^{2x}\,dx$ حالت خاص جزء به جزء

x مشتق	انتگرال
1	e^{x}

$$\int x^2\cos^2 x\,dx = \int x^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int x^2\,dx + \int x^2\cos 2x\,dx\right]$$

$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+c$

$$* \int x^2\cos 2x\,dx \begin{cases} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = \cos 2x\,dx \to v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases} \to \frac{x^2}{2}\sin 2x - \int x\sin 2x\,dx$$

$$\begin{cases} u = x \to du = 1\,dx \\ v = \sin 2x\,dx \to dv = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases} \to \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

پاسخ نهایی

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$$

انتگرال گیری از کسرهای گویا

حالت اول: درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد

① مخرج عامل درجه اول و غیر تکراری (قابل تجزیه)

روش اول

$$\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$A(x+2)+B(x-1)=2 \to Ax+2A+Bx-B=2$$

$$x(A+B)+2A-B=2 \to \begin{cases} A+B=0 \to A=\frac{2}{3} \\ 2A-B=2 \quad B=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

روش دوم

$$A(x+2)+B(x-1)=2$$

$x=1 \to 3A=2 \to A=\frac{2}{3}$ به دلخواه عددی می دهیم و بهتر است عدد ریشه مخرج باشد

$x=-2 \to B=-\frac{2}{3}$

② مخرج عامل درجه اول و تکراری $(ax+b)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $(ax+b)^n$ در سمت راست تساوی n کسر زیر را اضافه می کنیم

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

اعداد ثابت A_1 و A_2 و ... A_n را محاسبه می کنیم

مثال) $\dfrac{1}{(x+5)(x-1)^3} = \dfrac{A}{x+5} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3}$

عامل درجه اول غیر تکراری — عامل درجه اول تکراری

توان ۱

③ مخرج عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) و غیر تکراری (ax^2+bx+c)

در این حالت در سمت راست تساوی عامل $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}$ به ازای هر عامل درجه دوم غیر تکراری اضافه خواهد شد

مثال) $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

عامل درجه اول غیر تکراری — عامل درجه دوم غیر تکراری

$\dfrac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$

عامل درجه اول تکراری — عامل درجه دوم غیر تکراری

④ مخرج عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) و تکراری $(ax^2+bx+c)^n$

در سمت راست تساوی به ازای هر عامل $(ax^2+bx+c)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر اضافه می‌کنیم

$$\frac{A_1x+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

کاری به صورت نداریم

مثال) $\dfrac{x+5}{x(x^2+1)^3} = \dfrac{C}{x} + \dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$

درجه اول غیر تکراری — درجه دوم تکراری

برای حالات ذکر شده مخرج مشترک می‌گیریم و صورت کسرها را مساوی قرار می‌دهیم و اعداد ثابت را بدست می‌آوریم

$\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2} = \dfrac{A(1+x^2)+x(Bx+C)}{x(1+x^2)} \rightarrow 1 = A(1+x^2)+x(Bx+C)$

عامل درجه اول غیر تکراری — عامل درجه دوم غیر تکراری

ریشه مخرج $x=0 \longrightarrow A=1$

دلخواه

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow 2A+B+C=1 \rightarrow B+C=-1 \\ x=-1 \rightarrow 2A+B-C=-1 \rightarrow B-C=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

ARMAN

در معادله جایگذاری $\rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x}{1+x^2}$

حالت دوم: درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد پس از تقسیم کسر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقی‌مانده}}{\text{مخرج}}$$

مثال) کسر $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ را تجزیه کنید

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^2-3x-2 & x^3-x^2-2x \\ \cline{2-2} -x^4+x^3+2x^2 & x+1 \\ \hline x^3-x^2-3x-2 & \\ -x^3+x^2+2x & \\ \hline -x-2 & \end{array}$$

$$(x+1)-\frac{(x+2)}{x^3-x^2-2x} = \frac{-x+2}{x(x-2)(x+1)}$$

x^3-x^2-2x ← $x(x^2-x-2)$

درجه صورت از مخرج کمتر شد پس دو طرف را تجزیه می‌کنیم

درجه اول و غیر تکراری

$$\longrightarrow \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1)+B(x)(x+1)+C(x)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$-x-2 = A(x-2)(x+1)+B(x)(x+1)+C(x)(x-2)$$

ریشه‌های مخرج:

$$\begin{cases} x=0 \to -2A=-2 \to A=1 \\ x=2 \to 6B=-4 \to B=-\frac{2}{3} \\ x=-1 \to 3C=-1 \to C=-\frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow x+1+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}$$

طریقه انتگرال‌گیری از حالات ذکر شده

حالت اول

① مخرج درجه اول و غیر تکراری:

$$\int \frac{c\,dx}{ax+b} = c\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{c}{a}\int\frac{a\,dx}{ax+b} = \frac{c}{a}\ln|ax+b|$$

مثال)

$$\int\frac{5\,dx}{2x-3} = \frac{5}{2}\ln|2x-3|$$

② درجه اول و تکراری: از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم $\boxed{(ax+b)=t}$

مثال)

$$\int\frac{dx}{(2x-7)^3}$$

$$(2x-7)=t \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} 2dx=dt \to dx=\frac{dt}{2}$$

$$\int\frac{dt}{2t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{4t^2}+c = -\frac{1}{4(2x-7)^2}+c$$

حالت دوم

۳) مخرج کسر عامل درجه دوم و غیر تکراری

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{Ax}{x^2+a^2}\,dx + \int \frac{B}{x^2+a^2}\,dx$$

زمانی به x بر روی x^2+a^2 باشد جواب معمولاً $\ln$ است $\frac{c}{a}\ln|\text{مخرج}|$

زمانی به عدد ثابت بر روی x^2+a^2 باشد جواب $\tan^{-1}(x)$ است $\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

$$* \int \frac{dx}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

مثال)

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{5x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} = \boxed{\frac{5}{2}\ln|x^2+4|+C}$$

پس صورت باید ۲x = مشتق
هم دارد در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$(1)\int \frac{dx}{x^2+4} = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C}$$

جواب نهایی $\frac{5}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

۴) مخرج عامل درجه دوم و تکراری

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{Ax}{(x^2+a^2)^n}\,dx + \int \frac{B}{(x^2+a^2)^n}$$

تغییر متغیر $(x^2+a^2)=u$

زمانی به عدد ثابت بر روی $(x^2+a^2)^n$ باشد تغییر متغیرآن به صورت $x=a\tan\theta$ است

مثال)

$$\int \frac{5x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} x^2+1=u \rightarrow 2x\,dx=du \rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{5x\frac{du}{2x}}{u^2} = \frac{5}{2}\int\frac{du}{u^2} = \frac{5}{2}\int u^{-2}\,du = \frac{5}{2}\,\frac{u^{-1}}{-1}+C = \boxed{\frac{-5}{2(x^2+1)}+C}$$

$\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta$

$\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta$

$\int \frac{1\,dx}{(x^2+1)^2}$ تغییر متغیر $x = 1\tan\theta \to dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$ ($a\tan\theta$)

$= \int \frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{2}} = \int \frac{d\theta}{\underbrace{1+\tan^2\theta}_{\frac{1}{\cos^2\theta}}} = \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= \int \frac12\, d\theta + \int \frac{\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac12\theta + \frac14 \sin 2\theta$ $(\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$

$x=\tan\theta \to \theta = \tan^{-1}x$

$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x}{1} \to \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ تعمیم م α

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

جواب نهایی $= \frac12\tan^{-1}x + \frac14 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C = \frac12 \tan^{-1} + \frac{x}{x^2+1} + C$

انتگرال‌گیری توابع مثلثاتی:

① $\int \sin^m x$ و $\int \cos^m x$

حالت اول: اگر m زوج باشد از رابطه $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ و $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ استفاده می‌کنیم توان‌ها را کاهش می‌دهیم تا زمانی از رابطه استفاده می‌کنیم که توان $\sin x$ و $\cos x$ یک شود

: اگر m فرد باشد یک $\sin x$ یا $\cos x$ را نگه داشته و از رابطه $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$ استفاده می‌کنیم اگر توان cos فرد باشد از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده و اگر توان sin فرد باشد از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم

مثال) $\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4}\, dx$ (توان زوج) (اتحاد)

$= \int \frac14\, dx + \int \frac{\cos^2 2x}{4}\, dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx = \frac14 x + \frac18 x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac14 \sin 2x + C$

تعمیم م ×

توان فرد

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x \cos^2 x\, dx =$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \text{تغییر متغیر}\ \sin x = t \to \cos x\, dx = dt \to dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{cases}$$

تغییر

$$\to \int \cos x (1 - \sin^2 x)\, dx = \int \cos x (1 - t^2) \frac{dt}{\cos x} = \int (1 - t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

حالت دوم: انتگرال‌های به فرم $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (توان‌ها اعداد صحیح و مثبت)

الف) حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد

اگر توان $\sin x$ فرد باشد از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم (مثل حالت قبل)

ب) اگر توان‌ها زوج باشد از روش کاهش توان استفاده می‌کنیم

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

$$\int \sin^2 x \cos x (\cos^2 x)\, dx$$

تغییر متغیر

$$\sin x = t \to \cos x\, dx = dt \to dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \boxed{\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C}$$

مثال) $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ $\quad m+n: \; 2+6=8$ (زوج)

$\tan x = t \to (1+\tan^2 x)dx = dt \to dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \tan^2 x\,(1+\tan^2 x)^2\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \cancel{(1+t^2)}^{(1+t^2)}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

$= \int t^2(1+t^2)dt = \int (t^2+t^4)dt = \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = \boxed{\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}+C}$

تغییر متغیرهای مثلثاتی

(1) انتگرال‌هایی شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ اغلب با نشاندن $x=a\sin\theta$

$16=a^2 \to a=4$

مثال) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ $\quad x=4\sin\theta \to dx = 4\cos\theta\, d\theta$

$=\int\frac{4\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}} = \int\frac{4\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{16(\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta})}} = \int\frac{\cancel{4\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{4\cos\theta}} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1}\frac{x}{4}$

$\sin\theta = \frac{x}{4} \to \theta = \sin^{-1}\frac{x}{4}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$ $\quad x=3\sin\theta \to dx = 3\cos\theta\, d\theta$

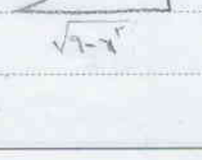
$=\int\frac{3\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(\underbrace{9-9\sin^2\theta}_{9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta})^3}} = \int\frac{\cancel{3}\cancel{\cos\theta}\, d\theta}{\underbrace{\cancel{27}}_{9}\cos^{\cancel{3}}\theta} = \int\frac{1}{9}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{9}\int(1+\tan^2\theta)d\theta$

برحسب X

[illegible]

$= \frac{1}{9}\tan\theta + C$

$x=3\sin\theta \to \sin\theta = \frac{x}{3}$ $\qquad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$



$$\tan^2\theta + \sec^2\theta = 1$$

② انتگرال‌هایی شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ یا $\frac{1}{x^2+a^2}$ جایگزینی $x=a\tan\theta$

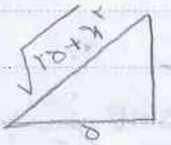
مثال) $\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} =$ $\quad \sqrt{9+x^2}$

$$\begin{cases} x = 5\tan\theta \\ dx = 5(1+\tan^2\theta)\,d\theta \end{cases}$$

$$= \int \frac{5(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{25+25\tan^2\theta}} = \int \frac{\cancel{5}\sec^{\cancel{2}}\theta\,d\theta}{\cancel{5\sec\theta}} = \int \sec\theta\,d\theta = \text{Ln}\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C$$

$(25(1+\tan^2\theta))$ $\quad \sec^2$

$x = 5\tan\theta \rightarrow \tan\theta = \frac{x}{5}$



$$\sec = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{5}{\sqrt{25+x^2}}} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5} = \text{Ln}\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{5} + \frac{x}{5}\right| + C$$

③ انتگرال‌هایی شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ تغییر متغیر $x = a\sec\theta$

مثال) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ $\quad x = 2\sec\theta \rightarrow dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{4\tan^2\theta}} = \int \frac{\cancel{2}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{\cancel{2\tan\theta}}$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \text{Ln}\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C$$

$x = 2\sec\theta \rightarrow \sec\theta = \frac{x}{2} \rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$

④ انتگرال‌هایی به فرم $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ جایگزینی $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

مثال) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x\,dx$

$t = \tan\frac{x}{2} \rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$ $=$

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$1+\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

~~مفهوم~~

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 \rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

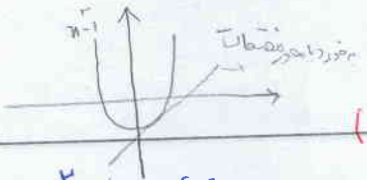
$$t = \tan\frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

انتگرال‌گیری توابع رادیکالی: تغییر متغیر $x=t^K$ که K ک.م.م فرجه‌هاست

مثال) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx \qquad x = t^K \rightarrow dx = 4t^3\,dt$

$$= \int \frac{t^2}{1+t^3} \times 4t^3\,dt = 4\int t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\,dt \longrightarrow 4\int \frac{t^3}{3}$$

~~تقسیم~~



سوال اضافه (کلاس حل تمرین)

مساحت کمترین مثلثی را بیابید که از برخورد مماس بر منحنی $y = x^2 - 1$ در ربع چهارم با محورهای مختصات

در ربع چهارم مماس

$y = F(x) = x^2 - 1$

$y' = 2x \rightarrow F'(x_0) = 2x_0$

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - (x_0^2 - 1) = 2x_0(x - x_0) = 2x_0 x - 2x_0^2$

$y = 2x_0 x - 2x_0^2 + x_0^2 - 1 = 2x x_0 - x_0^2 - 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -x_0^2 - 1 \\ y = 0 \rightarrow 2x_0 x - x_0^2 - 1 = 0 \\ \quad 2x x_0 = x_0^2 + 1 \\ \quad x = \dfrac{x_0^2 + 1}{2x_0} \end{cases}$

