Subject
Date

منظور از عبارت پاسخ فرکانسی همان پاسخ حالت دائمی سیستم به ورودی سینوسی است

در واقع در رکوردهای اشکال هندسی ریشه ها و پاسخ فرکانسی مکمل یکدیگرند

مدل ورودی سیستم : $x(t) = X \sin \omega t$, $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{P(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$

$Y(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2+\omega^2}$

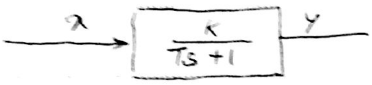
صرف نظر از اینکه سیستم قطب تکرار یا ساده دارد پاسخ حالت دائمی : $y_{ss}(t) = \underbrace{X|G(j\omega)|}_{Y} \sin(\omega t + \phi)$

که سیستم پایدار، خطی و تغییرناپذیر با زمان تحت ورودی سینوسی، در حالت دائمی خروجی سینوسی با همان فرکانس ورودی دارد. اما در حالت کلی دامنه و فاز خروجی با دامنه و فاز ورودی متفاوت خواهد بود

تابع تبدیل سینوسی : $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ داریم

نکته : یک زاویه فاز مثبت را پیش فاز و یک زاویه فاز منفی را پس فاز می نامند.

مثال : $x(t) = X \sin \omega t$, $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$



$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}$, $\angle G = -\tan^{-1} T\omega$

$\rightsquigarrow y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega)$

برای ω کوچک : دامنه خروجی حالت دائمی تقریبا K برابر دامنه ورودی و تغییر فاز خروجی اندک است

برای $\omega \to \infty$: دامنه خروجی کوچک و تقریبا با ω نسبت عکس دارد و تغییر فاز به ازای افزایش ω به سمت ∞ به -90 میل می کند.

این یک شبکه پس فاز است.

مثال : $x(t) = X \sin \omega t$, $G(s) = \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{T_2}}$ آیا این شبکه پیش فاز است یا پس فاز؟

$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(T_1 j\omega + 1)}{T_1(T_2 j\omega + 1)} \rightsquigarrow |G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{T_1^2\omega^2+1}}{T_1\sqrt{T_2^2\omega^2+1}}$

$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega$

اگر $T_1 > T_2 \longrightarrow \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega > 0 \longrightarrow$ پیش فاز

بنابراین : $y_{ss} = \frac{X T_2 \sqrt{T_1^2\omega^2+1}}{T_1\sqrt{T_1\omega^2+1}} \sin(\omega t + \tan^{-1}\omega T_1 - \tan^{-1}\omega T_2)$

اگر $T_1 < T_2 \longrightarrow \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega < 0 \longrightarrow$ پس فاز

نمایش مشخصه های پاسخ فرکانسی به صورت ترسیمی:

۱- دیاگرام بودی یا نمودار لگاریتمی

۲- نمودار نایکوئیست یا نمودار قطبی

۳- نمودار لگاریتم اندازه برحسب فاز (نمودارهای نیکولز)

دیاگرام بودی یا نمودارهای لگاریتمی: شامل دو نمودار است
- لگاریتم اندازه
- نمودار زاویه فاز

هر دو برحسب فرکانس روی مقیاس لگاریتمی

مزیت اصلی استفاده از دیاگرام های بودی در تبدیل ضرب اندازه ها به جمع است. علاوه بر آن یک روش ساده برای رسم تقریبی منحنی لگاریتم اندازه در دسترس است. بر اساس تقریب های مجانبی تقریب با بخش های خط مستقیم

(مراجعه شود به قسمت دیاگرام بود)

نکته: ارتباط نوع سیستم و منحنی لگاریتم اندازه:
نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم اندازه را در فرکانس های پایین تعیین می کند. بنابراین اطلاعات مربوط به وجود و اندازه خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترل به ورودی داده شده را می توان از مشاهده ناحیه فرکانس پایین منحنی لگاریتم اندازه تعیین کرد.

نمودارهای قطبی: نمودار قطبی تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ نموداری از اندازه $G(j\omega)$ بر حسب زاویه فاز $G(j\omega)$ روی مختصات قطبی به ازای تغییرات ω از صفر تا ∞ است. بنابراین، نمودار قطبی محل بردارهای $|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$ به ازای تغییرات ω از صفر تا ∞ است.

