گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

(فصل ۱)

الگو و دنباله

تعدادی از اعداد که به‌صورت یک رشته، پشت سر هم نوشته شده باشند را یک دنباله از اعداد می‌نامند. به عبارت دیگر دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن فقط اعداد طبیعی باشند. جمله‌ی n ام دنباله را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. مثلاً:

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{2}{3}\ ,a_3=\frac{3}{4},\dots,a_n=\frac{n}{n+1},\dots$$

$$a_1=0\ ,\ a_2=\frac{3}{5}\ ,a_3=\frac{8}{10},\dots,a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1},\dots$$

$$a_1=\frac{\sin 1}{1+\cos 1}\ ,\ a_2=\frac{\sin 2}{1+\cos 2},\dots,a_n=\frac{\sin n}{1+\cos n},\dots$$

دنباله حسابی :

اگر هر جمله‌ی دنباله غیر از جمله‌ی اول مجموع جمله‌ی قبلی با مقدار ثابتی باشد، دنباله را دنباله‌ی حسابی می‌نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت می‌نامند.

$$a\ ,\ a+d\ ,\ a+2d\ ,\ a+3d\ ,\ a+4d\ ,\ \dots$$

+d +d +d +d +d

جمله‌ی عمومی دنباله : $a_n=a+(n-1)d$

اگر $d>0$ باشد، دنباله صعودی (در حال افزایش) و اگر $d<0$ دنباله نزولی (در حال کاهش) است.

☜ مثال: جمله سوم یک دنباله حسابی برابر ۸ و جمله هفتم آن برابر ۳۲ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم کدام است؟

✍حل :

$$\left.\begin{matrix}a_3=a+2d=8\\ a_7=a+6d=32\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}}4d=24\to d=6\to a+2\times6=8\to a=-4$$

$$a_{11}=a+10d=-4+10\times6=56$$

نکته: با داشتن ۲ جمله متفاوت از دنباله حسابی می‌توان قدرنسبت آن را به‌دست آورد:

$$\left.\begin{matrix}a_n=a+(n-1)d\\ a_m=a+(m-1)d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_m-a_n=(m-n)d\Rightarrow d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

☜ مثال: شیر آبی در دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، پس از گذشت چند دقیقه آب حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

✍حل :

چون در هر دقیقه مقدار ثابتی آب وارد حوض می‌شود، لذا حجم آب در هر دقیقه تشکیل دنباله عددی می‌دهد.

حجم آب موجود در دقیقه n ام: $a_n=25+3/5n$

$$\Rightarrow 102=25+3/5n\Rightarrow \frac{7}{2}n=77\Rightarrow n=22$$

در دقیقهٔ ۲۲ ام اینگونه می شود .

☜ مثال: در یک دنباله حسابی $a_1+a_4+a_7=8$ و $a_4+a_7+a_{10}=2$، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

✍حل :

$$\left.\begin{matrix}a_1+a_4+a_7=8\\ a_4+a_7+a_{10}=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_{10}-a_1=-6\to(a_1+9d)-a_1=-6\Rightarrow d=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

☜ مثال: در دنباله حسابی $۲, \frac{۷}{۴}, ...$ جملات $a_۴, a_۸, a_{۱۲}, ...$ دنباله حسابی دیگری تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

✍حل :

$$a_۱ = ۲ \qquad a_۲ = \frac{۷}{۴} \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = -\frac{۱}{۴}$$

در دنباله جدید داریم:

$$\left.\begin{array}{l} t_۱ = a_۴ = a_۱ + ۳d \\ t_۲ = a_۸ = a_۱ + ۷d \end{array}\right\} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = ۴d = ۴ \times (-\frac{۱}{۴}) = -۱$$

☜ مثال: بین ۲ عدد ۵ و ۴۰۵ سه جمله درج کرده‌ایم. اگر این ۵ جمله تشکیل دنباله حسابی دهند، قدرنسبت دنباله چقدر است؟

✍حل :

$$\underbrace{۵}_{a}, \underbrace{\quad}_{a+d}, \underbrace{\quad}_{a+۲d}, \underbrace{\quad}_{a+۳d}, \underbrace{۴۰۵}_{a+۴d}$$

$$a + ۴d = ۴۰۵ \rightarrow ۵ + ۴d = ۴۰۵ \rightarrow d = ۱۰۰$$

☜ مثال: اگر در یک دنباله حسابی $a_۳ = ۷ \;,\; a_{۱۶} = ۴۶ \;,\; a_{۱۱} = ۳۱$ باشد، $a_۸$ کدام است؟

✍حل :

$$\left.\begin{array}{l} a_۳ = a_۱ + ۲d \\ a_{۱۶} = a_۱ + ۱۵d \end{array}\right\} \Rightarrow a_۳ + a_{۱۶} = ۲a_۱ + ۱۷d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d \\ a_۸ = a_۱ + ۷d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{۱۱} + a_۸ = ۲a_۱ + ۱۷d \Rightarrow a_{۱۱} + a_۸ = a_۳ + a_{۱۶} \Rightarrow a_۸ = ۷ + ۴۶ - ۳۱ = ۲۲$$

نکته: اگر در دنباله حسابی: $m + n = p + q$ باشد: $a_m + a_n = a_p + a_q$

$$\left.\begin{array}{l} a_m + a_n = a_۱ + (m-۱)d + a_۱ + (n-۱)d \\ a_p + a_q = a_۱ + (p-۱)d + a_۱ + (q-۱)d \end{array}\right\} \Rightarrow m + n = p + q$$

$$\Rightarrow a_m + a_n = ۲a_۱ + (m + n - ۲)d = ۲a_۱ + (p + q - ۲)d = a_p + a_q$$

حل مثال فوق با این نکته:

$$a_۳ + a_{۱۶} = a_{۱۱} + a_۸ \Rightarrow ۷ + ۴۶ = ۳۱ + a_۸ \rightarrow a_۸ = ۲۲$$

نکته: اگر سه عدد c, b, a تشکیل دنباله عددی دهند، آن‌گاه داریم: $b = \frac{a+c}{۲}$

☜ مثال: اگر $۱+۲x$ ،$۲+x$ و $x-۱$ تشکیل دنباله‌ی عددی دهند، x کدام است؟

✍حل :

$$۲ + x = \frac{۱ - x + ۱ + ۲x}{۲} = \frac{۲ + x}{۲} \Rightarrow ۴ + ۲x = ۲ + x \Rightarrow x = -۲$$

☜ مثال: اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های ایـن مثلث ۶۰° است.

✍حل :

اگر زاویه‌ها را x و y و z بنامیم، داریم:

$$y = \frac{x + z}{۲} \Rightarrow x + z = ۲y$$

از طرفی در مثلث $x + y + z = ۱۸۰^\circ$ است. پس:

$$y + (x + z) = y + ۲y = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۶۰$$

دنباله هندسی :

دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن غیراز جمله‌ی اول، حاصل‌ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت باشد را دنباله هندسی می‌نامند. این عدد ثابت قدرنسبت نامیده می‌شود.

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ aq^3\,,\ \dots\,,\ \underbrace{aq^{n-1}}_{t_n}$$

*** برای $q \ge 1$ دنباله صعودی و برای $0 \le q \le 1$ دنباله نزولی است. $q<0$ دنباله را نوسانی می‌کند. $(a>0)$**

$$2\,,6\,,18\,,54\,,\ \dots$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots$$

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ \dots$$

برای $a<0$، احکام فوق بالعکس می‌باشند.

☜ مثال: در یک دنباله هندسی حاصل‌ضرب جمله چهارم و هشتم برابر ۸ است. جمله ششم این دنباله کدام است؟

✍حل :

$$aq^3 \times aq^7 = 8 \rightarrow a^2q^{10} = 8 \rightarrow aq^5 = \pm 2\sqrt{2} \rightarrow t_6 = aq^5 = \pm 2\sqrt{2}$$

☜ مثال: اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

✍حل :

$$\underbrace{(a+3d)}_{a_0}\underbrace{(a+5d)}_{a_0q}\underbrace{(a+11d)}_{a_0q^2}$$

$$a_0 \times a_0q^2 = (a_0q)^2 \rightarrow (a+5d)^2 = (a+3d)(a+11d) \rightarrow \cancel{a^2} + 25d^2 + 10ad = \cancel{a^2} + 14ad + 33d^2 \rightarrow 8d^2 + 4ad = 0$$

$$4d(2d+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -2d = a \Rightarrow q = \dfrac{a+5d}{a+3d} = \dfrac{3d}{d} = 3 \end{cases}$$

☜ مثال: وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل افزایش می‌یابد. اگر کشوری با نرخ رشد سالیانه ۳ درصد هم اکنون ۵۰ میلیون جمعیت داشته باشد. جمعیت این کشور ۵ سال بعد چقدر خواهد بود؟

✍حل :

جمعیت سال دوم: $50 + \frac{3}{100} \times 50 = \frac{103}{100} \times 50$

جمعیت سال سوم: $\frac{103}{100} \times 50 + \frac{3}{100} \times (\frac{103}{100} \times 50) = (\frac{103}{100})^2 \times 50$

$\vdots$

جمعیت سال n ام: $(\frac{103}{100})^{n-1} \times 50$

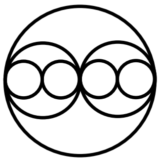
پس جمعیت سال ۵ ام برابر است با:

$$(\frac{103}{100})^4 \times 50 = 56/275441$$

یعنی جمعیت سال ۵ ام ۵۶ میلیون و ۲۷۵ هزار و ٤٤١ نفر است.

مثال: اگر دوایری را مانند شکل مقابل درون هم محاط کنیم، مساحت دایره‌ای که در مرحله‌ی n ام محاط می‌شود، چقدر است؟

حل :



مساحت دایره‌ی اول: $S_1=\pi R^2$

مساحت دایره‌ی دوم: $S_2=\pi(\frac{R}{2})^2=\frac{\pi R^2}{4}$

مساحت دایره‌ی سوم: $S_3=\pi(\frac{R}{4})^2=\frac{\pi R^2}{16}$

$\vdots$

مساحت دایره‌ی n ام: $S_n=\frac{\pi R^2}{4^{n-1}}$

مساحت‌ها تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ می‌دهد.

مثال: در یک دنباله هندسی حاصل‌ضرب ۷ جمله‌ی اول $(128)^2$ است. جمله چهارم دنباله کدام است؟

حل :

$$a.aq.aq^2.aq^3.aq^4.aq^5.aq^6=(128)^2=(2^7)^2$$

$$a^7.(q^{1+2+3+4+5+6})=2^{14}\rightarrow a^7(q^{\frac{6(6+1)}{2}})=2^{14}\rightarrow a^7(q^3)^7=2^{14}\rightarrow aq^3=2^2=4=t_4$$

مثال: بین ۲ عدد ۴۰۵ و ۵ سه جمله درج کرده‌ایم. اگر این ۵ جمله تشکیل دنباله هندسی دهند، قدرنسبت دنباله چقدر است؟

حل :

$$\underbrace{5}_{a},\underbrace{\quad}_{aq},\underbrace{\quad}_{aq^2},\underbrace{\quad}_{aq^3},\underbrace{405}_{aq^4}$$

$$\left.\begin{array}{l}aq^4=405\\ a=5\end{array}\right\}\Rightarrow q^4=\frac{405}{5}=81\rightarrow q^4=81\rightarrow q=\pm3\Rightarrow\begin{cases}5,15,45,135,405\\ 5,-15,45,-135,405\end{cases}$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی اگر $a_3=3$, $a_6=24$, $a_{11}=768$ ، a_8 کدام است؟

حل :

$$\left.\begin{array}{l}a_3=aq^2=3\\ a_6=aq^5=24\\ a_{11}=aq^{10}=768\end{array}\right\}\Rightarrow a_3a_{11}=aq^2\times aq^{10}=3\times768=a^2q^{12}=aq^5\times(aq^7)\rightarrow a_8=aq^7=\frac{a^2q^{12}}{aq^5}=\frac{3\times768}{24}=96$$

نکته: اگر $m+n=p+q$ آن‌گاه $a_ma_n=a_pa_q$

حل مثال قبل با این نکته:

$$a_3\times a_{11}=a_6\times a_8\rightarrow 3\times768=24a_8\rightarrow a_8=96$$

نکته: اگر c, b, a سه جمله متوالی دنباله‌ی هندسی باشند $b^2=ac$ و اگر c, b, a سه جمله متوالی دنباله‌ی حسابی باشند

$$2b=a+c$$

مثال: در دنباله‌ی زیر x را به‌گونه‌ای تعیین کنید تا دنباله دنباله‌ی هندسی باشد.

حل :

$$1-x,x,1+x$$

$$x^2=(1-x)(1+x)=1-x^2\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

☜ مثال: اگر سه عدد مثبت z, y, x جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، $\log z, \log y, \log x$ چگونه دنباله‌ای می‌باشند؟

✍حل :

$y^2 = xz \to \log y^2 = \log xz \to 2\log y = \log x + \log z \Rightarrow$ **دنباله حسابی است**

نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد :

اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک شوند، گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

مثلاً در تقسیم ۱ بر ۳ خارج قسمت‌ها از ۱ رقم تا n رقم دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند.

$0/3, 0/33, 0/333, \ldots$

$\frac{1}{3} - 0/3 = \frac{1}{30}$

$\frac{1}{3} - 0/33 = \frac{1}{300}$

$\frac{1}{3} - 0/333 = \frac{1}{3000}$

هر چقدر این کار را ادامه دهیم، جملات دنباله به $\frac{1}{3}$ نزدیک‌تر می‌شوند.