$S = \frac{1}{2} x y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x_0^2 + 1}{2x_0}\right)(-x_0^2 - 1) = \frac{x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0}$

توجه! مشتق

$S' = \frac{4x_0^3 + 4x_0(4x_0) - 4(x_0^4 + 2x_0^2 + 1)}{16x_0^2} = \frac{16x_0^4 + 16x_0^2 - 4x_0^4 - 8x_0^2 - 4}{16x_0^2}$

$= \frac{12x_0^4 + 8x_0^2 - 4}{16x_0^2} \rightarrow 12x_0^4 + 8x_0^2 - 4 = 0$

$3x_0^4 + 2x_0^2 - 1 = 0 \rightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}{4 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$

اکسترمم موضعی

$F(x) = x + \frac{1}{x}$

$D_f = R - \{0\}$ دامنه ناپیوسته

مجانب مایل $y = mx + h$

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ $\Big\} \rightarrow y = x$ مجانب مایل

معلوم

$h = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow y' = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} x = +1 \rightarrow y = 2 \\ x = -1 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

تقعر $y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'	$+$ ↗	max	$-$ ↘	تن	$-$ ↘	min	$+$ ↗	
y''	$-$ ∩		$-$ ∩	عطف	$+$ ∪		$-$ ∪	

$F(x) = \frac{3x^2}{[illegible]}$ $D_f = \mathbb{R}$

$$F'(x) = \frac{6x(x^2+3) - 2x(3x^2)}{(x^2+3)^2} = \frac{6x^3 + 18x - 6x^3}{(x^2+3)^2} = \frac{18x}{(x^2+3)^2}$$

$$F''(x) = \frac{18(x^2+3)^2 - 2(2x)(x^2+3)(18x)}{(x^2+3)^4} = \frac{\cancel{(x^2+3)}\overbrace{(18x^2+54-72x^2)}^{54(1-x^2)}}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$y' = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$

$y'' = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'	$-$		$-$ ↘	min	↗ $+$		$+$	
y''	$-$	عطف	$+$		$+$	عطف	$-$	

$(\sec)' = \sec x \tan x$

روابط بازگشتی

معمولاً از روش جزء به جزء استفاده می کنیم

مثال) دستور بازگشتی $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ را حساب کنید

$$I_1=\int\frac{dx}{\cos x}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$I_{n-2}=\int\frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\vdots$$

$$I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$$

$$I_n=\int \overset{udv}{\sec^n x\,dx}=\int \sec^2 x\,\sec^{n-2}\,dx$$

$$\begin{cases}\sec^2 dx = dv \rightarrow v=\tan x\\ u=\sec^{n-2}x \rightarrow du=(n-2)\sec^{n-3}x\,.\,\sec\tan x=(n-2)\sec^{n-3}\tan x\end{cases}$$

$$=\underset{u}{\sec^{n-2}x}\,\underset{v}{\tan x}-(n-2)\int \underset{v}{\tan^2 x}\,\underset{du}{\sec x\,dx}\xrightarrow{\tan^2 x=\sec^2 x-1}$$

$$=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int(\sec^2 x-1)(\sec^{n-2})\,dx=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\underbrace{\int\sec^n x\,dx}_{I_n}$$

$$+(n-2)\underbrace{\int\sec^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}}$$

$$\rightarrow \sec^{n-2}x\tan x-(n-2)I_n+I_{n-2}=I_n$$

$$I_n=\frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x+\frac{(n-2)}{(n-1)}I_{n-2}\qquad n\geq 2$$

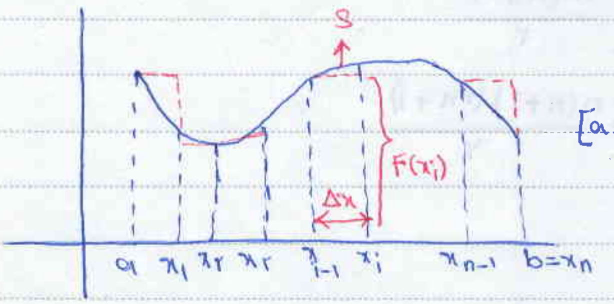
انتگرال معین

محاسبه مساحت برای ناحیه هایی با اضلاع مستقیم یا شبیه شکل مثلث - مربع - مستطیل ... راحت می باشد حتی نواحی حاصل از چند بخش را می توان به صورت جداگانه حساب کرد و در نهایت مجموع مساحت ها را به دست آورید

$$A=A_1+A_2+A_3$$

فرض کنید می‌خواهیم مساحت ناحیه S که مربوط به مساحت زیر منحنی $F(x)=y$ می‌باشد در بازه $[a \;\; b]$ را به دست آوریم

ناحیه S را به n قسمت تبدیل می‌کنیم بدین صورت بازه $[a \;\; b]$ را به زیربازه‌هایی به اندازه $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم



$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, \underset{b}{x_n}]$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x$$

$$\vdots$$

$$x_i = a + i\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\text{مساحت کل ناحیه } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

مساحت نوار S_i برابر است با:

$$S_i = F(x_i)\Delta x$$

بنابراین مساحت ناحیه S برابر است با:

$$R_n = F(x_1)\Delta x + F(x_2)\Delta x + \dots + F(x_n)\Delta x$$

تعریف:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)$$

بنابراین به این مجموعه مجموع ریمان می‌گوییم:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} F\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

تعریف انتگرال معین:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} F\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

انتگرال معین در صورت وجود منحصر به فرد است

* اگر بخواهیم از مجموع برای محاسبه انتگرال استفاده کنیم لازم است روابط زیر را بدانیم

1) $1+2+3+\dots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

2) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

مثال) $F(x)=x^2$ را در بازه $[0\ \ 1]$ درنظر بگیرید مطلوب است محاسبه $\int_0^1 x^2dx$

روش اول) $\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

$\Delta x=\frac{b-a}{n}$

روش دوم) $\Delta x=\frac{1}{n}$

$F(a+i\Delta x)=F(\frac{1}{n})=\frac{1^2}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}F(a+i\Delta x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2}=\lim\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{1}{n^3}=\frac{1}{3}$$

ویژگی های انتگرال معین:

1) $\int_a^b F(x)dx=-\int_b^a F(x)dx$

2) $\int_b^a F(x)dx=0$

3) $\int_a^b (F(x)\pm g(x))dx=\int_a^b F(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b cF(x)dx=c\int_a^b F(x)dx$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

5) $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^c F(x)\,dx + \int_c^b F(x)\,dx$

6) اگر به ازای $a \leq x \leq b$ ، $m \leq F(x) \leq M$ آنگاه

$m(b-a) \leq \int_a^b F(x)\,dx \leq M(b-a)$

مثال) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید

1) $\int_0^\pi \sqrt{1+\sin x}\,dx =$

$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$ ، $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int_0^\pi \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$

$= \int_0^\pi \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$!! قدر مطلق دارم
تعیین علامت

x نفهمیدم

$= \int_0^\pi \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx = -2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi = 4$

2) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

3) $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

$u = (\ln x)^2 \to du = \frac{2}{x}\ln x\,dx$

$dv = dx \to v = x$

$= x(\ln x)^2 - \int x\,\frac{2}{x}(\ln x)\,dx = (\ln x)^2 x - 2\int_1^e \ln x\,dx$

$\begin{cases} \ln x = u \to du = \frac{1}{x} \\ dx = dv \to v = x \end{cases}$

$= (\ln x)^2 x - 2x(\ln x) + 2\int \frac{1}{x}\,x\,dx = \left(x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^e = e-2$

تعیین علامت

④ $\int_0^1 \sqrt{|2x-1|+x}\,dx$ $|2x-1| : \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{-2x+1+x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1+x}\,dx \to \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x+1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{3x-1}$

$\to \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (3x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^1$

$=$ X

تعریف: اگر F روی [a b] پیوسته باشد آنگاه مقدار متوسط (میانگین) F بر روی [a b] برابر است با

$$av(F) = \frac{\int_a^b F(x)\,dx}{b-a}$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال معین:

اگر F بر روی [a b] پیوسته باشد آنگاه حتماً c ای وجود دارد به طوری که

$$F(c) = \frac{\int_a^b F(x)\,dx}{b-a}$$

مثال) اگر $F : [0,1] \to R$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x \in [0,1]$ تعریف کنیم

$$F(x) = \int_0^x F(t)\,dt$$

ثابت کنید نقطه c که $0 < c < 1$ موجود است به طوری که:

$$F(1) - F(c) = \int_0^1 x F(x)\,dx$$

$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{F(x)}_{dv}$

$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ F(x)\,dx = dv \to v = F(x) \end{cases}$

$= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx = F(1) - \int_0^1 F(x)\,dx$

قضیه مقدار میانگین $F(c) = \frac{\int_0^1 F(x)\,dx}{1} \to \int_0^1 F(x)\,dx = F(c)$ رابطه ۱

جایگذاری در رابطه اول $\to \int_0^1 x F(x)\,dx = F(1) - F(c)$

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x)=h'(x)\,f(h(x))-g'(x)\,f(g(x))$$

مثال) حد زیر را بدست آورید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,dt}{\int_0^{x}(1-\cos t)\,dt}=\frac{0}{0}\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\,\ln(1+\sin^2 x)-0}{1(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(x^2)}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}4x=0$$

تغییر متغیر در انتگرال معین:

همانند تغییر متغیر در انتگرال نامعین می باشد ولی حدود انتگرال تغییر می کند

مثال) $\int_{-\ln 2}^{0} e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=?$

$$e^x=u \rightarrow e^x\,dx=du \rightarrow dx=\frac{du}{e^x}$$

$$e^x=u\rightarrow\begin{cases}x=-\ln 2\rightarrow u=e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-1}}=2^{-1}=\frac{1}{2}\\ x=0\rightarrow u=e^0=1\end{cases}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du=?\longrightarrow\boxed{u=\sin\theta}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$$

$$\begin{matrix}u=\sin\theta\\ du=\cos\theta\,d\theta\end{matrix}\longrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}\\ u=1\rightarrow\sin\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{1-\sin^2\theta}}_{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

* به کمک انتگرال میتوان حد مجموع را بدست آورد

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{a+i\,\frac{b-a}{n}}_{x}\Big)$$

برای راحتی $a=0$ در نظر بگیرید

ضریب $\frac{i}{n}$ داخل سری را در نظر میگیریم

مثال)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\frac{\cos\pi}{2n}+\frac{\cos 2\pi}{2n}+\dots+\frac{\cos(n-1)\pi}{2n}\right)=?$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{i\pi}{2n}$$

برای راحتی $a=0$

$b=\frac{\pi}{2}$ $\quad x_i=a+i\,\frac{b-a}{n}=0+\overbrace{\frac{i\pi}{2n}}^{x}$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}+\dots+\frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}+\dots+\frac{n}{n}e^{\frac{n}{n}}\right)=?$$

$$\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}e^{\frac{i}{n}}$$

برای راحتی $a=0$

$b=1$ $\quad a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)=\frac{i}{n}^{\,x}$

$$=\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv}=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=1$$

$$e^x\Big|_0^1$$

$$\begin{cases} x=u\rightarrow dx=du\\ e^x dx=dv\rightarrow v=e^x\end{cases}$$

کاربرد انتگرال معین

① مساحت:

انتگرال توابع متقارن: فرض کنید F روی $[-a \ \ a]$ پیوسته باشد

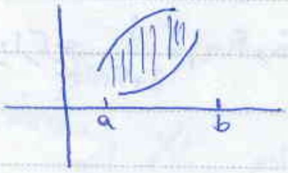
الف) اگر F زوج باشد $F(-x)=F(x)$ آنگاه

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} F(x)\,dx$$

ب) اگر F فرد باشد $F(-x)=-F(x)$ آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

محاسبه مساحت بین دو نمودار



برای محاسبه مساحت بین دو نمودار $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در بازه $[a \ \ b]$

$$S \text{ مساحت بین دو نمودار } = \int_{a}^{b} \left|F(x)-g(x)\right| dx$$

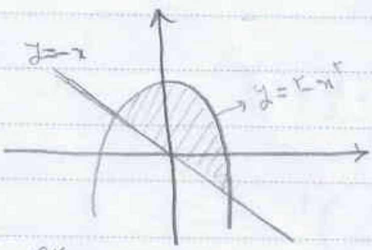
مثال) مطلوب است محاسبه مساحت بین دو منحنی $y=\sec^2 x$ و $y=\sin x$ از 0 تا $\frac{\pi}{4}$

$$S=\int_{0}^{\pi/4} (\sec^2 x-\sin x)\,dx = \tan x+\cos x \Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال) مطلوب است محاسبه مساحت بین $y=2-x^2$ و خط $y=-x$ را بیابید

حدود؟

منحنی ها را رسم و نقاط تقاطع می دهیم و حدود را مشخص می کنیم

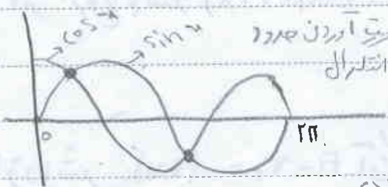


تقاطع $-x=2-x^2 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$ حدود

$$S=\int_{-1}^{2} \left((2-x^2)-(-x)\right)dx = \int_{-1}^{2} -x^2+x+2\,dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

مثال) مساحت ناحیه محصور شده توسط دو منحنی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در ناحیه $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|\,dx=?$$



برای بدست آوردن حدود انتگرال

$$\sin x=\cos x \to \begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)=4\sqrt{2}$$

مثال) مساحت ناحیه R واقع بین نمودار $f(x)=\dfrac{1}{4+\sin 2x}$ و خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4+\sin 2x}\,dx \quad \times \quad \text{مستقیم}$$

تغییر متغیر

$$u=\tan x \to du=(1+\tan^2 x)\,dx \to dx=\frac{du}{1+u^2}$$

$$\begin{cases} 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\ ,\ \cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}\ ,\ \sin^2 x=1-\frac{1}{1+u^2}=\frac{u^2}{1+u^2} \\ \sin 2x=2\sin x\cos x \longrightarrow \sin 2x=2\sqrt{\frac{1}{1+u^2}}\times\sqrt{\frac{u^2}{1+u^2}}=\frac{2u}{1+u^2} \\ \sin^2 x+\cos^2 x=1 \end{cases}$$