نکته: در نمودارهای قطبی یک زاویه فاز اندازه گیری شده
- مثبت در جهت خلاف عقربه ساعت از محور حقیقی مثبت
- منفی در جهت عقربه ساعت از محور حقیقی مثبت

یک مزیت استفاده از نمودار قطبی آن است که مشخصه های پاسخ فرکانسی سیستم را در تمام گستره فرکانسی روی یک نمودار نشان می دهد. یک عیب نمودار قطبی آن است که سهم هر کدام از عوامل تابع تبدیل حلقه باز را به طور مجزا نشان نمی دهد.

بررسی پایداری سیستم ها به روش دیاگرام نایکوییست:

یکی از روش های بررسی پایداری به کمک نمودارهای قطبی در حوزه فرکانس معروف به معیار نایکوییست می باشد.

نمودارهای قطبی: تغییرات اندازه بر حسب زاویه فاز را با تغییر فرکانس نشان می دهد.

فرض می کنیم $G(s)$ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل خطی باشد. سیستم حلقه بسته را می توان از روی نمودارهای $G(s)$ در حالت دائمی سینوسی و جایگزینی $s = j\omega$ در حوزه فرکانس تحلیل کرد.

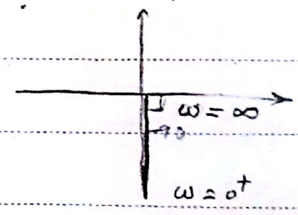
$$\underbrace{G(j\omega) = |G(j\omega)|}_{\text{اندازه}} \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\text{فاز}} \qquad 0<\omega<\infty$$

در نمودارهای قطبی، زوایای مثبت در جهت عکس ساعتگرد نسبت به محور حقیقی مثبت اندازه گیری می شوند و زوایای فاز منفی در جهت ساعتگرد نسبت به محور حقیقی مثبت.

نکته: فرکانس ω، از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند تا نمودار تکمیل شود (0^- و 0^+ نیز جزو این بازه اند) معمولاً از 0^+ تا ∞ را رسم می کنیم و سپس از روی تقارن از $-\infty$ تا 0^- را هم رسم می کنیم سپس تحلیل می کنیم.

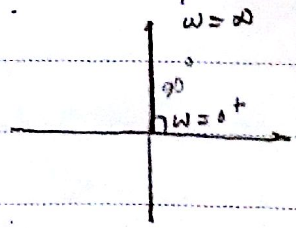
رسم نمودار قطبی برای فاکتور انتگرال گیر:

$$GH = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{|\omega|} \angle -90^\circ \rightsquigarrow \begin{cases} \lim_{\omega\to 0} GH = \infty \angle -90 \\ \lim_{\omega\to\infty} GH = 0 \angle -90 \end{cases}$$



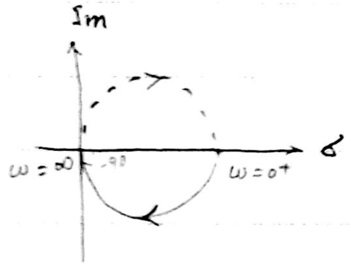
رسم نمودار قطبی برای فاکتور مشتق گیر:

$$GH = j\omega = |\omega| \angle 90^\circ \rightsquigarrow \begin{cases} \lim_{\omega\to 0} GH = 0 \angle 90 \\ \lim_{\omega\to\infty} GH = \infty \angle 90 \end{cases}$$

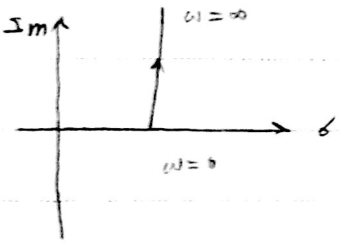


نایکوئیست درجه اول :

$$GH = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \measuredangle -\tan^{-1}\omega T \rightsquigarrow \begin{cases} \lim_{\omega\to 0^+} GH = 1 \measuredangle 0 \quad -\varepsilon \\ \lim_{\omega\to\infty} GH = 0 \measuredangle -90^\circ \end{cases}$$



$$GH = 1+j\omega T = \sqrt{1+(\omega T)^2} \measuredangle \tan^{-1}\omega T \rightsquigarrow \begin{cases} \lim_{\omega\to 0^+} GH = 1 \measuredangle 0 \\ \lim_{\omega\to\infty} GH = \infty \measuredangle 90^\circ \end{cases}$$