☜ مثال: هر یک از دنباله‌های زیر به چه عددی نزدیک می‌شود؟

الف) $0/9, 0/99, 0/999, \ldots$

این دنباله به سمت ۱ نزدیک می‌شود.

ب) $0/4, 0/44, 0/444, \ldots$

این دنباله حاصل ضرب جملات دنباله فوق در $\frac{4}{9}$ است، لذا جملات آن نیز به $1 \times \frac{4}{9}$ نزدیک می‌شود.

ج) $1/19\ ,\ 1/199, \ldots$

این دنباله به ۱/۲ نزدیک می‌شود.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری :

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می‌شوند. جمله‌ی n ام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. این دنباله را دنباله‌ی تقریبات اعشاری x می‌نامند. و جمله‌ی n ام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشاری می‌نامند.

☜ مثال: دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ را به‌دست آورید.

✍حل :

اگر اعداد روی محور بین ۱ تا ۲ را به ده قسمت تقسیم کنیم، داریم:

$1/8 < \frac{11}{6} < 1/9$

اگر با بزرگ‌نمایی فاصله بین نقاط متناظر، فاصله‌ها را مجدداً به ده قسمت تقسیم کنیم داریم:

$1/83 < \frac{11}{6} < 1/84$

به همین ترتیب با تقسیم مجدد فاصله‌ها به ده قسمت داریم:

$$1/833 < \frac{11}{6} < 1/834$$

لذا دنباله تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ عبارت است از:

$$1/8\ ,\ 1/83\ ,\ 1/833\ ,\ 1/8333\ ,\ ...$$

☜ مثال: اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق کند، چهار جمله‌ی اول دنباله تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$2x+1 < 8/1316 \qquad 4-x < 0/4343$$

✍حل :

$$3/5657 < x < 3/5658$$

$3/5\ ,\ 3/56\ ,\ 3/565\ ,\ 3/5657$: چهار جمله‌ی اول دنباله

دقت کنید که فقط ٤ جمله از این دنباله را می‌توانیم به قطعیت بیان کنیم.

☜ مثال: اگر در دنباله تقریبات اعشاری $\sqrt{2}$، جمله‌ی پنجم برابر ۱/٤۱٤۲۱ باشد، دنباله‌ی تقریبات اعشاری عدد $10\sqrt{2}$ را تا چند رقم اعشار می‌توانیم بنویسیم؟

✍حل :

$$1/41421 < \sqrt{2} < 1/41422 \Rightarrow 14/1421 < 10\sqrt{2} < 14/1422$$

پس $10\sqrt{2}$ را تا ٤ رقم اعشار می‌توانیم بنویسیم.

ریشه‌گیری اعداد حقیقی :

عدد حقیقی b را یک ریشه‌ی kام عدد حقیقی a نامیم هرگاه: $b^k = a$

اگر k زوج باشد، فقط اعداد نامنفی ریشه‌ی kام دارند و اگر b یک ریشه‌ی kام عدد نامنفی a باشد، آن‌گاه $-b$ نیز یک ریشه‌ی kام عدد منفی a است، زیرا: $(-b)^k = (b)^k = a$ ریشه‌ی kام عدد a را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهند.

$$\sqrt[k]{a} = \begin{cases} a \geq 0 & \text{زوج } k \\ a \in IR & \text{فرد } k \end{cases}$$

عبارت $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که k زوج و a منفی است، معنا ندارد و تعریف نشده است.

خواص ریشه:

۱) $\sqrt[k]{a^k} = \begin{cases} a & \text{فرد } k \\ |a| & \text{زوج } k \end{cases}$

۲) $(\sqrt[k]{a})^k = a$

به شرط آن‌که عبارات تعریف شده باشند:

۳) $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$

٤) $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$

البته در حالتی‌که $a<0$ و m و k زوج باشند، عبارت سمت راست لازم است با قدرمطلق بیان شود:

$$\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{|a|})^m$$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

توان‌رسانی با اعداد گویا :

برای یک عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r=\frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n یک عدد طبیعی است، a^r که توان r ام a نام دارد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$a^r=a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}$$

مثلاً:

$$(\sqrt{۲})^{\frac{۳}{۵}}=(۲^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۳}{۵}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=\sqrt[۱۰]{۲^۳}=\sqrt[۱۰]{۸}$$

نکته: اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، برای یک عدد طبیعی k داریم:

$$\frac{p}{n}=\frac{kp}{kn}$$

لذا: $a^{\frac{p}{n}}=a^{\frac{kp}{kn}}\ (a>۰)$

قوانین توان‌رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است.

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا هستند.

$$a^{r+s}=a^r a^s$$

$$(a^r)^s=a^{rs}$$

$$(ab)^r=a^r b^r$$

$$a^{-r}=\frac{۱}{a^r}$$

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

نکته:

$$\begin{cases}۰<a<۱\Rightarrow\ a^n<a\\ a>۱\quad\Rightarrow\ a^n>a\end{cases}$$

نکته:

$$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m b}$$

چون

$$a\sqrt[m]{b}=ab^{\frac{۱}{m}}=a^{\frac{m}{m}}b^{\frac{۱}{m}}$$

$$=(a^m b)^{\frac{۱}{m}}=\sqrt[m]{a^m b}$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی :

توان bاُم a را با a^b نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که در توان‌رسانی، پایه همواره عددی مثبت است ولی نما هر عددی می‌تواند باشد.

قوانین توان‌رسانی به توان اعداد گویا برای توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی هم برقرارند.

اگر a و c اعداد حقیقی مثبت باشند و b و d اعداد حقیقی دلخواه باشند:

$$a^{b+d}=a^b a^d \qquad a^{b-d}=\frac{a^b}{a^d}$$

$$(a^b)^d=a^{bd}$$

$$(ac)^b=a^b c^b \qquad (\frac{a}{c})^b=\frac{a^b}{c^b}$$

☜ مثال: حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2\sqrt{2}}} =$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5\times 2\sqrt{2}}} = \sqrt[15]{2^6\sqrt{2}} = \sqrt[15]{\sqrt{2^{13}}} = \sqrt[30]{2^{13}}$$

ب) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} =$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} = (3-2)^{\sqrt{2}+1} = 1^{\sqrt{2}+1} = 1$$

ج) $\sqrt{32}-2\sqrt{18}+3\sqrt{72}-\sqrt{8} =$

$$4\sqrt{2}-2\times3\sqrt{2}+3\times3\times2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+18\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

د) $(\sqrt{15}^{(2-\sqrt{2})})^{(2+\sqrt{2})} =$

$$(\sqrt{15})^{4-2} = \sqrt{15}^{2} = 15$$

ط) $\sqrt[3]{-4\sqrt{8}} =$

$$\sqrt[3]{-2^2\times 2^{\frac{3}{2}}} = -\sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}} = -(2^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}} = -2^{\frac{7}{6}} = -\sqrt[6]{2^7}$$

ظ) $\sqrt{\sqrt{2}}+1\times\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2-1} = 1$$

ن) $(\frac{1}{4})^{\sqrt{3}-2}\times 2^{(2\sqrt{3}+4)}$

$$(2^{-2})^{\sqrt{3}-2}\times 2^{2\sqrt{3}+4} = 2^{-2\sqrt{3}+4}\times 2^{2\sqrt{3}+4} = 2^{4+4} = 2^{8} = 256$$

و) $(3\sqrt[10]{32}+\sqrt[6]{128}-\sqrt{18})^{42} =$

$$(3\sqrt[10]{2^5}+\sqrt[6]{2^7}-\sqrt{18})^{42} = (3\sqrt{2}+2\sqrt[6]{2}-3\sqrt{2})^{42} = (2^{\frac{7}{6}})^{42} = 2^{\frac{7}{6}\times 42} = 2^{7\times7} = 2^{49}$$

☜ مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{\sqrt{2}} = 2$$

✍حل :

دو طرف را به توان $\sqrt{2}$ می‌رسانیم:

$$(x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = (2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{2^{\sqrt{2}}}$$

☜ مثال: اگر $a=3^{\sqrt{8}}$ و $b=9^{\sqrt{2}-1}$ بین a و b چه رابطه‌ی برقرار است؟

✍حل :

$$a=3^{2\sqrt{2}} \qquad b=3^{2(\sqrt{2}-1)}=3^{2\sqrt{2}-2}=3^{2\sqrt{2}}\times 3^{-2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{9}\Rightarrow 3^{2\sqrt{2}-2}=\frac{3^{2\sqrt{2}}}{9}$$

$$\Rightarrow b=\frac{a}{9}\Rightarrow a=9b$$

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

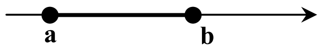
ریاضی ۲

(فصل‌های ۲ و ۳)

تابع:

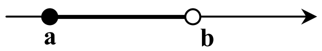
بازه (فاصله):

$[a,b]$ را بازه‌ی بسته از a تا b می‌نامند و a و b را ابتدا و انتهای بازه می‌نامند و داریم:

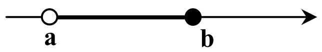


$[a,b]=\{x \mid x\in IR\ ,\ a\le x\le b\}$

بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را بازه‌هایی نیم‌باز می‌نامند.

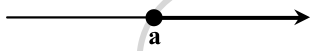


$[a,b)=\{x \mid x\in IR\ ,\ a\le x< b\}$

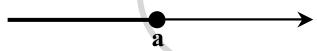


$(a,b]=\{x \mid x\in IR\ ,\ a< x\le b\}$

بازه‌های $[a,+\infty)$ و $(-\infty,a]$ را نیز بازه‌های نیم‌باز می‌نامند.



$[a,\infty)=\{x \mid x\in IR\ ,\ x\ge a\}$



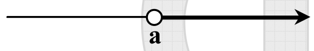
$(-\infty,a]=\{x \mid x\in IR\ ,\ x\le a\}$

بازه‌ی (a,b) را بازه‌ی باز می‌نامیم.

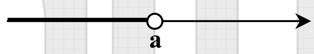
$(a,b)=\{x \mid x\in IR\ ,\ a< x< b\}$

بازه‌های (a,∞) و $(-\infty,a)$ را نیز بازه‌های باز می‌نامند.

$(a,\infty)=x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ x>a\}$



$(-\infty,a)=x \mid x\in IR\ ,\ x<a\}$



تابع:

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

بیان زوج مرتبی:

اگر یک رابطه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز نباشند.

(دو زوج (a,b) و (c,d) مساوی هستند هرگاه $a=b$ و $c=d$، در غیر این صورت آن‌ها را متمایز می‌نامیم.)

☜مثال: اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b کدام‌اند؟

$\{(a-۱,۲)\ ,\ (۵,a-۲)\ ,\ (a-۲,b+۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\}$

✍حل:

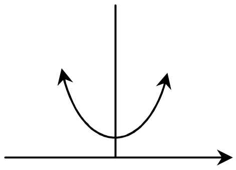
هیچ دو زوج مرتبی نباید شامل مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متمایز باشند.

$(۵,a-۲)=(۵,۳)\ \Rightarrow\ a-۲=۳\ \Rightarrow\ a=۵$

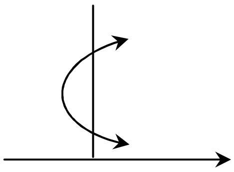
$(a-۲,b+۳)=(۳,b+۳)=(۳,۵)\ \Rightarrow\ b+۳=۵\ \Rightarrow\ b=۲$

بیان نموداری:

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



تابع است



تابع نیست

بیان تابع با نمودار ون:

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد:

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا اصلاً پیکانی وارد نشود.

☜مثال: اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی چند تابع قابل تعریف است؟

✍حل:

عضو a سه انتخاب دارد که به یکی از آن‌ها متصل شود. به همین ترتیب عضو d,c,b لذا تعداد توابع قابل تعریف $۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳$ تابع است. (چون اعضای دامنه مستقل از همند و بنابر اصل ضرب حالات انتخابشان در هم ضرب می‌شود.)

در حالت کلی از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی، n^m تابع قابل تعریف است.

دامنه و برد:

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های تشکیل دهنده‌ی یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی یک تابع را برد تابع می‌نامند.

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه‌ی آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان B باشد. مجموعه‌ی B را هم دامنه یا مقصد تابع f می‌نامند.

برد یک تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه‌ی آن است و ممکن است مساوی هم‌دامنه نیز بشود.

به‌طور کلی اگر f تابعی از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B باشد، می‌نویسیم: $f:A\to B$

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد طبق قرارداد، دامنه‌ی تابع بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه‌ی ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده است. دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می‌دهند.

مقدار تابع در یک نقطه، نمایش جبری (ضابطه‌ی) تابع:

چون تابع تناظری است بین دو مجموعه که مجموعه‌ی اول دامنه و مجموعه‌ی دوم برد نامیده می‌شود به قسمی که هر عضو از دامنه دقیقاً با یک عضو از برد نظیر می‌شود، لذا تابع را می‌توان به‌عنوان یک ماشین در نظر گرفت که با دریافت هر عضو از دامنه، عضوی منحصر به فرد از برد را به‌عنوان خروجی به ما می‌دهد.

$$x \to \boxed{f} \to f(x)$$

مثلاً تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۱۰),(۳,۱۵),(۴,۲۰)\}$ را در نظر بگیرید:

$D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$ $\qquad$ $R_f=\{۵،۱۰،۱۵,۲۰\}$

حال می‌توان نوشت:

$f(۱)=۵$ $\qquad$ $f(۲)=۱۰$ $\qquad$ $f(۳)=۱۵$ $\qquad$ $f(۴)=۲۰$

گاهی اوقات یک تابع را می‌توان برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این‌گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه‌ی تابع می‌نامند.