تغییر متغیر ← مرز تغییر می‌کند ← $u=\tan x$

$$\begin{cases} x=0 \to u=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \to u=1 \end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{\frac{du}{1+u^2}}{4+\frac{2u}{1+u^2}}=\int_0^1\frac{du}{4u^2+2u+4}$$

$$\underbrace{(2u)^2+2\times 2u\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}_{(2u+\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4}+4$$

$$\frac{1}{2}\times\left(\int_0^1\frac{du}{(2u+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$a^2\to a=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

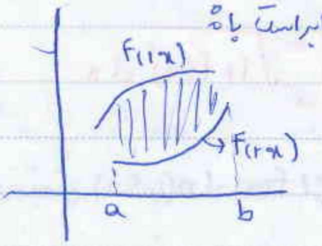
۳) محاسبه حجم

برای محاسبه حجم حاصل از دوران یک ناحیه R حول خط L که موازی یکی از محورهای مختصات است از روش های زیر استفاده می‌کنیم

۱- روش حلقه مستدیر (دایره‌ها شده)

اگر ناحیه R محصور به منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد و تابع f_1 و f_2 در $[a \; b]$ پیوسته باشند و $f_1(x) \geq f_2(x)$

① آنگاه حجم حاصل از دوران ناحیه R حول محور xها برابر است با:



$$V(x)=\pi\int_a^b \left(f_1(x)^2 - f_2(x)^2\right)dx$$

② حجم حاصل از دوران ناحیه R حول محور yها برابر است با:

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

مثال) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $x^2=y$ و $y^2=8x$ حول محور xها را بیابید

$y=x^2$

$y^2=8x \to y=\sqrt{8x}$

$x^2=\sqrt{8x}$ → دو منحنی را با هم تلاقی → بازه‌ها را بدست آورده می‌دهیم

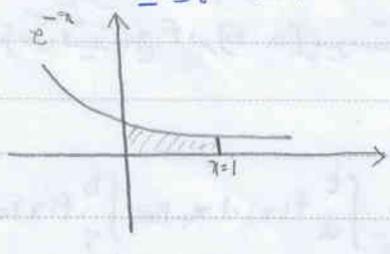
$\to x^4-8x=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

حول محور xها $\to V_x=\pi\int_0^2 (8x-x^4)dx = 4x^2-\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{48\pi}{5}$

مثال) سطح محصور شده منحنی $y=e^{-x}$ و محور xها و محور yها و خط $x=1$ را در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه

① حجم حاصل از دوران این سطح حول محور xها

② 〃 〃 〃 〃 حول محور yها



$V(x)=\pi\int_0^1 \left((e^{-x})^2-0^2\right)dx = \pi\int_0^1 e^{-2x}dx$

(الف)

$= -\frac{1}{2}\pi\int_0^1 -2e^{-2x}dx = \pi e^{-2x}\Big|_0^1 = |e^{-2}-1| = \frac{-\pi}{4}$

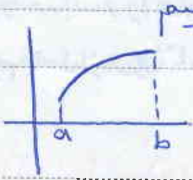
پ) $V_y = 2\pi \int_0^1 x(e^{-x} - 0)\,dx = 2\pi \int_0^1 \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv}$ جزء به جزء

$$\begin{cases} u = x \to du = 1 \\ e^{-x} = dv \to v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= 2\pi\,\underbrace{(-xe^{-x} - e^{-x})}_{u\times v - \int v\times du}\Big|_0^1 = 2\pi(-2e^{-1} + 1)$$

③ محاسبه طول قوس

برای محاسبه طول قوس ضابطه $y = f(x)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

$\ln u = \frac{u'}{u} = \frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$

مثال) طول قوس منحنی $f(x) = \ln(\cos x)$ از نقطه‌ای به طول $x = 0$ تا $x = \pi/4$ را محاسبه کنید

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\underbrace{1 + \tan^2 x}_{\sec^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\pi/4}$$

$$\ln|\sqrt{2} + 1| - \ln|1| = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

انتگرال‌های غیر عادی (ناسره):

① حدود انتگرال بی‌نهایت باشد

الف) $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t f(x)\,dx$

ب) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{s \to -\infty} \int_s^a f(x)\,dx$

② تابع زیر انتگرال به ازای نقطه‌ای از بازه تعریف نشده باشد

فرض کنید تابع f در $[a\ b]$ پیوسته به جز نقطه c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c^-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

مثال)

(1) $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{x^2-9} = ?$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}\cancel{A}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{6}B}{x+3}$$

محاسبهٔ A و B را [illegible]

$$\int_{4}^{\infty}\left(\frac{\cancel{A}\,\frac{1}{6}}{x-3} - \frac{B\,\frac{1}{6}}{x+3}\right)dx = \frac{1}{6}\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{x-3} - \frac{1}{6}\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\ln|x-3| - \ln|x+3|\right)\right|_{4}^{\infty} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_{4}^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{6}\ln\left|\cancel{\frac{x-3}{x+3}}\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1}{7}\right| = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1}{7}\right|$$

$$\frac{x}{x} = 1 \to \ln|1| = 0$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

تمرین

از خواص اعداد مختلط برای محاسبه انتگرال میتوان استفاده کرد

$$I = \int x e^{-x}\cos(2x)\,dx = ?$$

راهنمایی $= \operatorname{Re}\left(\int x e^{-x} e^{2xi}\,dx\right)$

دنباله

دنباله نامتناهی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\{a_n\}$ تابعی است که دامنه N باشد

- دنباله‌ای که درجه آن یک باشد به صورت تصاعد عددی است که قدر نسبت آن برابر با ضریب n می‌باشد

مثال) $a_n = -3n+2$ قدر نسبت $= -3$

- اگر دنباله‌ای به صورت نمایی باشد دنباله تصاعد هندسی است که قدر نسبت برابر با نسبت دو جمله متوالی است

مثال) $t_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} \to q = \frac{2}{3}$

هرگاه جمله عمومی دنباله‌ای یک جمله صریح نباشد و به جمله قبلی رابطه پیدا کند آن را بازگشتی گویند

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \quad , \quad t_1 = t_2 = 1$$

دنباله فیبوناچی $1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , \ldots$

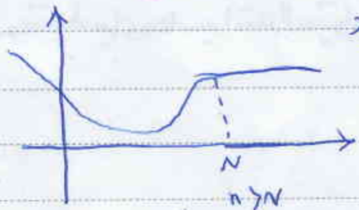
$$\begin{cases} \forall n \in N \quad a_{n+1} > a_n \\ \forall n \in N \quad a_{n+1} < a_n \end{cases}$$

دنباله صعودی

دنباله نزولی

تعریف) اگر در $\{a_n\}$، $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود و یکتا باشد دنباله همگرا و در غیر این صورت واگرا است

دنباله $\{a_n\}$ را به L همگرا گوییم هرگاه برای هر همسایگی متقارن L به شعاع ε عددی مانند N یافت شود که تمام جملات از N به بعد در این همسایگی قرار گیرد



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ , \ n > N \to |a_n - L| < \varepsilon$

مثال) اگر برای $n \geq n_0$ جملات $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n+1}$ تا حد آن فاصله کمتر از $\frac{1}{15}$ داشته باشد حداقل n_0 چه عددی است

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{25} \to \left|\frac{(-1)^n - 2}{n+1}\right| < \frac{1}{15}$$

زوج $n \to \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \frac{1}{25} \to n+1 > 25 \to n > 24$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ $n > 74$

فرد $n \to \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{25} \to n+1 > 75 \to n > 74$

در حد گیری از دنباله‌ها وقتی $n \to \infty$ باید بررسی شود که در فاصله‌های خیلی دور سرعت رشد دنباله‌ها نسبت به هم چگونه است

① حد آن با مقدار آن یکی است

مثال) دنباله $a_n = \cos\frac{2\pi}{n} + 2\sin^2\frac{\pi}{n}$ ثابت است چرا؟

$\cos\frac{2\pi}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{n} \to a_n = 1$ ثابت است

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha$$

② دنباله کسری: وقتی که درجه صورت کوچکتر یا مساوی مخرج باشد دنباله همگرا است

ب) وقتی که درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج باشد دنباله واگرا است

ج) وقتی که درجه صورت مساوی مخرج باشد دنباله به نسبت ضرایب بزرگترین درجه صورت و مخرج همگرا است

③ دنباله نمایی $\{a^n\}$ وقتی همگرا است که $-1 < a < 1$

مقایسه سرعت رشد:

$k \in N ,\ \log_n^k < n^k < 2^n < n! < n^n$

④ دنباله‌های رادیکالی ← توان بردن
هم ارزی

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad *$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

یادآوری:

- اگر a_n و b_n دو دنباله همگرا باشند $a_n \overset{\pm}{\times} b_n$ همگرا است و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$) همگرا است

- اگر a_n همگرا و b_n واگرا باشد $a_n \pm b_n$ واگرا و $\frac{b_n}{a_n}$ واگرا، در مورد همگرایی $\frac{a_n}{b_n}$ و $a_n \times b_n$ نمی‌توان قضاوت کرد

- اگر a_n و b_n واگرا باشند در مورد اعمال ریاضی باید بررسی شوند

دنباله کراندار: دنباله‌ای که همگرا باشد کراندار است

دنباله‌ای که حد آن وقتی $n \to \infty$ برابر ∞ شود بی‌کران است

حد $+\infty$ بی‌کران بالا

حد $-\infty$ بی‌کران پایین

مثال) در مورد همگرایی و واگرایی دنباله‌های زیر نظر دهید

(۱) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\sqrt{n} = \infty$ واگرا

(۲) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+5}$ × مزدوج

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}} = 0$ همگرا

(۳) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ کراندار

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

دنباله‌های کراندار: $\sin$ ، $\cos x$ ، $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ (تمام توابع معکوس مثلثاتی) و $(-1)^n$ و $x-[x]$

(۴) $a_n = \frac{\sin n}{2n+1}$ کراندار $\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ همگرا

(۵) $a_n = \log(3n-1) - \log(n+5)$

$a_n = \log\frac{3n-1}{n+5} \to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \log 3$ همگرا

$n\cos n = (-1)^n n$

(۶) $a_n = n\cos n\pi$

$a_n = (-1)^n n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} n \text{ زوج} \to & +\infty \\ n \text{ فرد} \to & -\infty \end{cases}$$ واگرا

(۷) $a_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$ واگرا

(۸) $a_n = (5n+1)\sin\frac{7}{2n+1} \to 0$

اگر کمان $\sin$ به سمت صفر رفت هم ارزها خودکمان می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5n+1 \times \frac{7}{2n+1} = \frac{35}{2}$$ همگرا

(۹) $a_n = n\cos\frac{(-1)^n}{n+1} \to 0$

اگر کمان $\cos$ به سمت صفر رفت هم ارزها ۱ می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \times 1 = \infty$$ واگرا

مثال) اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x) = \left|\left[\frac{x}{2}\right]\right|$ آنگاه دنباله $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟

$f(a_n) = \left|\left[\frac{(-1)^n}{4n}\right]\right|$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \begin{cases} n \text{ زوج} \to |[0^+]| = 0 \\ n \text{ فرد} \to |[0^-]| = |-1| = 1 \end{cases}$$ واگرا

مثال) دنباله a_n را در نظر بگیرید اگر $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$ همگرا باشد مقدار حد آن را بیابید

* اضافه کردن تعداد متناهی جمله به یک دنباله حد آن را تغییر نمی‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \to L = \sqrt{2L+15}$$

$L^2 = 2L + 15 \to L = 5$

$\to L = -3$ غ ق ق

سری

دنباله نامتناهی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید مجموع جملات این دنباله را $a_1+a_2+\dots+a_n$ را سری نامتناهی می‌نامیم و آن را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهیم

- مجموع n جمله اول سری را با نماد S_n نمایش می‌دهیم و آن را مجموع جزئی می‌نامیم

دنباله مجموع‌های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را با $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش می‌دهیم در صورتی که $\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$ موجود باشد سری همگرا است و مقدار همگرایی S است در غیر این صورت واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

مثال) سری زیر همگرا است یا واگرا؟

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ همگرا

+

سری تلسکوپی

اگر جملات دو به دو قرینه باشند و تیشه‌ها با هم حذف شوند فقط جمله اول و جمله انتهایی باقی می‌ماند

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m$$

مثال) چه تعداد از جملات دنباله $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\}$ را جمع کنیم تا حاصل 9 شود

$\lim \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \times$ مزدوج $= \sum_{i=1}^{K} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$(n-(n+1)) = -1$ $\quad \sqrt{K+1} - 1 = 9 \to K+1 = 100 \to K = 99$

سری هندسی

$$\sum_{n=a}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a}{1-q}$$

همگرا $|q| < 1$

واگرا $|q| > 1$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

سری p:

اگر $p>1$ سری همگرا

اگر $p\leq 1$ سری واگرا

سری همساز: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leftarrow$ سری واگرا

آزمون های همگرایی سری

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت و منفی را در نظر بگیرید

① آزمون جمله عمومی

شرط لازم برای همگرایی سری $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② آزمون کوشی

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید

اگر $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L \rightarrow \begin{cases} L<1 & \text{همگرا} \\ L=1 & \text{بی‌نتیجه} \\ L>1 & \text{واگرا} \end{cases}$

مثال)

وضعیت سری های زیر را بررسی کنید

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = ?$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ همگرا

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = ?$ $\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n}{e}}{n} = e^{-1}$ همگرا

$\lim \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}$ ✱

تمرین: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = ?$

۳) آزمون p

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید با فرض $a_n \geq 0$

چنانچه بتوان عددی مانند p در نظر بگیریم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = L \neq 0$$

این حد موجود و نامساوی صفر می باشد

حالت اول: اگر $p > 1$ باشد سری همگراست

حالت: اگر $p \leq 1$ باشد سری واگراست

مثال ۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+3} = ?$ $\quad \lim \frac{1}{4n^2+3} \times n^p$ p باید ۲ باشد تا حد داشته باشد