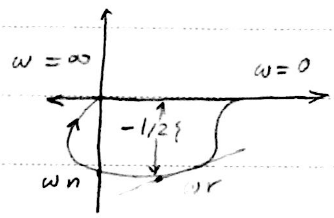


نایکوئیست درجه دوم :

$$GH = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad GH = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}$$

$$GH = \frac{1}{1+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \measuredangle -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right]$$

$$\begin{cases} \lim_{\omega\to 0} GH = 1 \measuredangle 0 \quad (-\varepsilon) \\ \lim_{\omega\to\infty} GH = 0 \measuredangle -180 \end{cases}$$



محل برخورد با محور موهومی : $Re\{GH\}=0 \rightsquigarrow \omega=\pm\omega_n \qquad \omega=\omega_n \rightsquigarrow b = Im|GH| = -\frac{1}{2\zeta}$

محل برخورد با محور حقیقی : $Im\{GH\}=0 \rightsquigarrow \omega=0,\infty \rightsquigarrow a = Re\{GH(j\omega)\} = 1,0$

نکته :

هر تابع تبدیلی که به صورت حاصلضرب نایکوئیست‌های مختلف باشد برای توان به صورت حاصلضرب نایکوئیست‌های بالا در آوریم آنگاه شرایط حدی برابر با شرایط حدی موارد بالا

نکته : (در حدگیری ها : $0\times\infty = 0$)

معیار پایداری نایکوئیست : $Z = N+P$

$Z =$ تعداد ریشه های $1 + GH = 0$ در نیمه راست صفحه S

$N =$ تعداد دور زدن های در جهت عقربه ساعت نقطه $-1+j0 = -1$

$P =$ تعداد قطبهای $GH(S)$ (تابع تبدیل حلقه باز) در نیمه راست صفحه S

اگر P صفر نباشد، برای آنکه سیستم کنترل پایدار باشد باید داشته باشیم $Z=0$ یا $N=-P$ یعنی آن که باید P بار نقطه 1- در جهت خلاف عقربه ساعت دور زده شود.

اگر $P=0$ باشد، برای پایداری باید مکان GH نقطه 1- را دور نزند (در این حالت در نظر گرفتن مکان برای تمام محدوده ω ضروری نیست و در نظر گرفتن بخش مثبت کافی است.

اگر مکان $GH(j\omega)$ از نقطه 1- عبور کند، صفرهای معادله مشخصه یا قطبهای حلقه بسته روی محور $j\omega$ قرار دارند. این حالت برای سیستم های کنترل عملی مطلوب نیست. برای یک سیستم کنترل خوب طراحی شده، هیچ کدام از ریشه های معادله مشخصه نباید روی محور $j\omega$ قرار گیرند.

نکته مهم :

با توجه به موارد گفته شده هر نقطه روی نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ نشان دهنده دامنه و فاز تابع تبدیل در یک فرکانس است. تصاویر $G(j\omega)$ روی محورهای حقیقی و موهومی به ترتیب مولفه های حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ هستند.

در واقع برای رسم نمودار نایکوئیست، دامنه $|G(j\omega)|$ و زاویه $\measuredangle G(j\omega)$ باید مستقیما در هر فرکانس برآورده شوند.

یک مزیت نمودار نایکوئیست آن است که مشخصه های پاسخ فرکانسی سیستم را روی بازه کامل فرکانسی در یک نمودار نشان می دهد.