مثلاً برای تابع فوق‌الذکر، ضابطه‌ی تابع عبارتست از: $f(x)=۵x$

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارد:

۱- دامنه

۲- هم‌دامنه

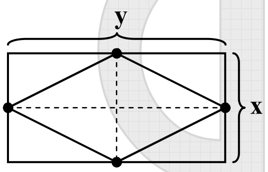
۳- دستور یا قانونی که نحوه‌ی ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد که این دستور هنگامی‌که در قالب عبارت جبری بیان می‌شود. ضابطه‌ی جبری نام دارد.

اگر ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ باشد، شرط آن که ضابطه‌ای، ضابطه‌ی تابع باشد آن است که:

$$x_۱=x_۲ \Rightarrow f(x_۱)=f(x_۲)$$ اگر

☜مثال: در مستطیلی با عرض x و محیط ۴۰ یک لوزی به‌گونه‌ای محاط شده است که هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به‌عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.

✍حل: اگر عرض مستطیل را y در نظر بگیریم:



$$\text{محیط}=۲(y+x)=۴۰\rightarrow y=۲۰-x$$

$$S_{\text{لوزی}}=\frac{x\times y}{۲}=\frac{x(۲۰-x)}{۲}=۱۰x-\frac{x^۲}{۲}$$

☜مثال: اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل‌ضرب دو عدد را به‌عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

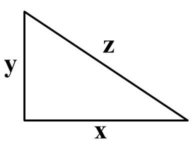
✍حل:x: عدد کوچک‌تر $\qquad$ y: عدد بزرگ‌تر

$$y-x=۱۲ \Rightarrow f=x.y=x(۱۲+x)=۱۲x+x^۲$$

☜مثال: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به‌عنوان تابعی از یک ضلع آن به‌دست آورید.

✍حل:

x: ضلع



$$S=\frac{xy}{۲}=۲۵ \Rightarrow xy=۵۰ \Rightarrow y=\frac{۵۰}{x}$$

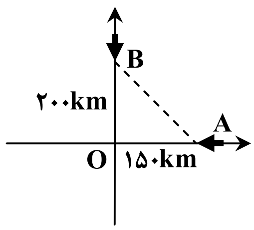
$$\text{وتر}:z=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(\frac{۵۰}{x})^۲}=\frac{\sqrt{x^۴+۲۵۰۰}}{|x|}\overset{x>۰}{=}\frac{\sqrt{x^۴+۲۵۰۰}}{x}$$

مثال: دو هواپیما مانند شکل در دو مسیر عمود بر هم در ارتفاع یکسان، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه‌ی O فاصله دارند.

اگر مبدأ زمان را همین شکل فرض کنیم ، فاصله‌ی بین دو هواپیما را به‌عنوان تابعی از زمان به‌دست آورید.

ثانیاً نشان دهید این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

حل:



$$900\frac{km}{h} = 15\frac{km}{min}$$

$$x = x_0 + v_0 t = 150 - 15t$$

$$y = y_0 + v'_0 t = 200 - 15t$$

هواپیمای A در لحظه‌ی $t = 10$ از مبدا عبور می‌کند و هواپیمای B در لحظه‌ی $t = 20$ از مبدأ عبور می‌کند، لذا این دو هواپیما هرگز به هم برخورد نمی‌کنند.

معادلات و توابع:

معادلاتی که دارای ۲ متغیر مانند x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه‌ی تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این‌طور نیست که یک معادله‌ی دو متغیره بر حسب x و y حتماً ضابطه‌ی یک تابع را نشان بدهد.

در هر صورت باید اثبات شود که $x_1 = x_2$ بود، $f(x_1) = f(x_2)$ است.

مثال: در کدام‌یک از معادلات زیر y تابعی از x است؟

الف) $x^2 + y = 1$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

هر x یک y تولید می‌کند.

ب) $y^2 - x = 1$

$$y^2 = x + 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+1}$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

ج) $x^2 + y^2 = 25$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

هر x که می‌دهیم دو y تولید می‌کند.

د) $x = |y| + 1$

$$|y| = x - 1 \Rightarrow y = \pm(x - 1)$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

هـ) $y^2 = x^2$

$$y = \pm x$$

هر x که می‌دهیم، دو y تولید می‌کند.

و) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

این رابطه تنها از یک نقطه تشکیل شده است، لذا تابع است.

ز) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+۲=۰$

$\frac{x^۲+y^۲+۲xy}{xy}=۰ \Rightarrow (x+y)^۲=۰ \Rightarrow y=-x$ چون برای هر x یک y تولید می‌کند ، تابع است

راه دوم: می‌دانیم:

$$\begin{cases} a+\frac{۱}{a}\geq ۲ & a>۰ \\ a+\frac{۱}{a}\leq -۲ & a<۰ \end{cases}$$

که تساوی برای $a=\pm۱$ رخ می‌دهد، لذا:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲ \Rightarrow \frac{x}{y}=-۱ \Rightarrow y=-x$$

توابع خاص و حل نامعادله:

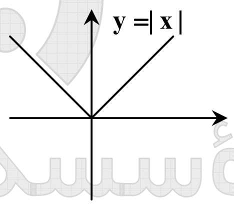
تابع چند جمله‌ای: **توابعی به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۰$ را تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.** $(\forall i; a_i\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N})$

تابع خطی: **هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که حالت خاصی از تابع چند جمله‌ای است.**

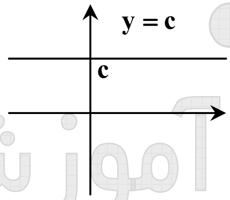
تابع همانی: **اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند. $(f(x)=x)$**

تابع ثابت: **تابع ثابت، تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است $(f(x)=c)$**

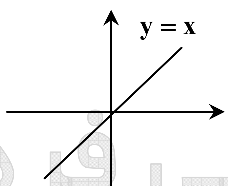
تابع قدرمطلق: **تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.**



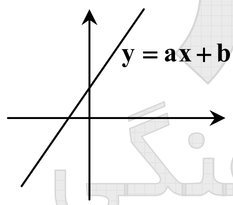
تابع قدرمطلق



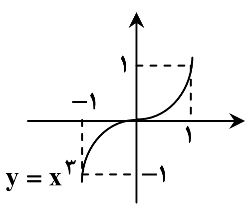
تابع ثابت



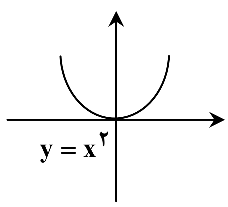
تابع همانی



تابع خطی



چند جمله‌ای درجه ۳



چند جمله‌ای درجه ۲

رسم نمودار تابع:

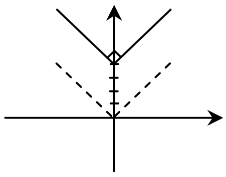
انتقال نمودار تابع:

رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را انتقال نمودار تابع می‌نامند. با داشتن نمودار $y=f(x)$، نمودارهای $y=f(x)+a$ و $y=f(x+a)$ را می‌توان رسم کرد.

☜مثال: به کمک نمودار تابع $y=|x|$ نمودارهای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

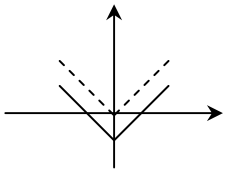
الف) $y=|x|+۴$

$D=\mathbb{R}$
$R_f=[۴,\infty]$



ب) $y=|x|-۱$

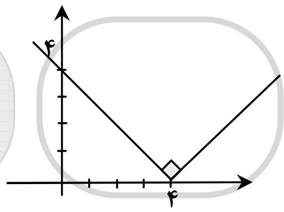
$D=\mathbb{R}$
$R_f=[-۱,\infty]$



اگر $a>۰$ باشد، نمودار به بالا و اگر $a<۰$ باشد، نمودار به پایین حرکت می‌کند.

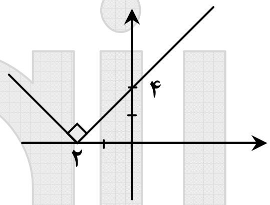
ج) $y=|x-۴|$

$D=\mathbb{R}$
$R=[۰,+\infty)$



د) $y=|x+۲|$

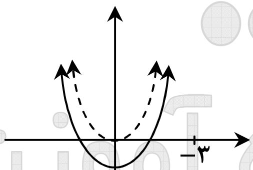
$D=\mathbb{R}$
$R=[۰,+\infty)$



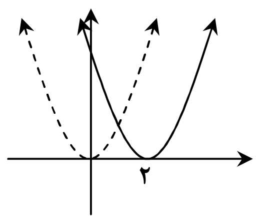
اگر $a>۰$ باشد نمودار به‌سمت چپ و اگر $a<۰$ باشد نمودار به‌سمت راست حرکت می‌کند.

☜مثال: به‌کمک نمودار $y=x^۲$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

هـ) $y=x^۲-۳$

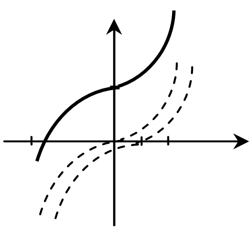


و) $y=(x-۲)^۲$

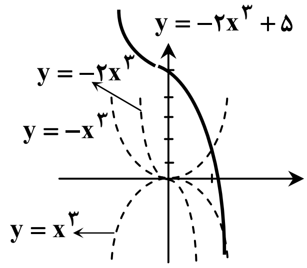


☜مثال: نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $y=x^۳$ رسم کنید.

ز) $y=(x-۱)^۳+۲$



ح) $y=-2x^3+5$



رسم نمودار $y=af(x)$:

نمودار تابع $y=af(x)$ به کمک $y=f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

الف) اگر $a>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)

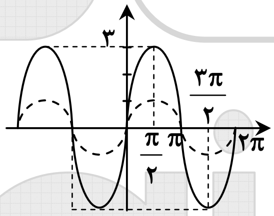
ب) اگر $0<a<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a جمع می‌شود. (انقباض عمودی)

ج) اگر $a<0$ ابتدا نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|a|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

نکته: $y=-f(x)$ قرینه نمودار تابع نسبت به محور xها است.

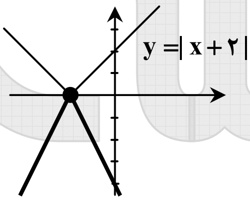
☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=3\sin x$

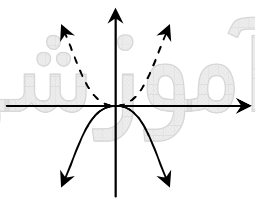


ب) $y=-2|x+2|$

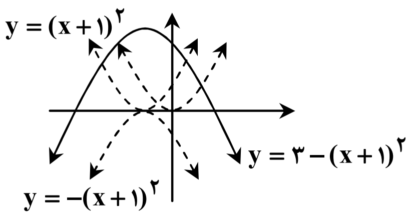
دهانه جمع و قرینه می‌شود.



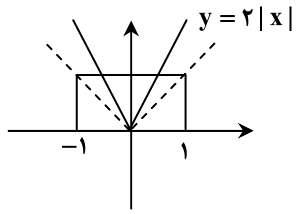
ج) $y=-x^2$



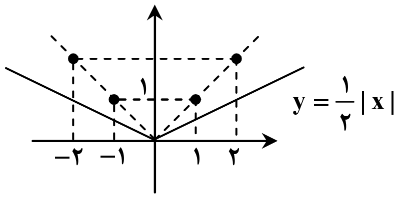
د) $y=-(x+1)^2+3$



هـ) $y=2|x|$



و) $y = \frac{1}{2}|x|$



رسم نمودار $y = f(ax)$

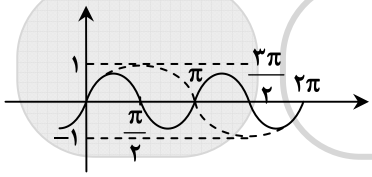
اگر $a > 0$ نمودار $y = f(ax)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد.

در حالتی که $a > 1$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ و در حالتی‌که $a < 1$ نمودار منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.

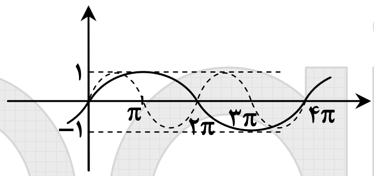
نکته: نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور yها است.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

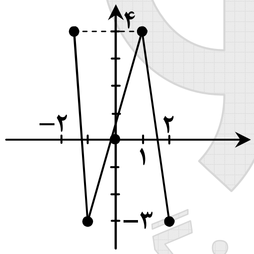
الف) $y = \mathrm{Sin}\, 2x$



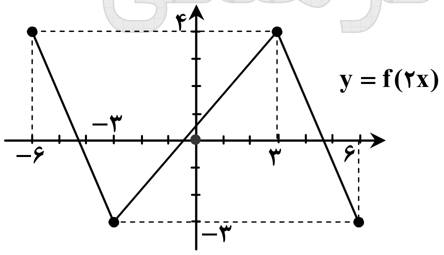
ب) $y = \mathrm{Sin}\, \frac{x}{2}$



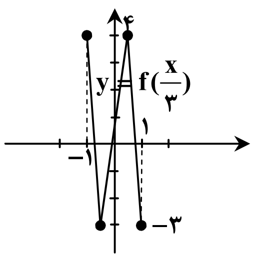
☜مثال: اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y = f(\frac{x}{3})$ و $y = f(2x)$ را رسم کنید.