$p = 2 > 1$

$L = \frac{1}{4}$

پس همگراست

تمرین: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+1)\sin^9 \frac{1}{n}$

۴) آزمون دالامبر

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $a_n \geq 0$ در نظر بگیرید برای تعیین وضعیت سری از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \rightarrow \begin{cases} L<1 & \text{همگرا} \\ L=1 & \text{بی نتیجه} \\ L>1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{n!}}{n^n}}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

تمرین: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (n^2+1)}{2^n n!}$

⑤ آزمون انتگرال

سری $\sum_{n=c}^{\infty} a_n$ با فرض $a_n > 0$ را در نظر بگیرید

اگر a_n نزولی باشد $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} < a_n \\ a_n > 0 \end{array} \right.$

آن گاه وضعیت همگرایی سری فوق مانند وضعیت همگرایی انتگرال نا سره I زیر است

$$I = \int_c^{\infty} a(x)\, dx$$

مثال)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = ?$$ نزولی

$$= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\, dx =$$

$(e^{-\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$ پس باید $\frac{1}{2}-$ کم دارد پس در $2-$ ضرب و تقسیم می کنیم

$$= -2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{-2\sqrt{n}}\, dx = -2 e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^{\infty} = -2 e^{-\sqrt{\infty}} - 2 e^{-1}$$ پس همگراست

$\to -2e^{-1}$

⑥ آزمون لایب نیتز

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید اگر شرایط زیر برقرار باشد آن گاه سری همگرا است

① شرط اول $a_1 > a_2 \dots > a_n$ نزولی باشد

② شرط دوم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

آن گاه سری همگرا است

۷ آزمون رابه

تعریف سری همگرای مطلق: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نیز همگرا باشد سری را همگرای مطلق می‌نویسیم

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید

اگر $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=L$

اگر
- $L>1$ سری همگرای مطلق است
- $L=1$ بی‌نتیجه
- $L<1$ باشد همگرای مطلق نیست یعنی واگرا باشد یا همگرای مشروط

۸ آزمون وایرشتراس

اگر $|a_n|<|b_n|$ باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}=?$ $\quad \frac{\cos nx}{n^2}<\frac{1}{n^2}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ پس سری همگرای مطلق است

$p=2\to p>1\to$ همگرا

سری متناوب

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ زمانی همگرا است که شروط زیر برقرار باشد

با فرض اینکه $a_n \geq 0$ باشد

۱ شرط اول $a_1>a_2>\dots>a_n$ نزولی باشد $(a_n'<0)$

۲ شرط دوم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 + \dots$

سری ها که تابع و بحث فاصله همگرایی و شعاع همگرایی:

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,x)$ را در نظر بگیرید با شرط این سیگما مجموعی حاصل می‌شود هر کدام از جملات آن تابعی از x است

۱) شرط همگرایی طبق آزمون دالامبر:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,x)}{a(n,x)}\right|<1$$

۲) شرط همگرایی طبق آزمون کوشی:

$$\left|\lim \sqrt[n]{a(n,x)}\right|<1$$

سپس x هایی را تعریف می‌کنیم که به ازای این شرایط می‌انجامد (طول همگرایی)

* نکته: نصف طول همگرایی را شعاع همگرایی می‌نامیم

ابتدای بازه − انتهای بازه = فاصله همگرایی

مثال) فاصله همگرایی و شعاع همگرایی سری های زیر را تعیین کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2},\ x^n$$

کوشی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^{n^2}\times x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^n\times|x|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4-4+4}{2n-4}\right)^n=\lim\left(1+\frac{8}{2n-4}\right)^n=\lim\left(1+\frac{8}{\underbrace{2n-4}_{\text{فاکتور } 2(n-2)}}\right)^n$$

$$=\lim\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^n=e^4\to e^4|x|<1\to \overset{\text{ابتدای بازه}}{-\frac{1}{e^4}}<x<\overset{\text{انتهای بازه}}{\frac{1}{e^4}}$$ فاصله همگرایی

$$\text{شعاع همگرایی}=\frac{\text{انتهای بازه}-\text{ابتدای بازه}}{2}=\frac{\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^4}}{2}=\frac{1}{e^4}$$

مثال) فاصله همگرایی سری زیر را تعیین کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n (2x-1)^n}{n^2+1}$$

آزمون ریشه: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3-4i|^n |2x-1|^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+16}\,|2x-1|}{\sqrt[n]{n^2+1}} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} \simeq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}$$

$$A = n^{\frac{2}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \ln A = \frac{2}{n} \ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\frac{n}{2}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}} = 0 \to \lim A = e^0 = 1$$

فاصله همگرایی

$$\frac{5|2x-1|}{1} < 1 \to |2x-1| < \frac{1}{5} \to -\frac{1}{5} < 2x-1 < \frac{1}{5} \to \frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}$$

شعاع همگرایی $\to \frac{1}{10}$

بسط تیلور و بسط مک لورن:

بسط تیلور: بسط تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

که در آن ضرایب این سری عبارت اند از:

$$a_0 = f(x_0),\quad a_1 = \frac{f'(x)}{1!},\quad a_2 = \frac{f''(x)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

بسط مک لورن:

بسط تیلور حول نقطه $x_0 = 0$ را بسط مک لورن می‌نامند

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

* هر سه سری زیر به ازای $P > 1$ همگرا و به ازای $P \leq 1$ واگرا هستند

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$

② $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^P}$

③ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^P}$

مثال) تابع $f(x) = e^{x^2+x}$ مفروض است ضریب $(x-1)^2$ در بسط تیلور این تابع حول نقطه $x=1$ را به دست آورید

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

$$a_0 = f(x)$$

$$a_1 = \frac{f'(x)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$$

به خاطر اینکه a_2 را می‌خواهیم $f''(x)$ را حساب می‌کنیم

$$a_2 = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$f'(x) = (2x+1) \times e^{x^2+x} \qquad f''(x) = 2e^{x^2+x} + (2x+1)e^{x^2+x}(2x+1)$$

$$f''(1) = 2e^2 + 9e^2 = 11e^2 \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{11e^2}{2}}$$

بسط مک لورن در توابع خاص (مهم)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|x| < 1 ,\quad \frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

مثال) سری تیلور $y = \sin x$ را حول $x = \pi/4$ به دست آورید

$$f(x) = f(\pi/4) + f'(\pi/4)\frac{(x-\pi/4)}{1!} + f''(\pi/4)\frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \cdots$$

مثال) همگرایی سری های زیر را بررسی کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$$

$$\left(1 - \cos\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2}$$

کوشی $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}$

توان ۲ تقسیم بر ۲ $\quad \cos\frac{a}{n} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} -\frac{\frac{a^2}{n^2}}{2} \quad \operatorname{Ln}(1+u) \simeq u$

$$\to \operatorname{Ln} A = n^2 \operatorname{Ln}\Big(1 + \underbrace{\cos\frac{a}{n} - 1}_{u}\Big)$$ هم ارزی

$$= \lim \cancel{n^2} \times \frac{-a^2}{2\cancel{n^2}} = \frac{-a^2}{2} \to e^{-\frac{a^2}{2}} \to e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$$ همگرا

مثال) با استفاده از آزمون انتگرال همگرایی سری زیر را به دست آورید

$a_n \geq 0$ نزولی

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} \to \int_{16}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

$$f'(x) = 2x e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \times x^2 < 0$$

$$\underset{+}{x e^{-\sqrt{x}}} \Big(\underset{-}{2 - \frac{x}{2\sqrt{x}}}\Big) < 0 \to 2 - \frac{x}{2\sqrt{x}} < 0 \to x > 16$$

این قسمت + است — پس باید این قسمت − باشد

هرگاه x^n داشتیم مشتق ... بود انتگرال

$$\int_{16}^{\infty} x^{2} e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$P(x)e^{-\sqrt{x}}\Big|_{16}^{\infty} = \cancel{P(\infty)e^{-\sqrt{\infty}}} - P(16)e^{-\sqrt{16}} = -P(16)e^{-\sqrt{16}} \;\text{تقریباً}\; = -(16)^{2} e^{-4}$$

تمرین دنباله همگرایی سری $f(x)=\dfrac{3^n(x-2)^n}{2^n(n^2+n)}$ را بدست آورید

راهنمایی $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

مثال) سری مک لورن $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ را بدست آورید

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{2n})$$

$$f(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}$$

سری مک لورن $f(x)=\ln(1-x)$ را بدست آورید
انتگرال چون آسان است از صفر تا x بگیریم

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \xrightarrow[\int_0^x \text{مطلوبم}]{\text{از دو طرف انتگرال}} \int_0^x\frac{dx}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n$$

$$=-\ln(1-x)\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{\text{انتگرال } x^n} \qquad -\ln 0+\ln(1)$$

حاصل $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ را بدست آورید

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\text{از طرفین مشتق}\longrightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\times x} xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$e^x+xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\times x} x(e^x+xe^x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$$

تمرین: سری مک لورن $f(x) = \dfrac{5+x}{2-x-x^2}$ را بدست آورید

راهنمایی ← از تجزیه کسر استفاده کنید مثال ۲۱ فرامرزی

تمرین: سری تیلور تابع f را حول نقطه $t=1$ حساب کنید و شعاع همگرایی سری بدست آمده را بیابید
۲۲ فرامرزی

$$f(t) = \frac{t-1}{t^2-3t+3}$$

X تمرین: در بازه همگرایی فرض کنید $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ تابع $f(x)$ را مشخص کنید

راهنمایی $|x|<1 \quad \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

انتگرال $\int_0^x \dfrac{dt}{1-t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n \, dt$

	توابع	مشتق
۱	$y=c$	$y'=0$
۲	$y=ax$	$y'=a$
۳	$y=ax+b$	$y'=a$
۴	$y=au$	$y'=au'$
۵	$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
۶	$y=ax^n$	$y'=anx^{n-1}$
۷	$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$
۸	$y=au^n$	$y'=anu'u^{n-1}$
۹	$y=u+v$	$y'=u'+v'$
۱۰	$y=u.v$	$y'=u'v+uv'$
۱۱	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
۱۲	$y=\|u\|$	$y'=\frac{u'u}{\|u\|}$
۱۳	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
۱۴	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

	توابع	مشتق
۱۵	$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
۱۶	$y=\sqrt[n]{u^m}$	$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$
۱۷	$y=a^x$	$y'=a^x \ln a$
۱۸	$y=a^u$	$y'=u'a^u \ln a$
۱۹	$y=e^x$	$y'=e^x$
۲۰	$y=e^u$	$y'=u'e^u$
۲۱	$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
۲۲	$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'}{u\ln a}$
۲۳	$y=\ln\|x\|$	$y'=\frac{1}{x}$
۲۴	$y=\ln u$	$y'=\frac{u'}{u}$
۲۵	$y=\sin(ax)$	$y'=a\cos(ax)$
۲۶	$y=\sin(u)$	$y'=u'\cos(u)$
۲۷	$y=\sin^n(u)$	$y'=nu'\cos(u)\sin(u)^{n-1}$
۲۸	$y=\cos(ax)$	$y'=-a\sin(ax)$

توابع	مشتق
۲۹ $y=\cos(u)$	$y'=-u'\sin(u)$
۳۰ $y=\cos^n(u)$	$y'=nu'\sin(u)\cos(u)^{n-1}$
۳۱ $y=\tan(ax)$	$y'=a(1+\tan^2 ax)$
۳۲ $y=\tan(u)$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$
۳۳ $y=\tan^n(u)$	$y'=nu'(1+\tan^2 u)(\tan u)^{n-1}$
۳۴ $y=\cot(ax)$	$y'=-a(1+\cot^2 ax)$
۳۵ $y=\cot(u)$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$
۳۶ $y=\cot^n(u)$	$y'=-nu'(1+\cot^2 u)(\cot u)^{n-1}$
۳۷ $y=\arcsin(u)$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۳۸ $y=\arccos(u)$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۳۹ $y=\arctan(u)$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
۴۰ $y=\mathrm{arccot}(u)$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$
۴۱ $y=\sinh(x)$	$y'=u'\cosh(u)$
۴۲ $y=\cosh(x)$	$y'=u'\sinh(u)$

توابع	مشتق
۴۳ $y=\tanh(x)$	$y'=u'\,\mathrm{sech}^2(u)$
۴۴ $y=\coth(x)$	$y'=u'\,\mathrm{csch}^2(u)$
۴۵ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

حد و پیوستگی

فرض کنید تابع F روی بازه‌ی I به جز احتمالاً در نقطه a تعریف باشد $(a \in I)$ می‌گوییم حد تابع $F(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر با L است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ به طوری که } 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

مثال: به کمک تعریف حد، حد زیر را تحقیق کنید

$$\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 , \ 0 < |x-a| < \delta \to |2x+1-3| < \varepsilon$$

$$|2x-2| < \varepsilon \to |2(x-1)| < \varepsilon \to |2||x-1| < \varepsilon \to |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 , \ 0 < |x-a| < \delta \to |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$|x-2||x+2| < \varepsilon \to |x-2| < 1 \to -1 < x-2 < +1$$

$$+3 < x+2 < 5$$

$$3 < |x+2| < 5$$

$$\to |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \to \boxed{\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}} \qquad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$$

مثال) اگر به ازای هر δ که $|x-1| < \delta$ آنگاه $\left|\frac{2x^2+x}{x} - 3\right| < \frac{1}{5}$ در این صورت مقدار δ را بیابید

فاکتور $x(2x-2)$ ، فاکتور $2(x-1)$

$$\left|\frac{2x^2+x-3x}{x}\right| < \frac{1}{5} \to \left|\frac{2x^2-2x}{x}\right| < \frac{1}{5} \to |2x-2| < \frac{1}{5} \to |x-1| < \frac{1}{10} \to \delta = \frac{1}{10}$$

قضیه:

اگر m و n دو عدد ثابت باشند آنگاه

$$\lim_{x\to a}(mx+n)=ma+n$$

قضیه:

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و حد تابع $\lim_{x\to a} g(x)=M$ آنگاه

$$\lim\left(g(x) \begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix} f(x)\right)=M \begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix} L$$

در حالت تقسیم دقت کنید $L\neq 0$ باشد

قضیه:

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ مشروط بر آن که n زوج و بایستی بزرگتر از صفر ($L>0$) باشد

یادآوری:

وقتی که $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \iff \lim_{x\to a^+} f(x)=L$ حد راست

$$0<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

وقتی که $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \iff \lim_{x\to a^-} f(x)=L$ حد چپ

$$a-\delta<x<0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

قضیه فشردگی:

اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی نقطه a تعریف شده باشند و داشته باشیم $g(x)<h(x)<f(x)$

و هم چنین $\lim_{x\to a} g(x)=L=\lim_{x\to a} f(x)$ در نتیجه $\lim_{x\to a} h(x)=L$ است

مثال ۱)

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=?$$

میدانیم $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1 \xrightarrow{\times x^2} -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} x^2=0\\ \lim_{x\to 0} -x^2=0\end{array}\right\} \longrightarrow \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

(2) $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = ?$ $\qquad \frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] < \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}(1-x) < \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] < \lim_{x\to 0}(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}(1-x)=1\\ \lim_{x\to 0}1=1\end{array}\right\} \longrightarrow \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

تعریف:

تابع f را بر مجموعه A کراندار گوییم هرگاه بر این مجموعه تعریف شده باشد و $M>0$ ای موجود باشد که
$|f(x)|\leq M \ , \ x\in A$

به صورت کلی تابع f را کراندار گوییم هرگاه بر دامنه خودش کراندار باشد.