برای بدست آوردن محل برخورد دیاگرام نایکویست با محور حقیقی:

محل برخورد را بدست آید ← جایگذین گردد ← $G(j\omega)$ در ω بدست آمده را ← $Im(G(j\omega)) = 0$

برای بدست آوردن محل برخورد دیاگرام نایکویست با محور موهومی:

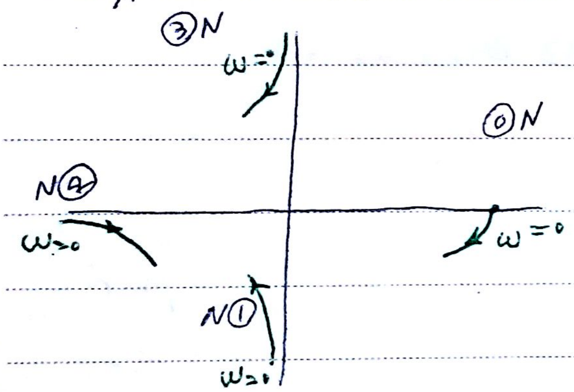
محل برخورد بدست آید ← جایگذین گردد ← $G(j\omega)$ در ω بدست آمده را ← $Re[G(j\omega)] = 0$

در نمودارهای نایکویست: زوایای
- مثبت در جهت پادساعتگرد
- منفی در جهت ساعتگرد

حول محور حقیقی مثبت

دیاگرام نایکویست در سیستم های با نوع (type) مختلف رسم می گردد

type $N = 0, 1, 2, 3$



نکته: اگر سیستم اکیداً سره باشد منحنی نایکویست در $\omega \to \infty$ با زاویه $(n-m)\times(-90)$ به مبدأ نزدیک می شود (لزومی هم ندارد حتماً مینیمم فاز باشد).

نکته: اگر سیستم نوع (type) صفر باشد، شروع منحنی نایکویست به ازای $\omega = 0^+$ از روی محور حقیقی است و دارای مقدار محدود، در غیر این صورت به ازای نوع های دیگر در $\omega = 0^+$ از اندازه ∞ شروع خواهد شد.

مثال: پایداری سیستم روبرو را بررسی کنید.

$$G(s)H(s) = \frac{60}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{60}{(1+j\omega)(j\omega+2)(j\omega+5)}$$

$$|GH| = \frac{60}{\sqrt{1+\omega^2}\,\sqrt{4+\omega^2}\,\sqrt{\omega^2+25}}$$

$$\measuredangle GH = -\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

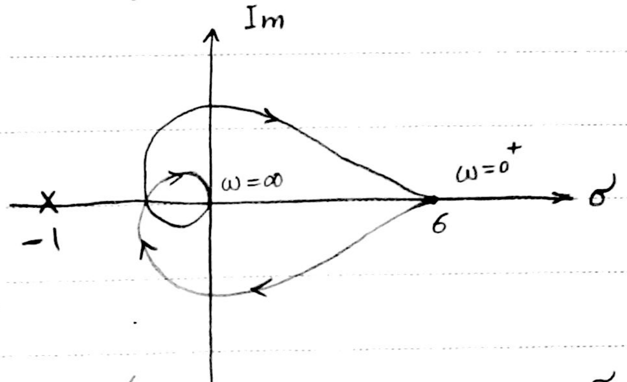
$\longrightarrow \quad \omega = 0^+ \rightsquigarrow |GH| = 6 \qquad \measuredangle GH = 0\ (-\varepsilon)$

$\omega = \infty \rightsquigarrow |GH| = 0 \qquad \measuredangle GH = -270$

ازطرفی $$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{60}{(1+j\omega)(2+j\omega)(5+j\omega)} \times \frac{(1-j\omega)(2-j\omega)(5-j\omega)}{(1-j\omega)(2-j\omega)(5-j\omega)}$$

$$= \frac{60\,[(2-\omega^2-3j\omega)(5-j\omega)]}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+25)} = \frac{60\,[(10-8\omega^2)-j(17\omega-\omega^3)]}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+25)}$$

$Im[G(j\omega)] = 0 \rightsquigarrow \omega(17-\omega^2) = 0 \rightsquigarrow \omega = \sqrt{17} \rightsquigarrow Re\{G(j\omega)\} < 1$



$Z = N + P$

$P = 0$

$N = 0 \rightsquigarrow Z = 0 \rightsquigarrow$ سیستم پایدار است.

ما دیاگرام را از 0^+ تا ∞ رسم کردیم متقارن آن را رسم نموده و نمودار را کامل کردیم

شکل دیاگرام نایکوئیست سیستم زیر را رسم و پایداری آن را بررسی نمائید.