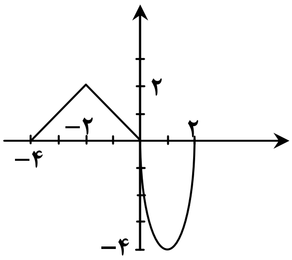
اتفاقی که قبلاً در نقطه‌ی $x = 2$ برای تابع $y = f(x)$ رخ می‌داده، این‌بار در $x = 6$ رخ می‌دهد.

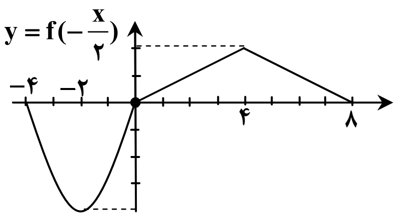


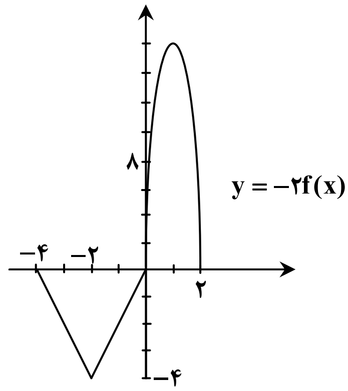
اتفاقی که قبلاً در $x = 2$ رخ می‌داد، این‌بار در $x = 1$ رخ می‌دهد. تابع منقبض می‌شود.



☜مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $y=f(-\frac{x}{2})$ و $y=-2f(x)$ را رسم کنید.







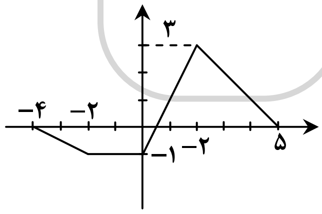
☜مثال: نمودار $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه و برد توابع داده شده را معلوم و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

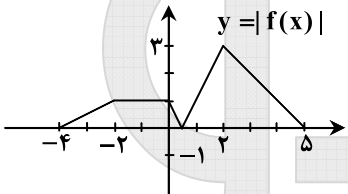
الف) $y=|f(x)|$

ب) $y=f(|x|)$

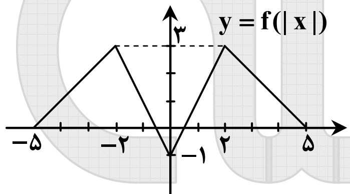
ج) $y=f(-x)$

د) $y=-f(x)$

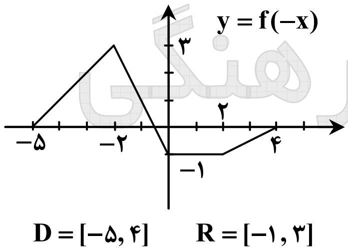




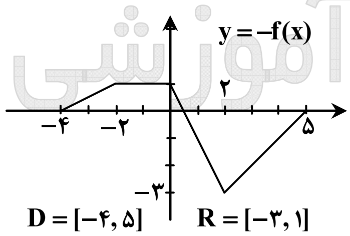
$D=[-4,5]$ $R=[0,3]$



$D=[-5,5]$ $R_f=[-1,3]$



$D=[-5,4]$ $R=[-1,3]$



$D=[-4,5]$ $R=[-3,1]$

توابع گویا:

برخی توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا (یعنی یک کسر) نمایش داد. مثلاً:

$$f(x)=\frac{2}{x+1} \qquad g(x)=\frac{x^2-3x+1}{-\sqrt{x}+7}$$

باید توجه داشت، توابع گویا در ریشه‌های مخرجشان تعریف نشده‌اند، یعنی باید ریشه‌های مخرج را از دامنه حذف نمود.

☜مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{(x-1)}{x^3-3x^2+2x}$

$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

$D=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

ب) $f(x)=\tan(2x+1)$

توجه کنید که $\tan x$ و $\cot x$ توابع کسری محسوب می‌شوند.

دامنه‌ی $\tan x$ برابر است با:

$D_f=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

$2x+1\neq(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}-1 \Rightarrow x\neq(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\}$

ج) $f(x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x-1}}}$

$D_f=x-1\neq0 \rightarrow x\neq1$

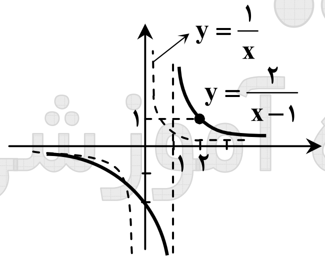
$1-\frac{1}{x-1}\neq0 \rightarrow \frac{1}{x-1}\neq1 \Rightarrow x\neq2$

$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x-1}}\neq0 \rightarrow \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x-1}}\neq1 \rightarrow 1-\frac{1}{x-1}\neq1$

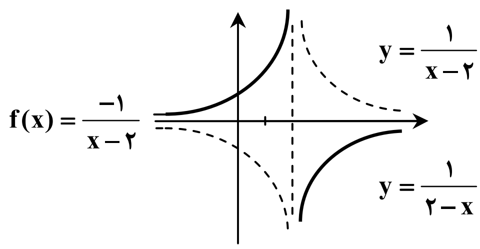
$\frac{1}{x-1}\neq0$ همواره برقرار است. $\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1,2\}$

☜مثال: با توجه به نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\frac{2}{x-1}$

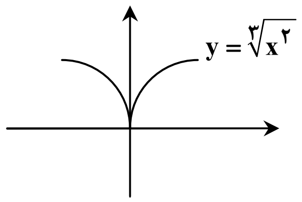


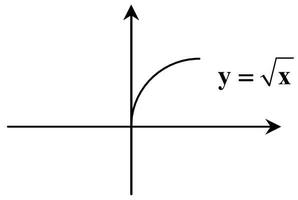
ب) $f(x)=\frac{-1}{2-x}$

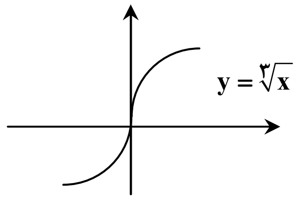


توابع رادیکالی:

توابعی به‌صورت $y=\sqrt[n]{x^m}$ را توابع رادیکالی می‌نامند. مثلاً:



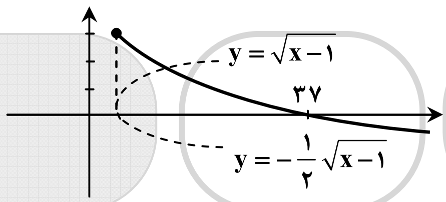




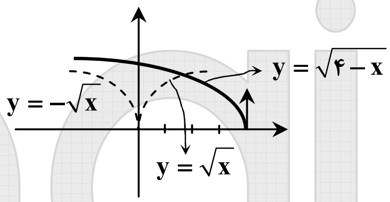
باید توجه داشت توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، مقادیر منفی را نمی‌پذیرند. یعنی دامنه‌ی تعریفشان ورودی‌های مثبت است.

☜مثال: نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}+۳$



ب) $y=\sqrt{۴-x}$



☜مثال: اگر دامنه‌ی تعریف $f(x)=\sqrt{(m-۱)x^{۲}-۲mx+۴}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار m کدام است؟

✍حل: باید زیر رادیکال همواره مثبت باشد، پس $a>۰\ ,\ \Delta<۰$ لذا:

$$m-۱>۰ \Rightarrow m>۱$$

$$\Delta=۴m^{۲}-۱۶(m-۱)<۰ \to m^{۲}-۴(m-۱)<۰ \to (m-۲)^{۲}<۰$$

که این اتفاق امکان‌ناپذیر است، پس هیچ مقداری برای m با این ویژگی یافت نمی‌شود.

☜مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$

		۱	۳
$x-۱$	−	+	+
$x-۳$	−	−	+
$\frac{x-۱}{x-۳}$	+	−	+

		۰	۲
$۲-x$	+	+	−
x	−	+	+
$\frac{۲-x}{x}$	−	+	−

$D_۱=(-\infty,۱]\cup(۳,+\infty)$

$D_۱\cap D_۲=(۰,۱]$

$D_۲=(۰,۲]$

ب) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{۴-x^۲}}$

		-۲	۱	۲
$m-۱$	$-$	$-$	$+$	$+$
$۴-x^۲$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-۱}{۴-x^۲}$	$+$	$-$	$+$	$-$

$D=(-\infty,-۲)\cup[۱,۲)$

ج) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۲}{۴x-۴x^۲-۱}}$

$D=\sqrt{\frac{(x-۲)}{-(۲x-۱)^۲}}=\frac{۱}{|۲x-۱|}\sqrt{۲-x}$

$D=(-\infty,۲]-\{\frac{۱}{۲}\}$

د) $f(x)=\sqrt{\frac{۱-|x|}{۱+|x|}}$

$۱+|x|\geq ۱ \qquad ۱-|x|\geq ۰ \to |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \Rightarrow D_f=[-۱,۱]$

☜مثال: برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۴}$

برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر $[۰,+\infty)$ است. لذا در تابع فوق فقط دامنه تغییر کرده و با تغییر دامنه برد تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد.

$R_f=[۰,\infty)$

ب) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

در این تابع نیز فقط دامنه تحت تأثیر قرار گرفته، لذا: $R_f=[۰,+\infty)$

$f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$

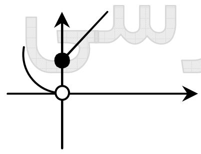
$\sqrt{x+۱}\geq ۰\to -\sqrt{x+۱}\leq ۰ \Rightarrow ۳-\sqrt{x+۱}\leq ۳ \Rightarrow f(x)\leq ۳ \Rightarrow R_f=(-\infty,۳]$

توابع چند ضابطه‌ای:

توابعی که بخش‌های مختلف دامنه‌ی آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند، چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثلاً:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ x^۲ & x<۰ \end{cases}$$



یا تابع $f(x)=|x|$ که در حقیقت عبارتست از:

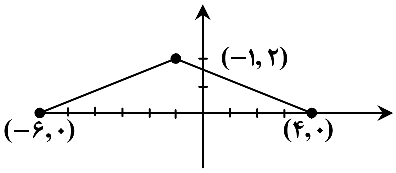
$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

یا:

$$f(x)=|x+۱|+|x-۱|=\begin{cases} ۲x & x\geq ۱ \\ ۲ & -۱<x<۱ \\ -۲x & x\leq -۱ \end{cases}$$

مثال: نمودار تابعی به شکل زیر است. ضابطه‌ی آن را بیابید.

حل:



$$-6 \le x \le -1 : y - 0 = \frac{2-0}{-1-(-6)}(x+6) \Rightarrow y = \frac{2}{5}(x+6)$$

$$-1 \le x \le 4 : y - 0 = \frac{2-0}{-1-4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-2}{5}(x-4)$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+6) & -6 \le x \le -1 \\ -\frac{2}{5}(x-4) & -1 \le x \le 4 \end{cases}$$

مثال: تابع f با مختصات زیر را رسم کرده و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

۱) $f(-5) = -2 \ , \ f(2) = 3$

۲) $D_f = \mathbb{R}$

۳) f در بازه‌ی $[0,2]$ ثابت است.

٤) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

۵) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ی ۳- قطع می‌کند.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3) = 0 \\ f(-5) = -2 \end{array}\right\} \overset{\text{تابع خطی است}}{\Rightarrow} \quad y - 0 = \frac{-2-0}{-5+3}(x+3) = \frac{-2}{-2}(x+3) \Rightarrow y = x+3 \qquad x < 0$$

$$0 \le x \le 2 : f(x) = f(2) = 3$$

$$2 < x : f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \le x \le 2 \\ x+3 & x < 0 \end{cases}$$

تساوی دو تابع:

دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق باشد. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد، ولی روی دیگری واقع نباشد.

اگر دو تابع به‌صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

دو تابع f و g را مساوی نامیم، هرگاه:

الف) دامنه‌ی f و دامنه‌ی g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی مشترک: $f(x) = g(x)$

مثال: کدام‌یک از جفت تابع‌های زیر برابرند؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \\ y(x) = x-1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_g = \mathbb{R}$

با این‌که ضابطه‌شان یکسان است، اما دامنه‌های متفاوتی دارند. لذا برابر نیستند.

ب) $\begin{cases} f(x)=\log x^{2} \\ g(x)=2\log x \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$D_g=\mathbb{R}^{+}$

لذا دو تابع برابر نیستند.

دقت کنید: $\log x^{2}=2\log|x|$

ج) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+\tan^{2}x} \\ g(x)=\cos^{2}x \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad D_g=\mathbb{R}$

لذا دو تابع برابر نیستند.

د) $\begin{cases} f(x)=[x-[x]] \\ g(x)=0 \end{cases}$

$0\le x-[x]<1$ پس $[x-[x]]=0$ لذا دو تابع برابرند چون دامنه‌شان نیز یکسان است.

هـ) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{1+\sqrt{1+x^{2}}}$ $\quad g(x)=\sqrt{1+x^{2}}-1$

$$f(x)=\frac{x^{2}}{1+\sqrt{1+x^{2}}}\times\frac{1-\sqrt{1+x^{2}}}{1-\sqrt{1+x^{2}}}=\frac{x^{2}\times(1-\sqrt{1+x^{2}})}{1-(1+x^{2})}=\sqrt{x^{2}+1}-1$$

چون دامنه‌ی هر دو تابع $\mathbb{R}$ است، پس این دو تابع با هم برابرند.

اعمال جبری روی توابع:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، توابع زیر روی $D_f\cap D_g$ تعریف شده‌اند و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

$(\frac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad g(x)\neq 0$

☜مثال: اگر $f=\{(1,2),(0,7),(3,-4),(4,-3)\}$ و $g(x)=\{(-2,1),(1,4),(0,1),(3,0)\}$ باشد، $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را حساب کنید.