مثال)

$\sin x$ و $\cos x$ توابع کراندار

x^2 تابع کراندار نیست

قضیه کرانداری: اگر f و g در همسایگی a تعریف شده باشند جز احتمالاً نقطه a و تابع f کراندار باشد و هم چنین $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$$

مثال) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = ?$

$$\left.\begin{array}{l}-1<\sin\frac{1}{x}<1\\ \lim_{x\to 0} x=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

حدهای نامتناهی

اگر تابع f در همسایگی نقطه a جز احتمالاً خود a تعریف شده باشد

وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

حد در بی نهایت:

فرض کنید که تابع F برای $a\in R$ در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)=L$

به این معنا که مقادیر $F(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به L نزدیک کرد به شرط آن که مقادیر x به اندازه کافی بزرگ باشد

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ وقتی که } x>M \Longrightarrow |F(x)-L|<\varepsilon \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} F(x)=L$$

* برای محاسبه حد توابع کسری در بی نهایت حالات زیر اتفاق می افتد

۱- درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد حد صفر است

۲- اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد حد بی نهایت است

۳- اگر درجه صورت و مخرج مساوی باشد

$$\lim_{x\to a}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots}=\frac{a}{a'}$$

قضیه:

اگر n عدد طبیعی باشد ثابت کنید

(1) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

(2) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & n \text{ زوج}\\ -\infty & n \text{ فرد}\end{cases}$$

مثال) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-\sqrt{5x+4}}{3x^2+mx+2}=n\neq 0$ مقادیر m و n را بیابید

برای این که جواب حد مخالف صفر باشد مخرج باید صفر باشد یعنی $\frac{0}{0}$ باشد $\frac{0}{m+5}=n\neq 0 \rightarrow \boxed{m=-5}$ از ارز معادل جایگزین می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2-\sqrt{5x+4})}{3x^2-5x+2}\times\frac{(x+2+\sqrt{5x+4})}{(x+2+\sqrt{5x+4})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)^2-5x+4}{(3x^2-5x+2)(x+2+\sqrt{5x+4})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(3x^2-5x+2)(x+2+\sqrt{5x+4})}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(3x-2)(x+2+\sqrt{5x+4})}=\frac{1}{6}\rightarrow\boxed{n=\frac{1}{6}}$$

مثال ۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2-x}$ مقادیر a و b را بیابید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2-x} \underset{\text{صفر را جایگذاری می‌کنیم}}{=} \frac{\sqrt{b}-3}{0} \to \sqrt{b}-3=0 \to \boxed{b=9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{x^2-x}\times\frac{\sqrt{ax+9}+3}{\sqrt{ax+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+9-9}{x(x-1)(\sqrt{ax+9}+3)}=\frac{a}{-6}=2\to\boxed{a=-12}$$

روش های محاسبه حد

۱ روش استفاده از هم ارزی

تعریف هم ارزی: دو تابع f و g را هم ارز بودند هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \leftarrow f\simeq g$

* در $f(x)$ و $g(x)$ باید دقت کردن u به چه عددی میل می‌کند و در هنگام استفاده از هم ارزی عبارات کامل باهم ساده نشوند.

1) $\sin mx \simeq mx \quad (x\to 0)$

2) $\sin u \simeq u \quad (u\to 0)$

3) $\sin u \simeq u-\frac{u^3}{6} \quad (u\to 0)$

4) $\cos u \simeq 1-\frac{u^2}{2} \quad (u\to 0)$

5) $\cos^n u \simeq 1-\frac{nu^2}{2} \quad (u\to 0)$

6) $\tan u \simeq u \quad (u\to 0)$

7) $\tan u \simeq u+\frac{u^3}{3} \quad (u\to 0)$

8) $\sin^n u \simeq \tan^n u \simeq (\arcsin u)^n = (\arctan u)^n \simeq u^n$

لوگاریتم در مبنای e

9) $\ln(1+u)\simeq u \quad (u\to 0)$ *

مثال) $\ln(1+2x^2)=2x^2 \quad (x\to 0)$

10) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots = a_nx^n \quad (x\to\infty)$

11) $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots} = \begin{cases}\lim \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) & \text{فرد } n\\ \lim \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| & \text{زوج } n\end{cases} \quad (x\to\pm\infty)$

12) $(1+x)^p \simeq 1+px \quad (x\to 0)$ (p عدد گویا مثبت)

13) $\sqrt[n]{1+x} \simeq 1+\frac{1}{n}x \quad (x\to 0)$ (n عدد طبیعی)

مثال) $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\tan\frac{\pi x}{8}$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{8}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{8}\right)}=\lim_{\substack{x\to 4\\ \text{هم‌ارزی}}}\frac{x-4}{\sqrt{x}+2\ \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)\frac{\pi}{2}\left(\frac{4-x}{4}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{}{(\sqrt{x}+2)\frac{\pi}{2}(1/4)}=-\frac{2}{\pi}$$

مثال) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln(\cos(2x^2-x))}$ را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\ln\left(1-\frac{1}{2}(2x^2-x)^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}(2x^2-x)^2}=\lim\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}(4x^4-4x^3+x^2)}$$

$$=\lim\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}x^2(4x^2-4x+1)}=-6$$

قاعده هوپیتال

اگر f و g در a مشتق پذیر باشند و $g'(a)\neq 0$ باشد و هم‌چنین حد f و g صفر یا بی‌نهایت شوند آنگاه

$\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$

$0\times\infty\to\frac{0}{1/\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال)

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)}{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$\frac{1}{x}=t\to t\to 0^+$ $$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+2}\right)}{e^t-e^{t^2}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1+t^2}{1+2t^2}\right)}{e^t-e^{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t^2)-\ln(1+2t^2)}{e^t-e^{t^2}}\xrightarrow{HOP}\lim\frac{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{4t}{1+2t^2}}{e^t-2te^{t^2}}=0$$

$$(a^u)' = u' \ln(a)\, a^u \quad *$$

$$A = a^u \to \ln A = u \ln a$$

$$\frac{A'}{A} = u'(\ln a) \to A' = a^u u' \ln a$$

رفع ابهام صور توانی

$1^\infty / 0^\infty / \infty^0 / 0^0$

اگر داشته باشیم $\lim_{x\to a} u^v = ?$ با فرض $A = u^v$ را محاسبه کنید

$\ln a = b \to a = e^b$

$$A = u^v \to \ln A = v \ln u$$

$$\lim_{x\to a} \ln A = \lim_{x\to a} v \ln u$$

$\lim u^v = v \ln u$

مثال) حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\cot \pi x} = ? \qquad 1^\infty$$

$$A = u^v = (1+\sin\pi x)^{\cot \pi x} \to \ln A = \cot\pi x \ln(1+\sin\pi x)$$

$$\to \lim_{x\to 1} \cot \pi x \ln(1+\sin\pi x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\sin\pi x)}{\tan \pi x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim \frac{\frac{\pi\cos\pi x}{1+\sin\pi x}}{\pi(1+\tan^2\pi x)} = \frac{-\pi}{\frac{1}{\pi}} = -1 \to \lim_{x\to a} A = e^{-1}$$

پیوستگی

تعریف: گوییم تابع F در $x=a$ پیوسته است اگر

۱) مقدار تابع F در نقطه مورد نظر موجود باشد

۲) تابع F در نقطه $x=a$ حد داشته باشد و ∞ نشود

$$\lim_{x\to a^-} F(x) = \lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$$

۳) حد و مقدار تابع با هم برابر باشند

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ وقتی $|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(a)|<\varepsilon$

قضیه: اگر F و g دو تابع پیوسته در a باشند آنگاه $g \pm F$ ، $F \times g$ پیوسته و $\frac{F}{g}$ پیوسته می‌باشند به شرطی که $g(a) \neq 0$

* توابع مثلثاتی / معکوس مثلثاتی / $\log_a^x$ / $y=a^u$ / $y=\sqrt[n]{x}$ (n زوج و فرد) در دامنه تعریفشان پیوسته هستند

مثال)

مقدار A و B را طوری بیابید که $g(x)$ پیوسته باشد

$$g(x)=\begin{cases}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}+A & x<0\\ B & x=0\\ \dfrac{2\tan x\,(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1} & x>0\end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}+A = 1^{\infty}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} A=(1+\operatorname{Arctan} x)^{\frac{1}{x}}$

$\to \ln A=\frac{1}{x}(1+\operatorname{Arctan} x) \to \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+\arctan x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ \text{هم ارزی}}}\dfrac{\arctan x}{x}=\dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1 \to \lim\limits_{x\to 0^-} A = e^1$

$\ln(1+u)\simeq u$
$u\to 0$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\times\dfrac{(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} =\lim \dfrac{2x\left(\frac{x^2}{2}\right)\times\sqrt{x^2+x+1}+1}{x^2+x+\cancel{1}\cancel{-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\cancel{x}\left(\frac{x^2}{2}\right)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{\cancel{x}(x+1)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\to e+A+B=0 \quad \begin{cases}B=0\\ A=-e\end{cases}$

قضیه مقدار میانی

فرض کنید تابع $F(x)$ در بازه $[a\ b]$ پیوسته باشد و $\begin{cases} F(a) \neq F(b) \\ F(a) < F(b) \end{cases}$ و $F(a) < k < F(b)$

آنگاه حداقل یک c در بازه $(a\ b)$ وجود دارد به طوریکه $F(c) = k$

قضیه بولزانو

اگر تابع $F(x)$ در بازه $[a\ b]$ پیوسته باشد و $F(a) > 0$ و $F(b) < 0$ باشد آنگاه حداقل یک c در بازه $(a\ b)$ وجود دارد (یعنی حداقل تابع یک ریشه دارد) $F(c) = 0$

$$F(a)F(b) < 0 \rightarrow c \in (a, b) \Rightarrow F(c) = 0$$

مثال) ثابت کنید $\underbrace{\sin x - x^2 + x + 1}_{g(x)} = 0$ دست کم دو ریشه در بازه $[-\pi\ \ \pi]$ دارد

x	$-\pi$	0	π
$g(x)$	$-\pi^2 - \pi + 1$	1	$-\pi^2 + \pi + 1$

$F(-\pi)F(0) < 0$ حداقل یک ریشه در $(-\pi, 0)$ دارد

$F(0)(\pi) < 0$ حداقل یک ریشه در $(\pi, 0)$ دارد

مثال) نشان دهید $F(x) = x^7 + 3x - 4$ عدد c وجود دارد به طوری که $F(c) + c^7 = 0$

$$g(x) = F(x) + x^7 = x^7 + 3x - 4 + x^7 = 2x^7 + 3x - 4$$

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = -4 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow g(0)g(1) < 0$$

پس حداقل در بازه $(0, 1)$ یک ریشه دارد

قضیه: هر تابع درجه فرد حداقل یک ریشه دارد

$F(x) = ax^n + c$ ~~[illegible]~~ (n فرد)

مثال) $F(x) = x^n + x + c$ (n فرد)

$$\lim_{x_1 \to \infty} F(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$$

$F(x_1)F(x_2) < 0$ پس حداقل یک ریشه دارد

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید

1) $\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(\overset{u}{1+\frac{x}{2}}\right)-\ln\left(\overset{v}{\frac{x}{2}}\right)\right)$

$\ln u - \ln v = \ln\frac{u}{v} \to \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2+x}{x}\right) = 0\times\infty$ مبهم

$\ln(1+u)\simeq u$

$\to \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$; $\frac{1}{x}=t \to x=\frac{1}{t}$; $x\to\infty$; $t\to 0^+$ $\to \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+2t)}{t} = \frac{2t}{t} = 2$

2) $\lim_{x\to 0^+}(\ln\cot x)^{\tan x} = ?$

تبدیل $0\times\infty$; $\frac{\tan x}{\frac{1}{\ln(\ln\cot x)}}$

$(\ln\cot x)^{\tan x} = A \to \ln A = \tan x(\ln\cot x) \to \lim_{x\to 0^+}\tan x\ln(\ln\cot x)$

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\ln\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\infty}{\infty} \to \lim\frac{\frac{-(1+\cot^2 x)}{\cot x}}{\frac{\ln\cot x}{-(1+\cot^2 x)}} = 0 \to \lim A = e^0 = 1$

$\frac{1}{\tan x} = \cot x$; $\ln(\cot x) = \frac{u'}{u}$

3) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = 0^{\infty}$ مبهم $\to A = (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \xrightarrow{\ln} \ln(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \ln A$