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

$P = 1$ از استابل شمعن است

(تعداد قطب‌های سمت راست تابع تبدیل حلقه باز)

$180 - \tan^{-1}\omega$ $\tan$

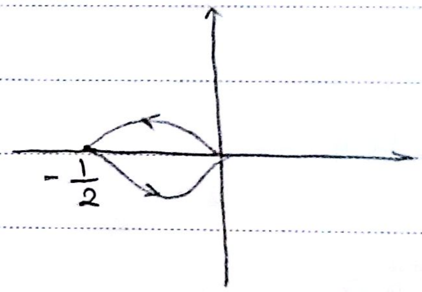
$$|GH| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \rightsquigarrow \omega = 0$$

$$\angle GH = -\tan^{-1}\frac{\omega}{-1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} \rightsquigarrow \omega = 0 \quad |GH| = \frac{1}{2} \quad \angle -180$$

$$\omega = \infty \quad |GH| = 0 \quad \angle -180$$

$$\angle GH = -(180 - \tan^{-1}\omega) - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

← به دلیل زاویه -180° روی سمت چپ محور حقیقی قرار گرفته است.



حد بهره (Gain Margin = GM)

حداکثر بهره ای که می توان به سیستمی داد تا آن سیستم همچنان پایدار بماند

GM در نایکوییست :

حداکثر بهره ای است که منحنی نایکوییست از نقطه 1- عبور کند (از روی 1- بگذرد)

$$GM = \frac{1}{|\text{نقطه تلاقی با محور حقیقی منفی}|}$$

$$GM\Big|_{dB} = 20 \log \frac{1}{|GH(j\omega_g)|}$$

ω_g از $\measuredangle GH(j\omega) = -180$ بدست می آید

حد بهره مناسب برای یک سیستم معمولا بزرگتر از 2 تا 6 dB است. در غیر این صورت به کنترل کننده نیاز دارد.

حد فاز (Phase Margin = PM)

حداکثر فازی است که می توان به منحنی داد تا منحنی از 1- عبور کند

باید ببینیم کجا منحنی دارای اندازه واحد (1) است و در آن نقطه فاز فعلی را اندازه بگیریم،

تفاضل این فاز و 180- درجه حد فاز نام دارد.

$$PM = 180 + \measuredangle GH(j\omega)$$

حد فاز مناسب برای سیستم ها بزرگتر از 30° است.

نکاتی در مورد کنترل کننده ها :

کنترل کننده تناسبی P :

نقش آن در سیستم به صورت زیر است :

1) افزایش پهنای باند سیستم که نتیجه اش افزایش سرعت پاسخ سیستم است .

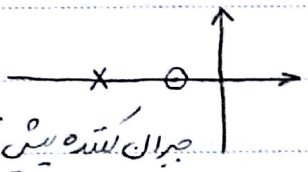
2) کاهش خطای حالت ماندگار، که مستقیماً مربوط به افزایش K (بهره است)

3) کاهش حد فاز که عیب محسوب می شود .

4) نوسانی ترکردن پاسخ حلقه بسته که پایداری را کم می کند و عیب محسوب می شود .

جبران کننده پیش فاز :

مانند یک PD (کنترل کننده تناسبی مشتقی (KP+KDS) عمل می کند.



جبران کننده پیش فاز

خواص PD در حالت کلی :

1 - پهنای باند ↑ می یابد در نتیجه پاسخ گذرا سریعتر می شود . ξ هم ↑ می یابد.

2 - فراجهش ↓ می یابد که خاصیت مهم PD است .

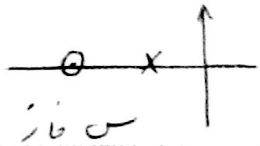
3 - خطای حالت ماندگار را نمی تواند اصلاح کند .

4 - یک فیلتر بالاگذر است و فاز مثبت به سیستم می دهد.

عیب پیش فاز یا PD محدودیت در فرکانس های بالا و تأخیر زمانی آن است .