✍حل:

$D_f\cap D_g=\{1,0,3\}$

$f+g=\{(1,6),(0,8),(3,-4)\}$

$f-g=\{(1,-2),(0,6),(3,-4)\}$

$f.g=\{(1,8),(0,7),(3,0)\}$

$\frac{f}{g}=\{(1,\frac{1}{2}),(0,7)\}$

دقت کنید چون $(3,0)\in g$ است در $\frac{f}{g}$، زوجی با عضو ابتدای ۳ وجود نخواهد داشت.

☜مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$، توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به همراه دامنه‌ی آن‌ها به دست آورید.

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} D_f=[-2,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R}-\{3\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f\cap D_g=[-2,+\infty)-\{3\}$$

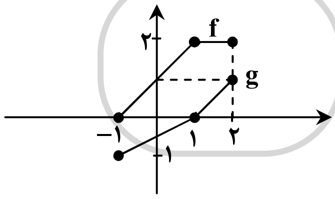
$$f+g=\sqrt{x+2}+\frac{x+1}{x-3}$$

$$f-g=\sqrt{x+2}-\frac{x+1}{x-3}$$

$$f.g=\sqrt{x+2}\times\frac{x+1}{x-3}$$

$$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+2}}{\frac{x+1}{x-3}}=\frac{(x-3)\sqrt{x+2}}{x+1} \qquad D_{(\frac{f}{g})}=[-2,+\infty)-\{-1,3\}$$

☜مثال: نمودار f و g در شکل زیر رسم شده است.



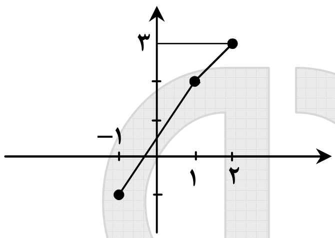
الف) $f+g$ را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای f و g بیابید.

سپس $f+g$ را مستقیماً رسم کنید.

✍حل:

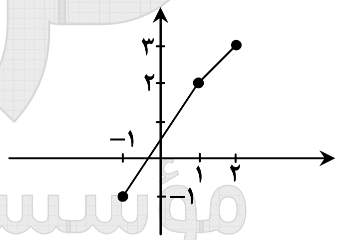
الف)



ب) اگر معادله‌ی خط‌هایی که f و g را تشکیل می‌دهند بنویسیم، خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x<1 \\ 2 & 1\le x<2 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & -1\le x<1 \\ x-1 & 1\le x<2 \end{cases}$$



$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x-1}{2} & -1\le x<1 \\ 2+x-1 & 1\le x<2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2} & -1\le x<1 \\ x+1 & 1\le x<2 \end{cases}$$

☜مثال: فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی با ضابطه‌ی $g(n)=2n$ باشد. اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و تابع $f:A\to\mathbb{N}$ به‌صورت $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ تعریف شود، توابع $2f+g$ و $\dfrac{3f}{g}$ و $\dfrac{1}{f}$ را محاسبه کنید.

✍حل:

ابتدا دامنه‌ی مشترک را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} g=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\} \\ f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2f+g=\{(1,6),(2,10),(3,16),(4,22)\}$$

$$2f+g=\{(1,6),(2,10),(3,16),(4,22)\}$$

$$\frac{3f}{g}=\{(1,3),(2,\frac{9}{4}),(3,\frac{15}{6}),(4,\frac{21}{8})$$

$$\frac{1}{f}=\{(1,\frac{1}{2}),(2,\frac{1}{3}),(3,\frac{1}{5}),(4,\frac{1}{7})\}$$

ترکیب توابع:

فرض کنید **f** و **g** دو تابع باشند که برد **g** زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی **f** باشد، در این صورت **fog** تابعی است که دامنـه‌ی آن همان دامنه‌ی **g** است و برای هر مقدار **x** در این دامنه داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

برای دو تابع **f** و **g** ممکن است که برد **g** زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی **f** نباشد، در این صورت **fog** تابعی است که دامنه‌ی آن تمام دامنه‌ی **g** نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که هم $x \in D_g$ باشد و هم $g(x) \in D_f$.

بنابراین دامنه‌ی **fog** در حالت کلی به شکل زیر است:

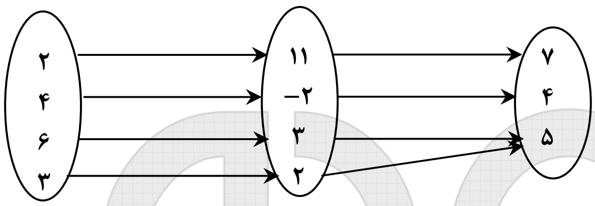
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

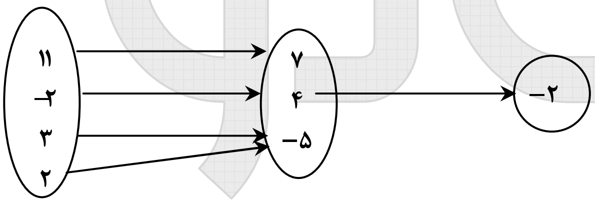
مثال: اگر $g = \{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ و $f = \{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ توابع fog و gof را بـه دست آورید و با نمودار ون نمایش دهید.

حل:

$$fog = \{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$

$$gof = \{(-۲,-۲)\}$$





عضو دیگری در برد f با دامنه‌ی f مشترک نیست.

مثال: برای دو تابع $f(x) = \frac{۱}{x-۳}$ و $g(x) = \frac{۴}{x}$، تابع fog(x) و gof(x) و دامنه‌ی آن را محاسبه کنید.

$$fog(x) = \frac{۱}{\frac{۴}{x} - ۳} \qquad D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$$

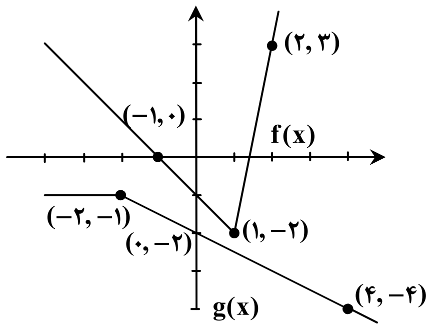
$$D_f : R - \{۳\}$$

$$\frac{۴}{x} \neq ۳ \Rightarrow x \neq \frac{۴}{۳} \Rightarrow D_{fog} = \mathbb{R} - \{۰, \frac{۴}{۳}\}$$

$$D_f : \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$gof(x) = \frac{۴}{\frac{۱}{x-۳}} = ۴(x-۳) \Rightarrow D_{gof} : \mathbb{R} - \{۳\}$$

مثال: با توجه به نمودارهای f و g ، $gof(-5)$، $fog(-\frac{1}{2})$ و $fof(7)$ را به دست آورید.



ابتدا ضابطه‌های f و g که هر یک از دو تابع خطی تشکیل شده‌اند را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} y=\frac{2}{-2}(x+1) & x<1 \\ y+2=\frac{5}{1}(x-1) & x\geq 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -(x+1) & x<1 \\ 5x-7 & x\geq 1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & x<-2 \\ y+1=\frac{1}{-2}(x+2) & x\geq 2\end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} -1 & x<-2 \\ -\frac{x}{2}-2 & x\geq -2\end{cases}$$

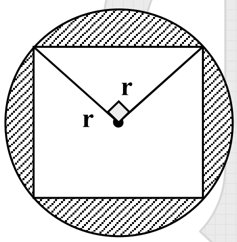
$$gof(-5)=g(4)=-4 \qquad fog(-\frac{1}{2})=f(-\frac{7}{4})=\frac{3}{4}$$

$$fog(7)=f(28)=133$$

مثال: یک فونداسیون بتنی استوانه‌ای شکل به‌عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل مکعب مستطیل شک استفاده می‌شود:

الف) ضلع مخزن را به صورت تابعی از شعاع قاعده‌ی استوانه بنویسید.

ب) مساحت پایه دایره‌ای شکل را به‌عنوان تابعی از شعاع قاعده و تابعی از ضلع مربع بنویسید.



$$x=r\sqrt{2}$$

$$S=\pi r^2=\pi(r\sqrt{2})^2=2\pi r^2$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1 \\ 2x-\frac{3}{4} & x\geq 1\end{cases}$ مقدار $f(f(\frac{3}{4}))$ را به دست آورید.

$$p(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{3}{2})=2\times\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

مثال: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. دامنه‌ی تعریف $(f+2g)of$ را یک بار با به دست آوردن ضابطه و بار دیگر بدون به دست آوردن ضابطه به دست آورید.

$$(f+2g)(x)=\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{x}$$

$$(f+2g)of=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}+2\sqrt{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{x^4}+2\sqrt[4]{1-x^2}=|x^2|+2\sqrt[4]{1-x^2}=x^2+2\sqrt[4]{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 1-x^2\geq 0\rightarrow -1\leq x\leq 1 \qquad D_{(f+2g)of}=[-1,1]$$

مستقیم:

$D_f : -۱ \le x \le ۱$

$D_{f+۲g} : ۰ \le x \le ۱$

اما چون f به‌عنوان ورودی وارد $f+۲g$ می‌شود، همواره $f \ge ۰$ است و برای $-۱ \le x \le ۱$ ، $۰ \le \sqrt{۱-x^۲}$ است که در دامنه‌ی $f+۲g$ قرار می‌گیرد، لذا:

$D_{(f+۲g)of} = D_f = [-۱,۱]$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد، در هر کدام از حالت‌های زیر f را به دست آورید.

الف) $f(f(x)) = ۴x+۳$

$$f(x) = ax+b \to f(f(x)) = a(ax+b)+b = a^۲x+ab+b \equiv ۴x+۳ \Rightarrow a^۲ = ۴ \to a = \pm ۲$$

$$ab+b = ۳ \Rightarrow b(a+۱) = ۳ \Rightarrow \begin{cases} b = ۱ & a = ۲ \\ b = -۳ & a = -۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۲x+۱ \text{ یا } f(x) = -۲x-۳$$

ب) $f(۱-x) = ۵x+۱$

$$f(x) = ax+b \to f(۱-x) = a(۱-x)+b = -ax+a+b \equiv ۵x+۱ \to \begin{cases} a = -۵ \\ a+b = ۱ \end{cases} \Rightarrow b = ۶ \Rightarrow f(x) = -۵x+۶$$

ج) $f(۲x+۳) = ۳x-۲$

$$f(x) = ax+b \Rightarrow f(۲x+۳) = a(۲x+۳)+b \equiv ۳x-۲ \Rightarrow ۲ax+۳a+b \equiv ۳x-۲ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

$$۳a+b = -۲ \Rightarrow b+\frac{۹}{۲} = -۲ \Rightarrow b = -\frac{۹}{۲}-۲ = -\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۲}x-\frac{۱۳}{۲}$$

مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y = f(x)$، مجموعه‌ی $[۳,۹]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = ۲f(\frac{x}{۲}+۵)$ کدام است؟

هر ورودی‌ای به $f(x)$ باید بین ۳ تا ۹ باشد، لذا:

$$۳ \le \frac{x}{۲}+۵ \le ۹ \Rightarrow ۲ \le \frac{x}{۲} \le ۴ \Rightarrow ۴ \le x \le ۸$$

مثال: اگر $D_f = [۴,۱۰]$ و $D_g = [-۲,۲]$ باشند، دامنه‌ی تابع $۳f(۲x) - g(\frac{x}{۲})$ کدام است؟

$۴ \le ۲x \le ۱۰ \Rightarrow ۲ \le x \le ۵$

$-۲ \le \frac{x}{۲} \le ۲ \Rightarrow -۴ \le x \le ۴$

چون جمع و تفریق توابع در داخل دامنه‌ی مشترکشان انجام می‌پذیرد، دامنه‌ها را با هم اشتراک می‌گیریم.

$D = [۲,۴]$

مثال: اگر $f(x) = \frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$ باشد، برد تابع $y = f(\frac{x}{۳})$ چیست؟

چون $D_f = \mathbb{R}$ است و $\frac{x}{۳}$ نیز تمام مقادیر حقیقی را می‌پذیرد لذا برد $f(\frac{x}{۳})$ با برد $f(x)$ یکسان است.

حال چون همواره $x^۲ \le x^۲+۱$ است پس: $۰ \le \frac{x^۲}{x^۲+۱} < ۱$ لذا $۰ \le \frac{۲x^۲}{x^۲+۱} < ۲$

لذا: $۰ \le f(x) < ۲$ پس $۰ \le f(\frac{x}{۳}) < ۲$

مثال: با فرض آن که $f(x-۲)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f(x+۱)$ کدام است؟

$۱-x^۲\geq ۰ \to -۱\leq x\leq ۱ \Rightarrow D_{f(x-۲)}=[-۱,۱] \Rightarrow -۳\leq x-۲\leq -۱ \Rightarrow$ $f(x)$ مقادیر بین ۱- و ۳- را می‌پذیرد.

$\Rightarrow D_{f(x)}=[-۳,-۱] \Rightarrow -۳\leq x+۱\leq -۱ \Rightarrow -۴\leq x\leq -۲ \Rightarrow D_{f(x+۱)}=[-۴,-۲]$

مثال: در توابع زیر fof را محاسبه کنید.

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱۱)\}$

$fof=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$

ب) $f(x)=\dfrac{۱}{۱-x}$

$fof=\dfrac{۱}{۱-\dfrac{۱}{۱-x}}=\dfrac{۱}{\dfrac{۱-x-۱}{۱-x}}=\dfrac{۱-x}{-x}$

ج) $f=\{(۱,۳)(۲,۳),(۱,-۱)\}$

$fof=\{\ \ \}$

چون مؤلفه‌ی دوم هیچ زوجی برابر مؤلفه‌ی اول زوج دیگری نمی‌باشد.