$\lim\frac{1}{\ln x}\ln(\sin x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\sin x} = 1$

$\lim A = e^1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)} = ? \quad \frac{0}{0}$ هوپیتال $\times$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\lim_{x\to 0}\frac{-\overset{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\times\left(-\overset{0}{\sin x}\,\frac{\pi}{2}\right)}{\underset{1}{\cos(\sin x)}\times\underset{1}{\cos x}} = \frac{0}{1} = 0$

(د) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} \quad a > 0$

$a^x - 1 = t \to \begin{cases} x \to 0 \\ t \to 0^+ \end{cases} \Bigg\} \to \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t}{\log_a^{t+1}} = \dfrac{0}{0} \to \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}$

$a^x - 1 = t \to a^x = t+1 \to x = \log_a^{t+1}$

$= \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t \ln a}{\ln(t+1)} = \ln a \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cancel{t}}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \ln a$

نکته: * $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \;,\; \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

تمرین: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = ? \quad (p > 0)$

تا سؤال آخر تمرین صفحه ۷۲

if $\alpha = 0 \to \lim \dfrac{1}{(1+p)^n} = 0$

if $\alpha < 0 \to \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^{-\alpha}(1+p)^n} = 0 \quad (\alpha < 0 \to -\alpha > 0)$

if $\alpha > 0 \to \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HoP}} \dfrac{\alpha}{\ln(1+p)} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{\alpha-1}}{(1+p)^n} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HoP}} \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\ln^2(1+p)} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{\alpha-2}}{(1+p)^n}$

$= \dfrac{\infty}{\infty} \to \cdots \to \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{\ln^k(1+p)} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{\alpha-k}}{(1+p)^n}$

تمرین: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} \times \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \cdots \times \dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \times \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \cdots \times \dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} \cdots \dfrac{1}{1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n!}$

فصل ۳ مشتق

مشتق تابع F تابعی است بنام F' که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$ (در هر نقطه مانند x از دامنه F)

مثال) مشتق تابع $F(x)=\sqrt{x}$ را در هر نقطه دلخواه مانند x از دامنه بیابید

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \lim \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\cancel{\Delta x}} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتق در یک نقطه مانند a

$$F'(a) = \lim_{\Delta x \to a} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

مثال) مشتق تابع $F(x)=\sin x$ را با استفاده از تعریف بدست آورید

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0 \quad = \boxed{\cos x}$$

مثال) مشتق تابع $F(x)=|x-2|$ را در نقطه $x=2$ بدست آورید

$$F(a) = F(2) = |2-2| = 0$$

$$F'(x) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = \lim_{x \to 2} \frac{|x-2| - 0}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1, \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$$

تعریف: تابع $F(x)$ در نقطه a مشتق‌پذیر است هرگاه در نقطه مذکور مشتق وجود داشته باشد

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \quad . \quad (F'(a)^+ = F'(a)^-)$$

$$f(g(x)) = \lim \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{g(x) - g(a)}$$

* تابع F را مشتق پذیر گوییم هرگاه در تمام نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد

مثال)

فرض کنید $F'(4) = 3$ ، $g'(4) = 7$ ، $g(x) \neq 4$ به ازای $x \neq 4$ و $g(4) = 4$ بیابید

الف) $\lim_{x\to 4} \frac{F(x) - F(4)}{g(x) - g(4)} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{F(x)-F(4)}{x-4}}{\frac{g(x)-g(4)}{x-4}} = \frac{F'(4)}{g'(4)} = \frac{3}{7}$

ب) $\lim_{x\to 4} \frac{F(g(x)) - F(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{F(g(x)) - F(g(4))}{x-4}$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{F(g(x)) - F(g(4))}{x-4} \times \frac{g(x)-g(4)}{g(x)-g(4)} = \lim_{x\to 4} \frac{F(g(x)) - F(g(4))}{g(x)-g(4)} \times \frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

$$= F'(g(4)) \times g'(4) = 3 \times 7 = 21$$

$$(Fog)' = F(g(x))' = g'(x)\, F'(g(x))$$ *

$$(goF)' = (g(F(x)))' = F'(x)\, g'(F(x))$$

تمرین ۵)

فرض کنید $g(x)$ مشتق پذیر باشد و $g(x+y) = e^{x} g(x) + e^{x} g(y)$

$g(2x)$ و $g(3x)$ و ...... و $g(nx)$ را بیابید

الف) $y = x \longrightarrow g(x+x) = e^{x} \cdot g(x) + e^{x} \cdot g(x) \longrightarrow g(2x) = \boxed{2e^{x} \cdot g(x)}$

$g(3x) = g(x + 2x) = e^{2x} \cdot g(x) + e^{x} \cdot g(2x) \longrightarrow$ $g(2x) = 2e^{x} \cdot g(x)$

$$g(3x) = e^{2x} \cdot g(x) + e^{x} \cdot (2e^{x} \cdot g(x)) \longrightarrow \boxed{3e^{2x} \cdot g(x)}$$

قضیه

اگر تابع $F(x)$ در نقطه a مشتق پذیر باشد آن گاه در a حتماً پیوسته است
یعنی اگر $F(x)$ در a پیوسته باشد مشتق پذیر نیست
شرط لازم مشتق پذیری پیوستگی است

قضیه

ثابت کنید مشتق تابع $F(x) = C$ برابر صفر است

قضیه

ثابت کنید مشتق تابع $F(x)=x^n$ برابر $D_x^F = nx^{n-1}$ می باشد

قضیه

اگر دو تابع F و g مشتق پذیر باشند

1. $(F \pm g)' = F' \mp g'$
2. $(F \cdot g)' = F'g + g'F$
3. $\left(\dfrac{g}{F}\right)' = \dfrac{g'F - F'g}{F^2}$

$۲ - ۲\cos x = ۴\sin^۲(\frac{x}{۲})$

$\sec = \frac{1}{\cos x}$

$\csc = \frac{1}{\sin}$

Subject

Year Month Date ( )

توابع هایپربولیک

* $\ln x = \log_e x$ * $\ln e = 1$ * $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$

* $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$ * $\ln(1) = ۰$ * $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$

* $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$ * $\ln x^n = n \ln x$ * $\boxed{x = e^{\ln x}}$

* $\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x) = 1$ * $(\sinh x)' = \cosh x$ * $(\cosh x)' = \sinh x$

* $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ * $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

مثال)

$e^z = -۲$

$z = |r|(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$|r| = ۲(\cos\pi + i\sin\pi) = ۲e^{i\pi} \to e^z = ۲e^{i\pi} \to \ln e^z = \ln(۲e^{i\pi})$

$z = \ln ۲ + \underbrace{\ln e^{i\pi}}_{i\pi} \to x + iy = \ln ۲ + i\pi \quad \begin{cases} x = \ln ۲ \\ y = \pi \end{cases}$

$(i)^i = (e^{(i\pi/۲)})^i = e^{i^۲\pi/۲} = e^{-\pi/۲}$ $\boxed{i = 1(\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲}) = e^{i\frac{\pi}{۲}}}$

$(۳\pi)^i = (e^{\ln ۳\pi})^i =$

ARMAN

$$\lim_{x\to 1} x^{\tan\frac{\pi}{2}x} = ?\; A \to \ln A = \ln x^{\tan\frac{\pi}{2}x} \to \lim_{x\to 1} \ln A = \lim_{x\to 1} \ln x^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$= \tan\tfrac{\pi}{2}x \lim \ln x = 0\times\infty \to \lim \frac{\ln x}{\cot\frac{\pi}{2}x} = \frac{0}{0} \to \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\pi}{2}\left(1+\cot^2\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{-2}{\pi} \to e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x+1)}{xe^x - e^x} = \frac{0}{0}\quad \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{e^x+xe^x-e^x} = \frac{3}{e}$$

قضیه ترکیب:

اگر تابع g در c مشتق پذیر باشد و تابع F در در نقطه ی g(c) مشتق پذیر باشد آنگاه Fog در c مشتق پذیر است و داریم:

$$(F\circ g)'(c) = g'(c)\, F'(g(c))$$
$$(g\circ F)'(c) = F'(c)\, g'(F(c))$$

مثال)

اگر F و g دو تابع باشند بطوریکه $F'(x)=\frac{1}{x}$ و $F(g(x))=x$ آنگاه در صورتی که g مشتق پذیر باشد ثابت کنید $g'=g$

① $g'(x)\, F'(g(x)) = 1$

$g'(x) \times \frac{1}{g'(x)} = 1$

② $F'(x) = \frac{1}{x} \to F'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$

① $\to F'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \Rightarrow \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{g(x)} \to g'(x) = g(x)$

② $\to F'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$

مشتق پارامتری (زنجیری):

اگر $\begin{cases} x = F(t) \\ y = F(t) \end{cases}$ برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\text{از y نسبت به t مشتق}}{\text{از x نسبت به t مشتق}} = A$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

مثال) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ مطلوب است محاسبه $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cancel{\cos t} + t\sin t - \cancel{\cos t})}{a(\cancel{-\sin t} + \cancel{\sin t} + t\cos t)} = \frac{\cancel{a}t\sin t}{\cancel{a}t\cos t} = \boxed{\tan t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(\tan t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\tan^2 t}{at\cos t} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{at\cos t} = \boxed{\frac{1}{at\cos^3 t}}$$

$\frac{d^3y}{dx^3} = ?$ (امتحان کنید) X

مشتق تابع معکوس:

فرض کنید F تابعی مشتق‌پذیر باشد و F^{-1} معکوس F باشد

اگر $(a,b)\in F$ باشد و $F'(a)\neq 0$ همواره داریم:

$$(F^{-1}(b))' = \frac{1}{F'(a)}$$

مثال)

تابع معادله $F(x)=x^2-4x+7$ با دامنه $[2,\infty)$ مطلوب است محاسبه

$(F^{-1}(7))' = ?$

$$x^2-4x+7=7 \to x^2-4x=0 \begin{cases} x=0 & \text{(در دامنه نیست)} \\ \boxed{x=4} \end{cases}$$

$(4,7)\in F$

$(7,4)\in F^{-1}$

$$F'(x) = 2x-4 \to F'(4) = 4 \to (F^{-1}(7))' = \frac{1}{4}$$

مشتق توابع ضمنی:

۱- توابع صریح: $y=F(x)$ رابطه y و x رابطه معلوم باشد

۲- توابع ضمنی: اگر نتوان رابطه‌ی صریحی بین y و x پیدا کرد $F(x,y)=0$

برای محاسبه توابع ضمنی همه عبارات را یک طرف می‌بریم یعنی $F(x,y)=0$

$$\rightarrow y'(x) = -\frac{F'(x)}{F'y}$$

مثال) مشتق عبارات زیر را محاسبه کنید

الف) $2x+3y=1 \qquad 2x+3y-1=0 \rightarrow y'(x) = -\frac{2}{3}$

روش دوم: $2+3y'=0 \rightarrow y' = -\frac{2}{3}$

ب) $x^2+2y=1$

$$y'(x) = -\frac{2x}{2} = -x$$

روش دوم: $2x+2y'=0 \rightarrow y'(x) = -x$

ج) $x^5y^4+x^4y^3+x^3y^2+xy+1=0$

$5x^4y^4+4y^3y'x^5+4x^3y^3+3y^2y'x^4+3x^2y^2+2yy'x^3+y+xy'=0$

جواب آخر؟

مثال) $x^3-xy+y^3=1$ مقدار $y'(1)$ را محاسبه کنید

$$y'(x) = \frac{-F'_x}{F'_y} = \frac{3x^2-y}{-x+3y^2}$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=? \end{cases} \rightarrow \cancel{1}-y+y^3=\cancel{1} \rightarrow y^3-y=0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} y(y^2-1)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ y=-1 \end{cases} \quad (1,0)(1,1)(1,-1)$

$$y'(1) = \begin{cases} (1,0) \rightarrow y'(1)=3 \\ (1,1) \rightarrow y'(1)=-1 \\ (1,-1) \rightarrow y'(1)=-2 \end{cases}$$

$$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

تمرین: مطلوب است محاسبه $\frac{dy}{dx}$ درصورتیکه $x^y - y^x + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \cos(xy)$

$$F(x,y) = x^y - y^x + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \cos(xy) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{y x^{y-1} - y^x \ln y - \frac{y}{x^2+y^2} + y\sin xy}{x^y \ln x - x y^{x-1} + \frac{x}{x^2+y^2} + x\sin xy}$$

مشتق تابع توانی:

فرض کنید $y = u(x)^{v(x)}$ برای محاسبه $y'(x)$ باید مراحل زیر طی شود

۱) $\ln y = \ln\left(u(x)\right)^{v(x)} \to \ln(y) = v(x)\ln u(x)$

۲) $\frac{y'}{y} = v'(x)\ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x)$ مشتق از طرفین

$$\boxed{y' = \left(v'(x)\ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x)\right) u(x)^{v(x)}}$$

مثال) اگر $y = x^x$ آنگاه $y'(x)$ را محاسبه کنید

$$\ln y = \ln x^x \to \ln y = x\ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}x$$

$$\to y' = (\ln x + 1)y = (\ln x + 1)x^x$$

تمرین: مشتق عبارت $y = x^{x^{x^2}}$ را حساب کنید

$$y' = x^x\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$$

$\sqrt[n]{u^a} \to u^{\frac{a}{n}}$ توجه در فرمول

Subject
Year Month Date ( )

* نکته: برای محاسبه مشتق توابع کسری می‌توان از خواص Ln استفاده کرد

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a.b = \ln a + \ln b$$

$$\ln a^b = b\ln a$$

مثال) مشتق عبارت زیر را محاسبه کنید

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$-\left(\ln\sqrt[3]{(x+2)^2} + \ln\sqrt{(x+3)^3}\right)$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}\right)\ \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{x-1} - \ln\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}\right)\right)$$

$$(x-1)^{\frac{1}{2}} \qquad (x+2)^{\frac{2}{3}} \qquad (x+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\ln y = \ln\sqrt[2]{x-1} - \ln\sqrt[3]{(x+2)^2} - \ln\sqrt[2]{(x+3)^3}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+2)$$

$$\frac{y'}{y} = \underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\ \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{x+3}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right) \to y' = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right)$$