جبران کننده پس فاز :

مانند یک PI (کنترل کننده تناسبی انتگرال گیر $\left(K_p + \frac{K_I}{s}\right)$) است.



خواص PI در حالت کلی :

۱- یک فیلتر پایین گذر است لذا بهره را در فرکانس های پایین زیاد می کند.

2- کاهش پهنای باند در نتیجه کندتر شدن سیستم

3- کاهش خطای حالت ماندگار ولی دیرتر از بین رفتن پاسخ گذرا

4- افزایش مرتبه و نوع سیستم به اندازه یک واحد، که مشروط بر حفظ پایداری اگر خطای حالت ماندگار سیستم عدد ثابتی باشد آن را صفر می کند.

حد فاز را کاهش می دهد که عیب محسوب می شود

باز هم فراجهش را نیز تا حدودی افزایش می دهد که عیب محسوب می شود

همچنین پاسخ حلقه بسته را تا حدودی نوسانی می کند که این نیز عیب محسوب می شود.

نکته : افزایش بهره خطا را کم می کند و افزایش پهنای باند سرعت را زیاد می کند.

Scanned by CamScanner

مدل سازی به روش فضای حالت :

در مورد مدل سازی های کلاسیک ← تابع تبدیل به تفصیل صحبت شد.

بلوک دیاگرام

SFG

:

یکی از روش های نمایش سیستم‌ها (مدل سازی) استفاده از معادلات فضای حالت است.

از مزایای نمایش سیستم‌ها به صورت فضای حالت به جای تابع تبدیل می‌توان به موارد زیر اشاره نمود

۱- برای نمایش سیستم‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر، تغییرناپذیر و چند ورودی - چند خروجی نیز می‌توان استفاده نمود.

۲- اطلاعات داخلی سیستم را نیز ارائه می‌دهد.

در واقع مدل سازی به صورت فضای حالت :

هر معادله دیفرانسیل مرتبه n با یک متغیر را تبدیل می‌کنیم به ← n معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ با n متغیر

سیستم ← (نوشتن معادلات دیفرانسیل مرتبه n) ← معادلات دیفرانسیل مرتبه ۱ ← (با نرم افزار) ←

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

فضای حالت یعنی داشتن ماتریس های $A_{n\times n}$ ، $B_{n\times 1}$ ، $C_{1\times 1}$ ، $D_{1\times 1}$ برای SISO

و ماتریس های $A_{n\times n}$ ، $B_{n\times m}$ ، $C_{p\times n}$ ، $D_{p\times m}$ برای MIMO

نکته : نمایش فضای حالت منحصر به فرد نیست

رابطه فضای حالت با تابع تبدیل سیستم :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(SI-A)^{-1}B + D$$

معادله $|SI-A|=0$ قطب‌های سیستم را به ما می‌دهد (معادله مشخصه با کمک فضای حالت)

نکته: اگر سیستم اکیداً سره باشد $D=0$ است

پس در حالت کلی فرم فضای حالت

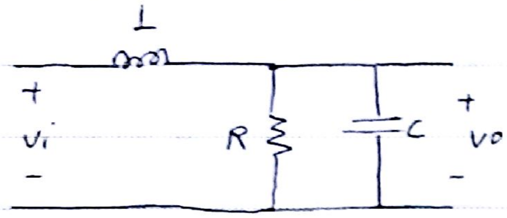
متغیر حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \rightarrow \text{ورودی} \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

خروجی

معمولاً متغیرهای حالت را عناصر ذخیره کننده انرژی در مدار انتخاب می‌کنند که با روش‌های آموخته شده در مدار ۲ می‌توان به فرم فضای حالت سیستم را مدل کرد.

برای مثال: در سیستم روبرو فضای حالت - فرم زیر است.



فرم فضای حالت

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

$$v_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

نکته مهم: در حالت کلی برای سیستم اکیداً سره فرم کانونی Canonical فضای حالت از روی تابع تبدیل به این صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$U \longrightarrow \boxed{\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow y$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

نکته: ماتریس انتقال حالت $\Phi(t)$ از بخش‌های مهم فضای حالت است که در کنترل مدرن به تفصیل در مورد آن بحث خواهد شد.

$$\Phi(s) = (SI - A)^{-1}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}$$