دو مسئله پرکاربرد:

دیدیم با داشتن $g(x)$ و $f(x)$ می‌توان $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را به دست آورد.

حال به دو مسئله‌ی زیر توجه کنید:

الف) با داشتن $f(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $g(x)$ را به دست آوریم:

در این حالت در تابع $f(x)$ به جای xها، $g(x)$ قرار می‌دهیم و در نهایت عبارت را متحد با $f(g(x))$ قرار می‌دهیم. از این‌جا $g(x)$ به‌دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x)=x^۲+۲x$ و $f(g(x))=x^۴-۱$ باشد، $g(x)$ چه تابعی است؟

$f(g(x))=(g(x))^۲+۲(g(x))=x^۴-۱ \Rightarrow g^۲(x)+۲g(x)+۱=(g(x)+۱)^۲=x^۴$

$\Rightarrow g(x)+۱=\sqrt{x^۴}=x^۲ \Rightarrow g(x)=x^۲-۱$

ب) با داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$ از ما بخواهند $f(x)$ را به‌دست آوریم:

در این حالت راه استاندارد، آن است که $g(x)=t$ فرض شود و در تابع $f(g(x))$، $x=g^{-۱}(t)$ جایگذاری شود.

راه بهتر آن است که سعی کنیم در تابع $f(g(x))$، $g(x)$ را بازسازی کنیم. و $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ به‌دست آوریم.

مثال: اگر $f(g(x))=۴x^۲+۴x+۷$ و $g(x)=۲x+۱$، $f(x)$ را بیابید.

راه ۱:

$g(x)=۲x+۱=t \Rightarrow x=\dfrac{t-۱}{۲}$

$f(t)=۴(\dfrac{t-۱}{۲})^۲+۴(\dfrac{t-۱}{۲})+۷=(t-۱)^۲+۲(t-۱)+۷$

$=t^۲-۱+۷=t^۲+۶ \Rightarrow f(x)=x^۲+۶$

مثال: اگر $f(g(x))=x^۲+\dfrac{۱}{x^۲}$ و $g(x)=x-\dfrac{۱}{x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$f(g(x))=(x-\dfrac{۱}{x})^۲+۲ \Rightarrow f(g(x))=g^۲(x)+۲ \Rightarrow f(x)=x^۲+۲$

مسئله گسترده $f(x)$:

گاهی اوقات عبارتی که در آن $f(x)$ برحسب دو تابع مانند $u(x)$ و $v(x)$ بیان شده است را به ما می‌دهند و $f(x)$ را می‌خواهند. در این صورت باید کاری کرد که $u(x)$ به $v(x)$ تبدیل شود و بالعکس و سپس دو معادله دو مجهول حاصل را حل کرد.

مثال: از عبارات زیر $f(x)$ را به‌دست آورید:

الف) $f(x)-2f(-x)=2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-2f(-x)=2x^3 \\ x=-x: f(-x)-2f(x)=-2x^3 \ \rightarrow\ 2f(-x)-4f(x)=-4x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3f(x)=-2x^3 \ \Rightarrow\ f(x)=\frac{2x^3}{3}$$

ب) $2f(x)-f(\frac{1}{x})=3x \qquad x\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2f(x)-f(\frac{1}{x})=3x \ \rightarrow\ 4f(x)-2f(\frac{1}{x})=6x \\ 2f(\frac{1}{x})-f(x)=\frac{3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow 3f(x)=6x+\frac{3}{x}=\frac{6x^2+3}{x} \ \Rightarrow\ f(x)=\frac{6x^2+3}{3x}$$

ج) $3f(\mathrm{Sin}x)+f(\mathrm{Cos}x)=\mathrm{Cos}^2x$

$$3f(\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-x))+f(\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2}-x))=\mathrm{Cos}^2(\frac{\pi}{2}-x) \ \Rightarrow\ 3f(\mathrm{Cos}x)+f(\mathrm{Sin}x)=\mathrm{Sin}^2x$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 3f(\mathrm{Sin}x)+f(\mathrm{Cos}x)=\mathrm{Cos}^2x \\ \quad 3f(\mathrm{Cos}x)+f(\mathrm{Sin}x)=\mathrm{Sin}^2x \ \rightarrow\ 9f(\mathrm{Cos}x)+3f(\mathrm{Sin}x)=3\mathrm{Sin}^2x \end{array}\right\}$$

$$8f(\mathrm{Cos}x)=3\mathrm{Sin}^2x-\mathrm{Cos}^2x=3(1-\mathrm{Cos}^2x)-\mathrm{Cos}^2x$$

$$8f(\mathrm{Cos}x)=3-4\mathrm{Cos}^2x \ \Rightarrow\ f(\mathrm{Cos}x)=\frac{1}{8}(3-4\mathrm{Cos}^2x) \ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{8}(3-4x^2)$$

توابع زوج و فرد:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

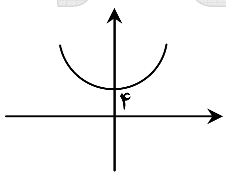
الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد، یعنی اگر $x\in D_f$ است آن‌گاه $-x\in D_f$ باشد.

ب) برای هر $x\in D_f \ : \ f(-x)=f(x)$

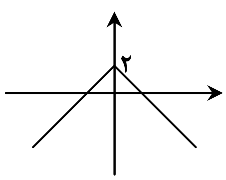
نمودار توابع زوج نسبت به محور yها قرینه است.

مثلاً توابع زیر زوجند:

$f(x)=x^2+4$



$f(x)=2-|x|$



تابع f را فرد نامیم هرگاه:

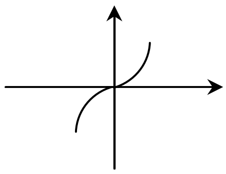
الف) دامنه‌ی آن متقارن باشد.

ب) برای هر $x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

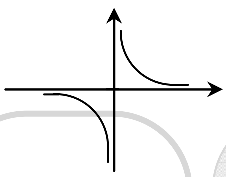
نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

مثلاً توابع زیر فردند:

$f(x) = x^۳$

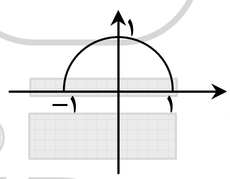


$f(x) = \frac{۱}{x}$



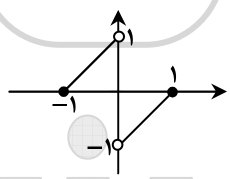
مثال: از روی نمودار تعیین کنید کدام‌یک از توابع زیر زوجند و کدام‌یک فردند؟

الف)



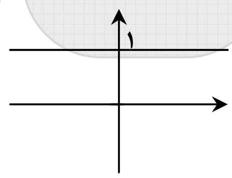
زوج است.

ب)



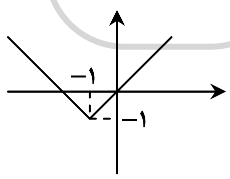
فرد است.

ج)



زوج است.

د)



نه زوج است نه فرد

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(x) = x\sqrt{۵ - x^۲}$

$f(-x) = -x\sqrt{۵ - x^۲} = -f(x) \rightarrow$ f(x) فرد است.

ج) $f(x) = |x|$

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \rightarrow$ f(x) زوج است.

ج) $f(x) = ۲x + \text{Sin}x$

$f(-x) = ۲(-x) + \text{Sin}(-x) = -۲x - \text{Sin}x = -f(x) \rightarrow$ f(x) فرد است

د) $f(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} -۱ & x > ۰ \\ ۱ & x < ۰ \end{cases} = -f(x) \Rightarrow$ f فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن توابع f و g را در زیر تعیین کنید.

$f = \{(-۲, ۵) ، (-۱, ۴) ، (۰, ۳) ، (۱, ۴) ، (۲, ۵)\}$

$f(-۲) = f(۲) = ۵$

$f(-۱) = f(۱) = ۴$

$f(۰) = ۳$

f زوج است.

$g=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۰,۰),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$

$f(-۲)=-f(۲)=۱$

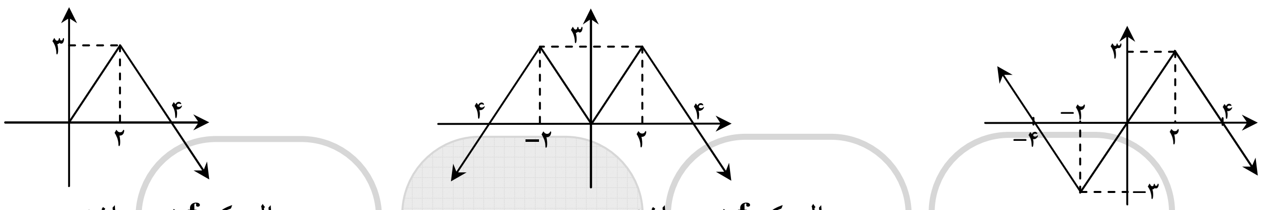
$f(-۱)=-f(۱)=۲$

$f(۰)=۰$

f فرد است.

مثال: اگر تابع $y=f(x)$ در قسمت $x\ge ۰$ به شکل زیر باشد، $f(x)$ را برای $x<۰$ به‌گونه‌ای تعیین کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

بار دیگر $f(x)$ را برای $x<۰$ به‌گونه‌ای تعیین کنید که $f(x)$ نمایش‌دهنده تابع فرد باشد.



حالتی‌که f زوج باشد :   حالتی‌که f زوج باشد :

مثال: اگر f یک تابع زوج و غیرثابت باشد، تعیین کنید در هر یک از حالات زیر آیا g زوج است یا فرد است؟ یا نه زوج است نه فرد؟

الف) $g(x)=-f(x)$

$g(-x)=-f(-x)$. f زوج است. $=-f(x)=g(x)$ g زوج است.

ب) $g(x)=f(-۵x)$

$g(-x)=f(۵x)$. f زوج است. $=f(-۵x)=g(x)\rightarrow$ g زوج است.

ج) $g(x)=f(x)+۳$

$g(-x)=f(-x)+۳=f(x)+۳=g(x)\rightarrow$ g زوج است.

د) $g(x)=-f(x-۳)$

$g(-x)=-f(-x-۳)=-f(x+۳)$

چون $g(-x)$ ارتباطی با $g(x)$ ندارد، $g(x)$ نه فرد است نه زوج است.

نکات توابع زوج و فرد:

۱- داریم: (به‌صورت ستونی بخوانید)

	↓	↓	↓	↓
f	زوج	زوج	فرد	فرد
g	زوج	فرد	زوج	فرد
$f\pm g$	زوج	؟	؟	فرد
$f.g$	زوج	فرد	فرد	زوج
$\frac{f}{g}$ $g\neq ۰$	زوج	فرد	فرد	زوج
fog	زوج	زوج	زوج	فرد

۲- اگر تابع f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد تابع $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}$ تابعی همواره زوج است و تابع $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$ تابعی همواره فرد است.

و چون داریم: $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}+\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$ پس هر تابع فرد را می‌توان به‌صورت جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشت.

مثال: تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲-\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱$ را به‌صورت جمع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

$$\text{جزء زوج}: \frac{f(x)+f(-x)}{۲}=\frac{(x^۳+۲x^۲-\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱)+(-x^۳+۲x^۲+\frac{۱}{x}+\sqrt{۱-x^۲}-۱)}{۲}=۲x^۲+\sqrt{۱-x^۲}-۱$$

$$\text{جزء فرد}: \frac{f(x)-f(-x)}{۲}=x^۳-\frac{۱}{x}$$

نتیجه: در چند جمله‌ای ها، جملات با درجه‌ی فرد اجزای فرد تابع و جملات با درجه‌ی زوج، اجزای زوج تابع‌اند.

مثال: اگر تابع $f(x)=x^۳+(a+۲)x^۲-\frac{۱}{x}$ تابعی فرد باشد. a کدام است؟

باید جمله درجه زوج نداشته باشیم، پس: $a=-۲$

۳- تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد تابع ثابت: $f(x)=۰$ است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x)=f(x) \\ f(-x)=-f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-f(x) \Rightarrow ۲f(x)=۰ \Rightarrow f(x)=۰$$

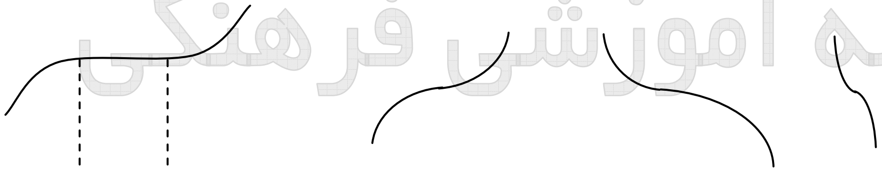
مثال: تابع $f(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]$ از لحاظ زوج یا فرد بودن چگونه است؟

چون همواره صورت کسر از مخرج کسر کوچک‌تر است لذا: $۰\le\frac{x^۲}{x^۲+۱}<۱$ است. پس $[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]=۰$ است. لذا این تابع هم زوج و هم فرد است.

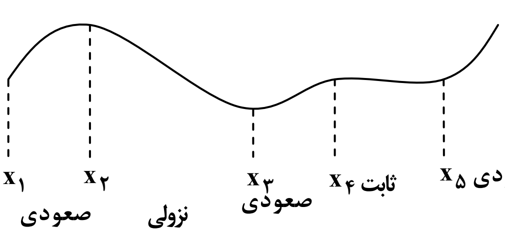
تابع صعودی، تابع نزولی:

تابع $f(x)$ را صعودی نامیم، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه که $x_۱<x_۲$ بود، $f(x_۱)\le f(x_۲)$ باشد و اگر $f(x_۱)<f(x_۲)$ باشد، تابع را صعودی اکید می‌نامیم.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم، هرگاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه که $x_۱<x_۲$، $f(x_۱)\ge f(x_۲)$ باشد. و اگر $f(x_۱)>f(x_۲)$ باشد، تابع را نزولی اکید می‌نامیم.