کاربرد مشتق

ماکزیمم و مینیمم نسبی:

به ماکزیمم و مینیمم نسبی اکسترمم نسبی هم می‌گوییم

اگر نقطه‌ای مانند c وجود داشته باشد برای تابع $F(x)$ و بازه‌ای مانند I در اطراف c تعریف شده باشد آن‌گاه داریم:

ماکزیمم نسبی $F(c) \geq F(x)$ در بازه $I = (c-\delta, c+\delta)$

مینیمم نسبی $F(c) \leq F(x)$ در بازه $I = (c-\delta, c+\delta)$

قضیه: اگر نقطه c اکسترمم نسبی باشد و $F'(c)$ باشد آن گاه $F'(c)=0$

مشتقات درجات بالاتر:

$$y' = F'(x)$$
$$y'' = F''(x)$$
$$y''' = F'''(x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = F^{(n)}(x)$$

مثال) مشتق درجه n تابع $y=\sin x$ را بدست آورید

$$F'(x)=\cos x \rightarrow F''(x) = -\sin x \rightarrow F'''(x) = -\cos x \rightarrow F^{(4)}(x) = \sin x$$

$$F^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\sin x = \sin(x + \pi)$$
$$-\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

نقاط بحرانی:

مجموعه نقاطی که مشتق در آن ها صفر یا موجود نباشد

$C=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

* اکسترمم های نسبی در نقاط بحرانی اتفاق می افتد

روش های بدست آوردن اکسترمم های نسبی

① تعریف: $y=|x|$ نقطه $c=0$ می نیمم نسبی

$x \in [1, -1] \rightarrow F(x) \geq F(0)$

② استفاده از مشتق اول: مشتق تابع F را بدست می آوریم و $(F'(x)=0)$ و تعیین علامت می کنیم

x		x_0	
$F'(x)$	$-$	0	$+$

x_0 می نیمم نسبی

$F'(x)>0$ تابع صعودی

$F'(x)<0$ تابع نزولی

x		x_0	
$F'(x)$	$+$	0	$-$

x_0 ماکزیمم نسبی

* پیوستگی بررسی می‌کنیم (در بازه داده شده)

مجموعه نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم $\begin{cases} F'(x)=0 \\ F'(x) \text{ موجود باشد} \end{cases}$

مثال) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $F(x)=\begin{cases} 5x-1 & x<3 \\ x^2+5 & x\geq 3 \end{cases}$ در صورت وجود در بازه $[2,5]$ تعیین کنید

مرحله ۱) پیوستگی در ۳ بررسی می‌شود $F(3)=14$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x) = 14 = \lim_{x\to 3^-} F(x)$$

مرحله ۲) $x=0$ ، $2x=0$ ، $F'(x)=0 \rightarrow$ $F'(x)=\begin{cases} 5 & x<3 \\ 2x & x\geq 3 \end{cases}$ غ ق ق (در دامنه نیست)

مرحله ۳) $F'(3)^+ = 6$ ، $F'(3)^- = 5$ $\neq \rightarrow x=3$ نقطه بحرانی

مرحله ۴)

x	۲	۳	۵
$F(x)$	۹	۱۴	۳۰

نقطه min $(2,9)$ ، $\min = 9$

نقطه max $(5,30)$ ، $\max = 30$

مثال) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $F(x)=\begin{cases} 4-(x+5)^2 & x\leq -4 \\ 12-(x+1)^2 & x>-4 \end{cases}$ در بازه $[-6,0]$ بدست آورید

مرحله ۱) پیوستگی $[-6,0]$ $F(-4)=3$

$$\lim_{x\to -4^+} F(x) = 3 = \lim_{x\to -4^-} F(x)$$

مرحله ۲) $F'(x)=\begin{cases} -2(x+5) & x\leq -4 \\ -2(x+1) & x>-4 \end{cases}$

مرحله ۳) نقاط بحرانی $F'(x)=0 \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow F'(-4)^- = -2 \neq F'(-4)^+ = 6$

$C=\{-5,-4,-1\}$

مرحله ۴)

	-6	-5	-4	-1	0
	۳	۴	۳	۱۲	۱۱

$\max = 12$

$\min = 3$

نقطه max $(-1,12)$

نقطه min $(-4,3),(-6,3)$

معادله خط مماس و قائم:

برای به دست آوردن شیب خط مماس در نقطه a مشتق تابع را محاسبه کرده و $F'(a)$ شیب خط مماس در نظر گرفته می‌شود

$$\text{شیب خط مماس} = F'(a)$$

$$\text{شیب خط قائم} = \frac{1}{F'(a)}$$

پس اگر نقطه $(a,b) \in F$ باشد آن گاه معادله خط مماس و قائم به صورت زیر است

$$\text{خط مماس}: y-b = F'(a)(x-a)$$

$$\text{خط قائم}: y-b = \frac{1}{F(a)}(x-a)$$

مثال) معادله خط مماس بر نمودار F^{-1} در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن را به دست آورید در صورتی که $F(x)=2x^3+x+1$

$(4,a) \in F^{-1} \rightarrow (a,4) \in F$

$2a^3+a+1=4 \rightarrow a=1 \quad (1,4) \in F$

$F'(x)=6x^2+1 \rightarrow F'(1)=7 \quad \frac{\text{شیب خط مماس}}{F^{-1}\text{ بر}} = \frac{1}{7} \quad (F^{-1}(b))' = \frac{1}{F'(a)}$

$\begin{cases} m=\frac{1}{7} \\ (4,1) \end{cases} \longrightarrow y-1 = \frac{1}{7}(x-4)$

تعیین نقاط تقعر و نقطه عطف:

۱) $F''(x)>0$ $\cup$

۲) $F''(x)<0$ $\cap$

۳) $F''(x)=0$ و $F''(x)$ موجود باشد (نقطه عطف)

قضیه رول:

اگر تابع $F(x)$ دارای سه شرط زیر باشد

الف) تابع $F(x)$ در $[a \;\; b]$ پیوسته باشد

ب) تابع $F(x)$ در $(a \;\; b)$ مشتق‌پذیر باشد

ج) $F(a)=F(b)$ باشد

آن گاه نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $F'(c)=0$

قضیه مقدار میانگین:

اگر تابع $f(x)$ دارای سه شرط زیر باشد:

الف) تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد

ب) تابع f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد

ج) $f(a) \neq f(b)$

آنگاه c ای وجود دارد طوری که

$$\exists c,\ c \in (a, b) \rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تمرین: اگر مشتق f روی بازه I موجود داشته باشد و $f'(x) > 0$ با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید f روی این بازه صعودی اکید است

قضیه کوشی:

اگر تابع f و g دارای شرایط زیر باشند

1) f و g در بازه $[a, b]$ پیوسته باشند

2) f و g در بازه (a, b) مشتق پذیر باشند

3) $g'(a) \neq 0$ باشد آنگاه

عددی مانند c وجود دارد به طوری که

$$\exists c \in (a, b),\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

* نکته: اگر $g(x) = x$ قضیه تبدیل به قضیه مقدار میانگین می‌شود

مثال)

شرایط قضیه رول برای تابع $f(x) = x^3 - x$ بررسی کرده و در صورت برقرار بودن مقدار مناسب c را در بازه $[0, 1]$ تعیین کنید ۱) پیوستگی در بازه $[0, 1]$ ✓

۲) مشتق پذیری $(0, 1)$ ✓

۳) $f(0) = 0$, $f(1) = 0 \rightarrow f(a) = f(b)$

$$f'(c) = 0 \rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c \in (0, 1) \rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال) شرایط قضیه میانگین را برای تابع $F(x)=x^{\frac{2}{3}}$ را در بازه [۱و۰] بررسی کنید در صورت برقرار بودن مقدار c را بدست آورید

$F'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

[۱و۰] پیوسته ✓

(۱و۰) مشتق پذیر ✓

$F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \to \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{1-0}{1}$ $\quad F(0)=0,\ F(1)=1 \to F(a)\neq F(b)$

$\to \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=1\to c=\frac{8}{27} \to \exists c\in(0,1)\to c=\frac{8}{27}$

مثال) قضیه کوشی را برای تابع $F(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را در بازه [۰و π] بررسی کنید و مقدار مناسب c را بدست آورید

$\frac{F'(c)}{g'(c)}=\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}$

[۰وπ] پیوسته ✓

(۰وπ) مشتق پذیر

$g'(x)\neq 0$

$\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{\sin\pi-\sin 0}{\cos\pi-\cos 0}$

$\to -\cot c=0 \to \exists c\in(0,\pi)\to c=\frac{\pi}{2}$

مثال) با استفاده از قضیه مقدار میانگین درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leq \tan\alpha-\tan\beta\leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha} \quad (0<\beta\leq\alpha<\frac{\pi}{2})$$

$F(x)=\tan x,\ [\beta,\alpha]$

$\exists c\in(\beta,\alpha)\to F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$

$F'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\to \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta}}$ ①

$\beta<c<\alpha$

$\cos\alpha<\cos c<\cos\beta\to \cos^2\alpha<\cos^2 c<\cos^2\beta \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{1}{\cos^2 c}<\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\xrightarrow{\text{استفاده از رابطه ۱}} \frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta}<\frac{1}{\cos^2\alpha} \xrightarrow{\times(\alpha-\beta)} \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$

اگر $\alpha=\beta$ حالت مساوی هم برقرار می شود

دیفرانسیل

اگر $y=F(x)$ باشد دیفرانسیل تابع فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dy = F'(x)\Delta x$$

اثبات:

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=F'(x)=L$$

$$\Delta y = F(x+\Delta x)-F(x)$$

تعریف حد: $\forall \varepsilon>0 , \exists \delta>0 , 0<|\Delta x-0|<\delta \to \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-F'(x)\right|<\varepsilon$

$$\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \left|\frac{\Delta y - F'(x)\Delta x}{\Delta x}\right|<\varepsilon \to \Delta y - F'(x)\Delta x = 0 \to \boxed{\Delta y = F'(x)\Delta x}$$

بنابراین اگر دیفرانسیل متغیر x را با dx نشان دهیم و $\Delta y = dy$ خواهیم داشت

$$dy = F'(x)\,dx$$
$$dy = F'(x)\Delta x$$

اگر برای تقریب توابع بخواهیم استفاده کنیم می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\Delta y \simeq dy \to F(x+\Delta x)-F(x) \simeq F'(x)\Delta x$$
$$\to F(x+\Delta x) \simeq F'(x)\Delta x + F(x)$$

مثال) اگر $y=x^2+x+1$ آنگاه dy و Δy و $|\Delta y - dy|$ را به دست آورید

$$\Delta y = F(x+\Delta x)-F(x) = \left((x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)+1\right)-(x^2+x+1)$$

=

مثال) مقدار تقریبی $\sqrt{۸۲}$ را تا سه رقم اعشار به کمک دیفرانسیل محاسبه کنید

$$F(x+\Delta x) \simeq F'(x)\,\Delta x + F(x)$$

$$\sqrt{82} = \sqrt{\underbrace{81}_{x}+\underbrace{1}_{\Delta x}}$$

$$F(x)=\sqrt{x} \to F(x+\Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x + F(x)$$

$$F(81+1) = \frac{1}{2\sqrt{81}}(1) + \sqrt{81} = 9 + \frac{1}{18} = 9/055$$

خواص عملگر d (فرمول‌های دیفرانسیل)

1) $d(c)=0$ 2) $d(x^r) = (r\,x^{r-1})\,dx$

3) $d(u+v) = du + dv$ 4) $d(u.v) = du\,v + u\,dv$

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\,v - dv\,u}{v^2}$ 6)

مثال) به کمک دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}$ را به دست آورید

$$x^3+y^3=1 \quad 3x^2dx + 3y^2dy = 0 \to 3x^2dx = -3y^2dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2}$$

نمونه سؤال (کلاس حل تمرین)

مثال) اگر $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{h} = 2\sqrt{x}$ آنگاه $F'(9)$ را به دست آورید

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x)-F(x)}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to 0}\frac{F'(x+h)+F'(x-h)}{1} = F'(x)+F'(x) = 2F'(x)$$

$$2F'(x) = 2\sqrt{x} \to F'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow F'(9) = \sqrt{9} = 3$$

مثال) اگر $F(x)=\begin{cases} x^2+3x & x>1 \\ x^2-3x & x\le 1\end{cases}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h^2)-F(1-2h^2)}{3h^2}$ را به دست آورید.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1)-F(0)}{0}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim\frac{2hF'(1+h^2)+4hF'(1-2h^2)}{6h}$$

$$=\lim\frac{2h\left(F'(1+h^2)+2F'(1-2h^2)\right)}{6h}=\lim_{h\to 0}\frac{F'(1+h^2)+2F'(1-2h^2)}{3}\quad X$$

$$F'(x)=\begin{cases}2x+3 & x\geq 1\\ 2x-3 & x<1\end{cases}\quad =\lim$$

مثال) مشتق عبارت $F(x)=\sqrt{3x+4}$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)+4}-\sqrt{3x+4}}{h}\times\frac{\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{3x+3h+\cancel{4}}{3(x+h)+\cancel{4}}-\overset{-3x-\cancel{4}}{(3x+4)}}{h\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}=\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3(x+h)+4}+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+\cancel{h})+4}+\sqrt{3x+4}}$$

بی نهایت کوچک $\sqrt{3x+4}$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}\longrightarrow\boxed{F'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}$$

$$F(u)=\sqrt{u}\qquad F'(u)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال) مشتق عبارت $F(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(x+h)}{(x+h)^2+1}-\frac{3x}{x^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(x+h)(x^2+1)-3x((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{3x+3h}{3(x+h)(x^2+1)}-3x(\overset{x^2+2hx+h^2}{(x+h)^2}+1)}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3x^3}+\cancel{3x}+3x^2h+3h-\cancel{3x^3}-6x^2h-3xh^2-\cancel{3x}}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h-3x^2h-3h^2x}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)}=\lim\frac{3\cancel{h}(1-x^2-h^2x)}{\cancel{h}(x^2+1)((x+\cancel{h})^2+1)}=\frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