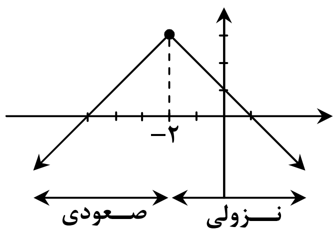


یادآوری می‌کنیم تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو $x_۱$ و $x_۲$ از دامنه‌ی f داشته باشیم: $f(x_۱)=f(x_۲)$. ثابت ثابت هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. البته توابع می‌توانند در قسمتی از دامنه‌ی‌شان صعودی و در قسمت دیگری نزولی باشند، مانند تابع زیر که صعودی یا نزولی نیست اما در قسمتی از دامنه صعودی و در قسمت نزولی است.



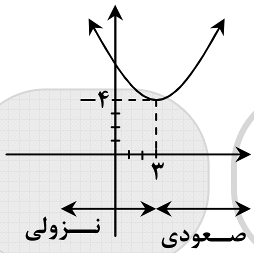
مثال: با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید هر کدام در دامنه‌شان در کدام قسمت صعودی و در کدام قسمت نزولی و در کدام قسمت ثابتند؟

الف) $f(x) = -|x+2|+3$



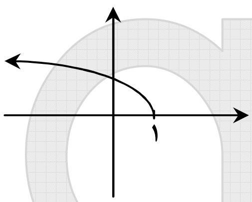
نه صعودی نه نزولی

ب) $f(x) = x^2 - 6x + 10$



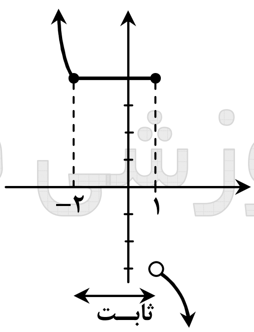
نه صودی نه نزولی

$f(x) = \sqrt{1-x}$



تابع نزولی اکید است

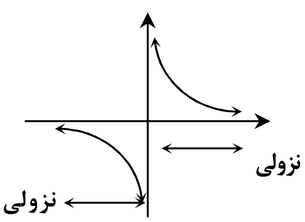
د) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le -2 \\ 4 & -2 \le x \le 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$



تابع نزولی است

هـ) $f(x) = \frac{1}{x}$

تابع نه صعودی است نه نزولی



نکته: داریم: (ستونی بخوانید)

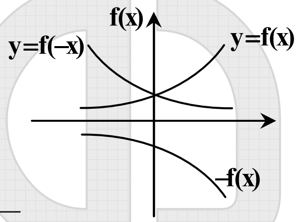
	↓	↓	↓	↓
f	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی
g	صعودی	نزولی	صعودی	نزولی
fog	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

اثبات:

$x_2 > x_1 \xrightarrow{g \text{ صعودی}} g(x_2) \ge g(x_1)$ $\begin{cases} \text{f نزولی} : f(g(x_2)) \le f(g(x_1)) \text{ نزولی fog} \\ \text{f صعودی} : f(g(x_2)) \ge f(g(x_1)) \text{ صعودی fog} \end{cases}$

$x_2 > x_1 \xrightarrow{g \text{ نزولی}} g(x_2) \le g(x_1)$ $\begin{cases} \text{f صعودی} : f(g(x_2)) \le f(g(x_1)) \text{ نزولی fog} \\ \text{f نزولی} : f(g(x_2)) \ge f(g(x_1)) \text{ صعودی fog} \end{cases}$

نکته: تابع $-f(x)$ و $f(-x)$ از لحاظ صعودی یا نزولی بودن برخلاف $f(x)$ است. (یعنی اگر $f(x)$ صعودی باشد، $f(-x)$ و $-f(x)$ نزولی است.)



مثال: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

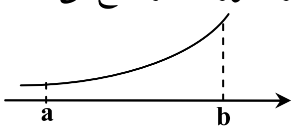
الف) $y = \sqrt{2 - 3x}$

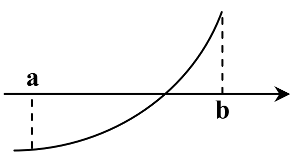
تابع $f(x) = 2 - 3x$ نزولی است و تابع $g = \sqrt{x}$ صعودی است در نتیجه gof نزولی است.

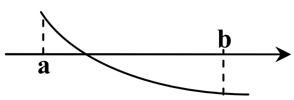
ب) $y = Cos^{-1}(2x - 1)$

تابع $f(x) = 2x - 1$ صعودی و تابع $g(x) = Cos^{-1}(x)$ نزولی است در نتیجه gof نزولی است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، در این بازه حداکثر یکبار محور xها را قطع می‌کند.





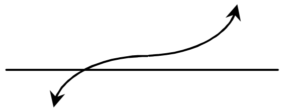


تابع یک‌به‌یک:

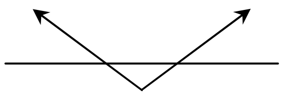
تابع تعریف شده بین دو مجموع یک‌به‌یک است هرگاه به هر عضو مجموعه دوم بیش از یک عضو از مجموعه اول نظیر نشود.

لذا در یک تابع یک‌به‌یک هر عضو برد تصویر تنها یک عضو از دامنه است.

به‌طور کلی یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



یک به یک است



یک به یـک نیسـت

از لحاظ ریاضی می‌توان گفت تابع f یک‌به‌یک است هرگاه:

$x_1, x_2 \in D_f$ اگر $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

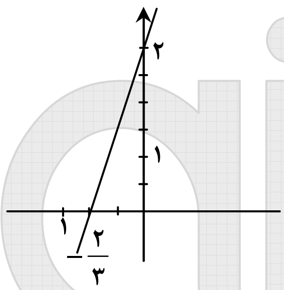
یا می‌توان گفت:

اگر $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

یک‌به‌یک بودن را هم می‌توان با توجه به نمودار و هم می‌توان با توجه به شرط بالا تحقیق کرد.

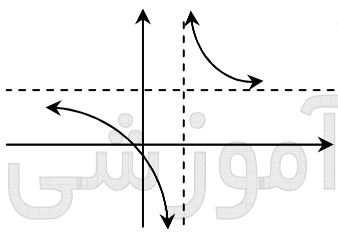
مثال: ثابت کنید توابع زیر یک‌به‌یک‌اند.

الف) $f(x) = 3x + 2$



اثبات جبری: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

ب) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

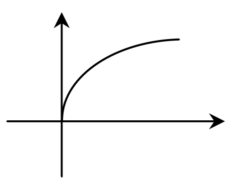


هر خط موازی محور xها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Rightarrow -2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1 \Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ج) $f(x) = \sqrt{x}$

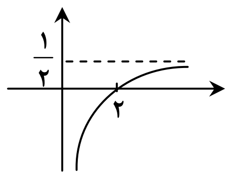


هر خط موازی محور xها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

د) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x^2}$ $\qquad x\geq 0$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$$



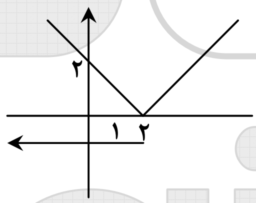
هر خط موازی محور x ها تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2}{x_1^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{x_2^2} \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2$$

گاهی اوقات توابعی روی همه دامنه‌ی شان یک‌به‌یک نیستند. اما با کوچک کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک‌به‌یک بسازیم.

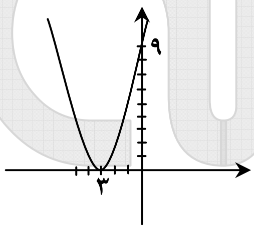
مثال: با محدود کردن دامنه‌ی هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $y=|x-2|$



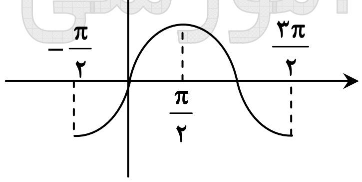
روی بازه‌های $[2,+\infty)$ و $(-\infty,2]$ جداگانه یک‌به‌یک است.

ب) $y=(x+3)^2$



روی بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[-3,+\infty)$ جداگانه یک‌به‌یک است.

ج) $y=\text{Sin}x$ $\qquad [-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$



روی بازه‌های $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ جداگانه یک‌به‌یک است.

وارون یک رابطه

اگر در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم هر یک از زوج‌های مرتب را عوض کنیم، وارون رابطه‌ی R به‌دست می‌آید.

$$R^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in R\}$$

مثلاً اگر $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)\}$ باشد، آن‌گاه:

$$R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3),(4,1)\}$$

نکات:

۱- دامنه R برد R^{-1} و برد R دامنه R^{-1} است.

۲- در حالتی که رابطه به‌صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، با پیدا کردن قرینه هر نقطه از نمودار نسبت به خط $y = x$ (نیم‌ساز ربع اول و سوم)، نمودار وارون آن به‌دست می‌آید.

تابع معکوس یا تابع وارون:

اگر وارون تابعی مانند f، خود یک تابع باشد، آن را «تابع وارون» f می‌نامیم (تابع معکوس). در این‌صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم. توجه کنید که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a) = b$ آن‌گاه: $f^{-1}(b) = a$ برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم. تعریف زوج مرتبی f^{-1} به‌صورت زیر است:

$$f^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in f \}$$

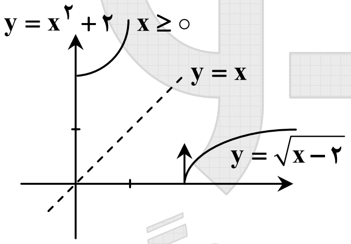
شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری f آن است که f یک‌به‌یک باشد.

یافتن ضابطه تابع وارون:

برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال: ضابطه‌ی وارون توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$



$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

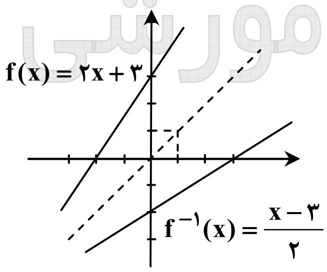
$$y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{y \geq 0} x - 2 = y^2 \Rightarrow x = 2 + y^2 = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

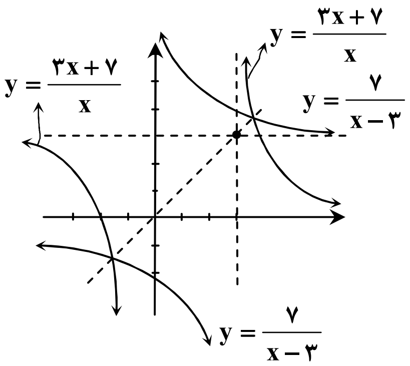
ب) $f(x) = 2x + 3$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} = f^{-1}(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$



ج) $f(x) = \frac{7}{x-3}$



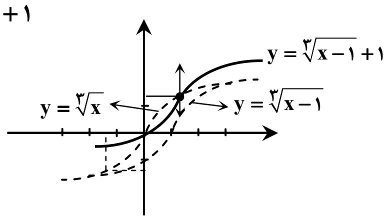
$$y = \frac{7}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = 7$$

$$\Rightarrow 3y = yx - 7$$

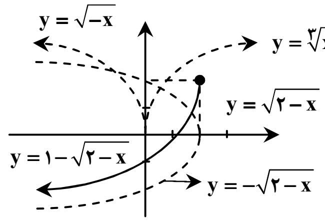
$$x = \frac{3y+7}{y} = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{x}$$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt[3]{x-1}+1$



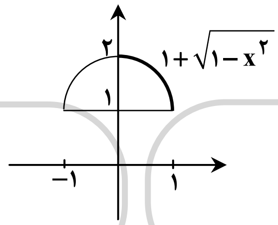
ب) $y=1-\sqrt{2-x}$



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ روی دامنه‌ی $[0,1]$ یک به یک است و وارون آن را به‌دست آورید.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\sqrt{1-x_1^2}=1+\sqrt{1-x_2^2}\Rightarrow 1-x_1^2=1-x_2^2\Rightarrow -x_1^2=-x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2\xrightarrow{x_1,x_2\geq 0}x_1=x_2\rightarrow$$ f یک به یک است.

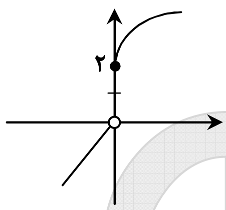


$$y=1+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=y-1\Rightarrow 1-x^2=(y-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2=1-(y-1)^2\xrightarrow{x\geq 0}x=\sqrt{1-(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{2y-y^2}\rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{2x-x^2}$$

مثال: در مورد وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ \sqrt{x}+2 & x\geq 0\end{cases}$ تحقیق کنید و در صورت وارون‌پذیری، وارون آن را بیابید.



برای وارون‌پذیری توابع چند ضابطه‌ای اولاً تک‌تک ضوابط باید یک‌به‌یک باشند. ثانیاً برد ضابطه‌های مختلف نباید با هم اشتراک داشته باشند.

این دو موضوع در مورد تابع فوق‌الذکر هر دو صادقند.

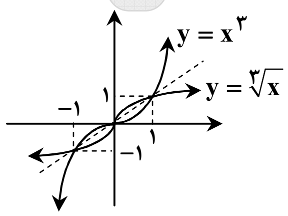
لذا معکوس تک‌تک ضابطه‌ها را به‌دست می‌آوریم. البته دقت کنید دامنه‌ی f^{-1} همان برد f است.