(x^2+1)

مثال) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق عبارت $F(x)=\sqrt{x^2+5}$ را در $x=2$ به دست آورید اگر $F(2)=3$

$$F'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+5}-3}^{F(x)-F(a)}}{\underbrace{x-2}_{x-a}}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\cancel{5-9}^{-4}}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{4}{6}$$

مثال) a و b را طوری بیابید که هریک از توابع داده شده در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر باشند.

$$x=1\qquad F(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ ax-b & x\geq 1\end{cases}$$

بررسی پیوستگی $F(1)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^-}F(x)$

$$\left.\begin{array}{l}F'(1)^+=a\\ F'(1)^-=2x\end{array}\right\}\to a=2x=2$$

$$\left.\begin{array}{l}F(1)=a-b\\ \lim_{x\to 1^-}x^2-4=-3\end{array}\right\}\to a-b=-3\to b=5$$

مثال) a و b را طوری بیابید که هریک از توابع داده شده در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر باشند.

$$x=3\qquad F(x)=\begin{cases}ax^3-3 & x<3\\ bx-6 & x\geq 3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}F(3)=b(3)-6=3b-6\\ \lim_{x\to 3^-}ax^3-3=9a-3\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}}\boxed{3b-6=9a-3}$$

$$18a-6=9a-3$$
$$18a-9a=6-3\to 9a=3$$
$$a=\frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}F'(3)^+=b\\ F'(3)^-=2ax=6a\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مشتق پذیری}}b=6a\to b=2$$

$-\frac{1}{9}$ شیب 9

مثال) در چه نقطه‌ای از منحنی $y=x^3-3x+8$ خط مماس عمود بر $y=-\frac{x}{9}$ می‌باشد

$y'(x)=9$
$y'(x)=3x^2-3$ $\} \longrightarrow 3x^2-3=9$
$3x^2=12 \to x^2=4 \to \boxed{x=\pm 2}$

مثال) معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt[3]{x-2}$ در نقطه $A(2,0)$ به دست آورید

$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \to y'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-2)^2}}=\frac{1}{0}=\infty$ چون بی‌نهایت شده است پس
این منحنی در $x=2$ مماس قائم است

مثال) مشتق‌پذیری تابع $F(x)=4x+1+|x-2|$ در $x=2$ بررسی کنید

$$F(x)=\begin{cases}5x-1 & x\geq 2\\ 3x+3 & x<2\end{cases} \longrightarrow F'(x)=\begin{cases}5 & x\geq 2\\ 3 & x<2\end{cases} \quad F'(2)^+=5 \neq F'(2)^-=3$$ مشتق‌پذیر نیست

مثال) مشتق‌پذیری تابع $F(x)=\sqrt{(x-1)^2(x+1)}$ را در $x=1$ بررسی کنید

$F(x)=|x-1|\sqrt{x+1}$

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)\sqrt{x+1} & x\geq 1\\ (1-x)\sqrt{x+1} & x<1\end{cases} \to \begin{aligned}F'(1)^+&=1\sqrt{x+1}+\frac{x-1}{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{2}\\ F'(1)^-&=-\sqrt{x+1}+\frac{1-x}{2\sqrt{x+1}}=-\sqrt{2}\end{aligned} \neq$$ مشتق‌پذیر نیست

تمرین شماره ی ۹:

$\sin u = u' \cos u$

معادله خط مماس بر منحنی $\sin(xy-y^2)+x-1=0$ را در نقطه $(1,1)$ بیابید

مشتق ضمنی $y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y\cos(xy-y^2)+1}{(x-2y)\cos(xy-y^2)} \xrightarrow{(1,1)} y' = -\frac{2}{-1} = \boxed{2=m}$

$y-1=2(x-1) \to y=2x-1$

تمرین شماره ی ۱۲:

درستی نامساوی های زیر را ثابت کنید

الف) $\forall x_2 > x_1,\ \arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$

$F(x)=\arctan x$

$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}<1$ *

رابطه لاگرانژ: $F'(x)=\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \to \frac{1}{1+x^2} = \frac{\arctan x_2 - \arctan x_1}{x_2-x_1} \xrightarrow{*}$

$\frac{\arctan x_2 - \arctan x_1}{x_2-x_1} < 1 \to \arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$

ب) $\forall x>0,\ (x+1)\ln(x+1) > \tan^{-1} x$

$F(x)=(x+1)\ln(x+1)-\tan^{-1}x \quad [0, x]$

$F'(x)=1+\ln(x+1)-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\ln(x+1)$

تابع صعودی

$x>0 \to F(x)>F(0) \to (x+1)\ln(x+1)-\tan^{-1}x>0 \to (x+1)\ln(x+1)>\tan^{-1}x$

تمرین شماره ی ۱۴:

با استفاده از فرمول لاگرانژ درستی نامساوی $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ به ازای $x>0$ را تحقیق کنید

$F(x)=\ln x \quad [1, 1+x]$

$F'(c)=\frac{1}{c}$

$1<c<1+x \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{1+x}<\frac{1}{c}<1 \to \frac{1}{1+x}<F'(c)<1$ *

لاگرانژ $F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \to F'(c)=\frac{F(1+x)-F(1)}{\cancel{1+x-1}} \to F'(c)=\frac{\ln(1+x)}{x}$

$* \xrightarrow{\times x} \left(\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1\right) \to \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

تمرین شماره ۱۳:

ثابت کنید $0<a<b<\frac{\pi}{2}$ ، $(a-b)\tan b<\ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)<(a-b)\tan a$

$F(x)=\ln(\cos x)\qquad [a\quad b]$

$F'(x)=-\tan x$

$0<a<c<b<\frac{\pi}{2}\to \tan a<\tan c<\tan b\to -\tan b<-\tan c<-\tan a$

$\to -\tan b<F'(c)<-\tan a$ *

مقدار میانگین: $F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\to F'(c)=\frac{\ln\cos b-\ln\cos a}{b-a}\to F'(c)=\frac{\ln\frac{\cos b}{\cos a}}{b-a}$

$\xrightarrow{*} -\tan b<\frac{\ln\frac{\cos b}{\cos a}}{b-a}<-\tan a\to (a-b)\tan b<\ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)<(a-b)\tan a$

تمرین شماره ۲۶۵:

به کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

$\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\underbrace{-\frac{\pi}{4}}<\frac{1}{6}\to\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)-\arctan(1)<\frac{1}{6}$

$F(x)=\arctan x\qquad \left[1,\frac{4}{3}\right]\qquad F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$1<c<\frac{4}{3}\to 2<1+c^2<\frac{25}{9}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{9}{25}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{2}\to\frac{9}{25}<F'(c)<\frac{1}{2}$ *

لاگرانژ: $F'(c)=\frac{F(\frac{4}{3})-F(1)}{\frac{4}{3}-1}\to F'(c)=\frac{\arctan(\frac{4}{3})-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}}\xrightarrow{*}\frac{9}{25}<\frac{\arctan(\frac{4}{3})-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$

تمرین شماره ۳۵:

رابطه $x \geq 0$ و $x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) \leq x$ را ثابت کنید

$1) \; Ln(1+x) \overset{?}{\leq} x$

$F(x) = Ln(1+x) - x \quad [0 \;\; x]$

$F'(c) = \frac{1}{1+c} - 1 = \frac{-c}{1+c} < 0$ چون $(c > 0)$

لاگرانژ $F'(c) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{Ln(1+x) - x}{x}$

$\left.\begin{array}{l} F'(c) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{Ln(1+x)-x}{x} \\ F'(c) < 0 \,,\, x > 0 \end{array}\right\} \rightarrow Ln(1+x) - x < 0 \rightarrow Ln(1+x) < x$

و اگر $x = 0$ باشد تساوی رخ می‌دهد در نتیجه

$Ln(1+x) \leq x$ ✓ 1

$2) \; x - \frac{x^2}{2} \overset{?}{\leq} Ln(1+x)$

$g(x) = Ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad [0 \,, x]$

$g'(c) = \frac{1}{1+c} - 1 + c = \frac{c^2}{1+c} > 0$

$g'(c) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} > 0 \rightarrow Ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \rightarrow Ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

در $x = 0$ تساوی رخ می‌دهد در نتیجه:

$Ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ ✓ 2

$1, 2 \rightarrow \boxed{x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) \leq x}$

تمرین شماره ۳۶:

ثابت کنید اگر $0 < a < b$ آنگاه $\left(\frac{b}{a}\right)^a < e^{b-a} < \left(\frac{b}{a}\right)^b$ و نتیجه بگیرید

$\forall x > 0 \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

$F(x) = Ln\,x$

$F'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F'(c) = \frac{1}{c}$ $\qquad a < c < b \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$

$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{Ln\,b - Ln\,a}{b-a} = \frac{1}{c}$

$\frac{1}{b} < \frac{Ln\,b - Ln\,a}{b-a} < \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{Ln(b/a)}{b-a} < \frac{1}{a} \xrightarrow{\text{معکوس}} a < \frac{b-a}{Ln(b/a)} < b$

$\xrightarrow{\times Ln(b/a)} a\,Ln(b/a) < b-a < b\,Ln(b/a) \xrightarrow[\text{e می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} e^{(Ln\,b/a)^{a}} < e^{b-a} < e^{(Ln\,b/a)^{b}}$

$(\frac{b}{a})^{a} < e^{b-a} < (\frac{b}{a})^{b}$

$a = x,\ b = x+1 \rightarrow (\frac{x+1}{x})^{x} < e^{x+1-x} < (\frac{x+1}{x})^{x+1}$

مثال) تابع با دامنه R مفروض است بطوریکه برای a و $b \in R$ داریم:

$$F(a+b) = \frac{F(a)+F(b)}{1-F(a)F(b)}$$

اگر $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$، مقدار $F'(x)$ را بیابید

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 1 \rightarrow \lim F(x) = 0$$

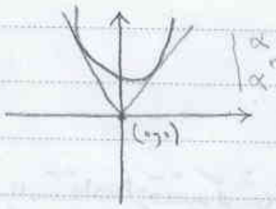
$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{F(x)+F(\Delta x)}{1-F(x)F(\Delta x)} - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{F(x)+F(\Delta x) - F(x) + F^2(x)F(\Delta x)}{1-F(x)F(\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{(1+F^2(x))}{1-F(x)F(\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{\Delta x} \lim \frac{1+F^2(x)}{1-F(x)F(\Delta x)} = 1+F^2(x) \Longrightarrow F'(x) = 1+F^2(x)$$

مثال) معادله خط مماس بر منحنی $y = x^2+1$ از مبدا مختصات را بیابید

$(0,0) \rightarrow 0 = 1$ ✗ مبدا مختصات روی منحنی نیست



$\begin{cases} \alpha \\ \alpha^2+1 \end{cases}$ نقطه دلخواه روی منحنی

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2x \rightarrow m = 2\alpha \\ m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\alpha^2+1-0}{\alpha-0} \end{array}\right\} \text{شیب‌ها برابر} \quad 2\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \rightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2+1 \rightarrow \alpha = \pm 1$$

معادله خط مماس $\quad y-0 = \frac{\alpha^2+1}{\alpha}(x) \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

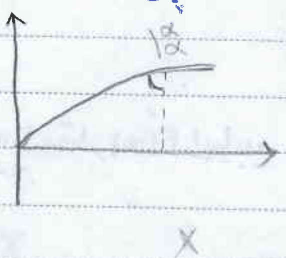
* اگر F و g در $x_0 = \alpha$ بر هم مماس باشند

$$\begin{cases} F(\alpha) = g(\alpha) \\ F'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

* اگر F و g در $x = \alpha$ بر هم عمود باشند

1) $F(\alpha) = g(\alpha)$ 2) $F'(\alpha)g'(\alpha) = -1$

مثال) معادله خط قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ از نقطه $A=\begin{vmatrix}9/2\\0\end{vmatrix}$ را بیابید.



$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to y' = \frac{1}{2\alpha} \xrightarrow{\text{شیب خط قائم}} m = -2\alpha$$

$$y-\alpha = -2\alpha(x-\alpha^2) \xrightarrow[\text{خط قائم صدق می‌کند}]{\text{مختصات نقطه A در معادله}} 0-\alpha = -2\alpha(\tfrac{9}{2}-\alpha^2)$$

$$\to 2\alpha^3 - 8\alpha = 0 \Rightarrow \overset{\text{فاکتور}}{2\alpha(\alpha^2-4)} = 0 \to \begin{cases} \alpha = 0 \to y = 0 \\ \alpha = 2 \to y = -4x+18 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

غ ق ق (زیرا رادیکال منفی نمی‌تواند باشد)

مثال) فرض کنید $0<a$ و تابع روی $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $a^2F(a)=b^2F(b)$، را نشان دهید (تفسیر رول)

$$F'(c) = \frac{-2F(c)}{c} \quad , \quad a<c<b$$

$$g(x) = x^2F(x)$$

$$\begin{cases} g(a) = a^2F(a) \\ g(b) = b^2F(b) \end{cases} \Rightarrow g(a) = g(b) \longrightarrow c \in (a,b)$$

$$g'(c) = 0$$

$$g'(x) = 2xF(x) + x^2F'(x)$$

$$g'(c) = 0 \to 2cF(c) + c^2F'(c) = 0 \to F'(c) = \frac{-2F(c)}{c}$$

مثال) با استفاده از قضیه کوشی نشان دهید

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x} < 1$$

$$F(x) = \ln(1+x) \quad , \quad g(x) = \sin^{-1}x$$

$$\frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{1}{1+c}}{\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c} = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$$

$$0<c<x \to \begin{cases} 1 < 1+c < 1+x \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \\ -x < -c < 0 \to 1-x < 1-c < 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{1-x}{1+x} < \frac{1-c}{1+c} < 1$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} < 1 \quad *$$

$$\frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{F(x)-F(0)}{g(x)-g(0)} \to \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} = \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x} \xrightarrow{*} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}x} < 1$$