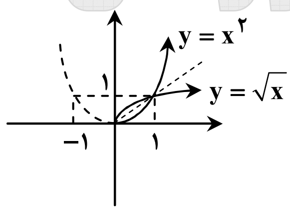
$$\begin{cases}y=x\rightarrow x=y\rightarrow f^{-1}(x)=x & x<0\\ y=\sqrt{x}+2\rightarrow\sqrt{x}=y-2\xrightarrow{y\geq 2}x=(y-2)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2 & x\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x & x<0\\ (x-2)^2 & x\geq 2\end{cases}$$

مثال: نمودار توابع $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ را به کمک نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$ رسم کنید.

چون $y=\sqrt{x}$ وارون تابع $y=x^2$ (برای $x>0$) و $y=\sqrt[3]{x}$ وارون تابع $y=x^3$ است، خواهیم داشت:





مثال: نشان دهید وارون تابع $y=\dfrac{ax+b}{x-a}$ بر خودش منطبق است.

$$y=\frac{ax+b}{x-a}\Rightarrow xy-ay=ax+b\Rightarrow x(y-a)=ay+b$$

$$\Rightarrow x=\frac{ay+b}{y-a}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{ay+b}{y-a}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-a}$$

نکته: در حالت کلی در صورتی‌که در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$، $a=-d$ باشد، وارون f بر خودش منطبق است. (از لحاظ نمودار مرکز تقارن منحنی روی خط $y=x$ قرار گرفته است.)

مثال: تابع $f(x)=ax+b$، $a\neq 0$ داده شده است. همه مقادیر a و b را به‌ازای آن‌ها: $f^{-1}(x)=f(x)$ باشد، را بیابید.

$$y=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a} \xrightarrow[\text{باید ضرایب یکسان داشته باشند.}]{\text{برای آن‌که دو عبارت متحد باشند،}} \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\pm 1 \\ b=-\frac{b}{a} \Rightarrow a=-1 \end{array}\right\} \overset{\cap}{\Rightarrow} a=-1$$

یعنی اگر وارون یک تابع خطی بخواهد بر خود تابع منطبق باشد، باید این خط بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

مثال: اگر $y=m_1x+h_1$ و $y=m_2x+h_2$ معادله‌ی دو خط باشد که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید:

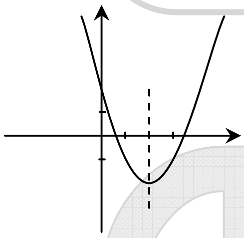
$$m_1m_2=1$$

در واقع یکی از این دو خط وارون دیگری است:

$$y=m_1x+h_1 \Rightarrow x=\frac{y-h_1}{m_1}=\frac{1}{m_1}y-\frac{h_1}{m_1} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{m_1}y-\frac{h_1}{m_1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m_1}x-\frac{h_1}{m_1} \overset{\text{باید دو عبارت متحد باشند.}}{=\!=\!=\!=} m_2x+x_2 \Rightarrow \frac{1}{m_1}=m_2 \Rightarrow m_1m_2=1 - \frac{h_1}{m_1}=h_2$$

مثال: تابع $y=x^2-4x+2$ را به دو جزء یک‌به‌یک تفکیک کنید و در هر بخش معکوس آن را جداگانه بیابید.



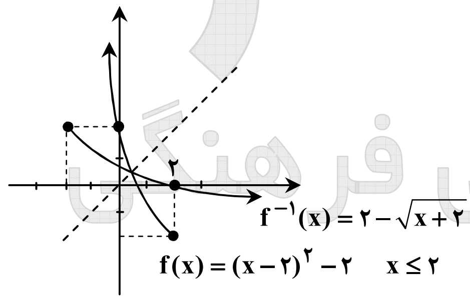
$$y=(x-2)^2-2$$

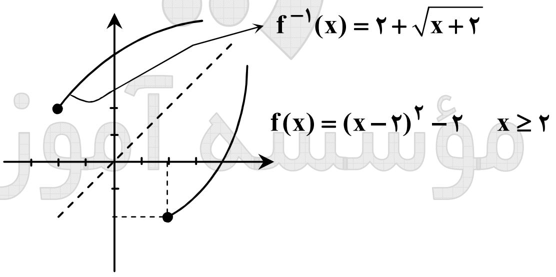
برای $x\geq 2$ و $x\leq 2$ تابع یک‌به‌یک است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2=y+2 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{y+2}$$

$$x\geq 2 \rightarrow x-2\geq 0 \xrightarrow{\sqrt{y+2}\geq 0} x-2=\sqrt{y+2} \Rightarrow x=2+\sqrt{y+2}$$

$$x\leq 2 \rightarrow x-2\leq 0 \xrightarrow{-\sqrt{y+2}\leq 0} x-2=-\sqrt{y+2} \Rightarrow x=2-\sqrt{y+2} \Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+2}$$



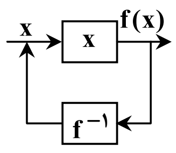


نکات وارون یک تابع:

۱- اگر f^{-1} وارون f باشد، داریم:

$$D_f=R_{f^{-1}} \qquad R_f=D_{f^{-1}}$$

۲- داریم:



$$f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x \qquad x\in D_f$$

$$fof^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x \qquad x\in D_{f^{-1}}$$

۳- $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

۴- وارون یک تابع صعودی تابعی صعودی و وارون یک تابع نزولی، تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f = \{(1,3),(2,4)\}$ باشد، f^{-1} را به‌دست آورید، سپس $f^{-1}of$ و fof^{-1} را نیز بیابید. آیا این دو تابع همواره برابرند؟

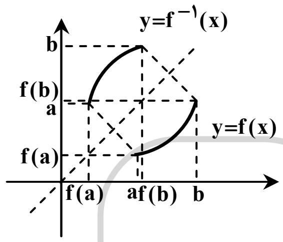
$f^{-1} = \{(3,1),(4,2)\}$

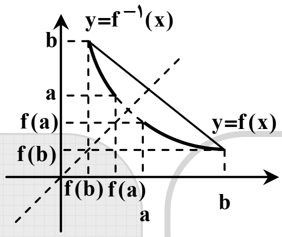
$f^{-1}of = \{(1,1),(2,2)\}$ $\qquad D_f = \{1,2\}$

$fof^{-1} = \{(3,3),(4,4)\}$ $\qquad D_{f^{-1}} = \{3,4\}$

دقت می‌کنید که هر دو تابع نسبت به دامنه تعریفشان همانی‌اند، اما با هم برابر نیستند.

۵- اگر $f(x)$ روی $[a,b]$ نزولی باشد. $f^{-1}(x)$ روی $[f(b),f(a)]$ نزولی است.





راه حل کلی یافتن برد توابع معکوس‌پذیر:

همان‌طور که گفتیم برای هر تابع و معکوس آن همواره:

$D_f = R_{f^{-1}}$

$D_f = D_{f^{-1}}$

یعنی همواره برد یک تابع معکوس‌پذیر برابر است با دامنه‌ی تابع معکوس آن.

از این راه حل در مورد توابع غیر یک‌به‌یک نیز می‌توان گاهی بهره برد، البته با در نظر گرفتن این دقت که معکوس آن ممکن است تابع نباشد.

البته در مورد توابعی که نامساوی‌هایی در مورد آن‌ها می‌دانیم می‌توانیم از آن نامساوی‌ها نیز استفاده کنیم (مانند توابع مثلثاتی یا براکتی).

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$\Rightarrow x^2y + y = x^2 \Rightarrow x^2(y-1) + y = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{y}{1-y}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \xrightarrow{\text{دامنه‌ی } f^{-1} \text{ را تعیین می‌کنیم}} \dfrac{y}{1-y} \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} y & & 0 & & 1 & \\ \hline \dfrac{y}{1-y} & - & 0 & + & \text{ت.ن} & - \end{array} \Rightarrow 0 \leq y < 1 \to R = [0,1)$$

ب) $y = x^2 - 2x$

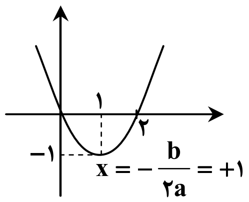
$(x-1)^2 = y+1 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y+1} \xrightarrow{\text{دامنه‌ی } f^{-1} \text{ را تعیین می‌کنیم}} y+1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow R = [-1,+\infty]$

راه دوم:

$y = (x-1)^2 - 1$

می‌دانیم همواره $x^2 \geq 0$ است پس: $y = (x-1)^2 - 1 \geq -1$

راه سوم:



ج) $y=\frac{x^۲+۱}{x}$

$$yx=x^۲+۱ \Rightarrow x^۲-yx+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{+y\pm\sqrt{y^۲-۴}}{۲}$$

حال دامنه‌ی تابع فوق را می‌یابیم:

$y^۲-۴\geq ۰$ پس: $\begin{cases} y\geq ۲ \\ y\leq -۲\end{cases}$

راه دوم: نکته: داریم:

$$x+\frac{۱}{x}:\begin{cases} \geq ۲ & x>۰ \\ \leq -۲ & x<۰\end{cases}$$

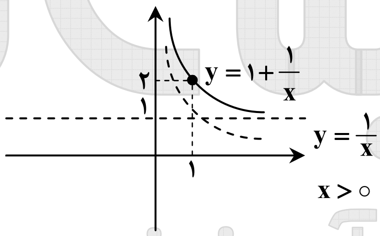
مثال: ثابت کنید $f(x)=\frac{|x|+۱}{|x|}$ زوج است و با استفاده از آن برد تابع را به‌دست آورید.

f تابعی زوج است:

$$f(-x)=\frac{|-x|+۱}{|-x|}=\frac{|x|+۱}{|x|}=f(x)$$

لذا کافی است برد را برای $x>۰$ به‌دست آوریم، چون برد قسمت $x<۰$، همان برد $x\geq ۰$ است. (به جهت تقارن تابع نسبت به محور yها)

$$x>۰: f(x)=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$$



برد تابع برای $x>۰$, $R=(۱,+\infty)$ است. پس برد کامل تابع همین است.

البته راه اصلی پیدا کردن برد تابع آن است که دامنه‌ی تابع معکوس تابع $y=f(x)$ را به‌دست آوریم:

$$y=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x} \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{x} \xrightarrow{x>۰} x=\frac{۱}{y-۱} \xrightarrow{\frac{۱}{y-۱}>۰} f^{-۱}(y)=\frac{۱}{y-۱}>۰ \to y>۱$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید برد f همان دامنه‌ی $f^{-۱}$ است. که یافتن دامنه‌ی $f^{-۱}$ نهایتاً منجر به یافتن محدوده‌ی تغییرات y می‌شود.

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})$$

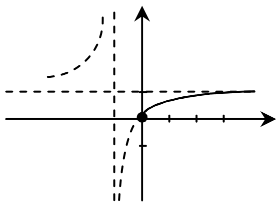
$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{x^۲+۱}) \overset{\text{ضرب در مزدوج}}{=} \log(\frac{(-x^۲+(x^۲+۱))}{x+\sqrt{x^۲+۱}})=\log\frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$$

$=\log(x+\sqrt{x^۲+۱})^{-۱}=-\log(x+\sqrt{x^۲+۱})=-f(x)$ فرد است. $f(x)$

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد f را بیابید.

$f(-x)=\frac{-x}{|-x|+1}=\frac{-x}{|x|+1}=-f(x) \rightarrow$ فرد است. $f(x)$

اگر برد $f(x)$ در قسمت $x \geq 0$ را بیابیم. برد تابع در قسمت $x<0$ قرینه برد تابع در $x \geq 0$ است.



$x \geq 0 : y=\frac{x}{x+1}$

$R=[0\ ,\ 1)$

حالا برای $x<0$، $-1<y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

راه ۲: چون صورت همواره از مخرج کوچک‌تر است، پس $0 \leq \frac{x}{x+1}<1$ است.

حالا برای $x<0$، $-1<y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

راه ۳:

$y=\frac{x}{x+1} \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} yx+y=x \Rightarrow x(y-1)=-y \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow$

		0		1	
y	$-$	0	$+$		$+$
$1-y$	$+$		$+$		$-$
$\frac{y}{1-y}$	$-$	0	$+$	تعریف نشده	$-$

$\Rightarrow 0 \leq y<1$

حالا برای $x<0$، $-1<y \leq 0$ است. لذا برد تابع $-1<y<1$ است.

توابع متناوب:

حرکاتی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند، حرکت متناوب می‌نامند.

تابع f را متناوب می‌نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$(x, x+T \in D_f) \qquad f(x+T)=f(x)$

کوچک‌ترین عدد T با خاصیت بالا را دوره‌ی تناوب می‌نامند.

نکات:

۱- دوره تناوب توابع $f(x)=Cos(ax+b), f(x)=Sin(ax+b)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

و دوره تناوب توابع $f(x)=Cot(ax+b)\ ,\ f(x)=tan(ax+b)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

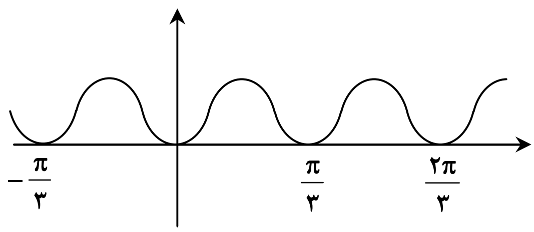
۲- دوره تناوب توابع: $f(x)=Cos^2ax\ ,\ f(x)=Sin^2ax\ ,\ f(x)=|Cosax|\ ,\ f(x)=|Sinax|$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

۳- دوره تناوب تابع $f(x)=n(x)-[nx]$ برابر $T=\frac{1}{n}$ است.

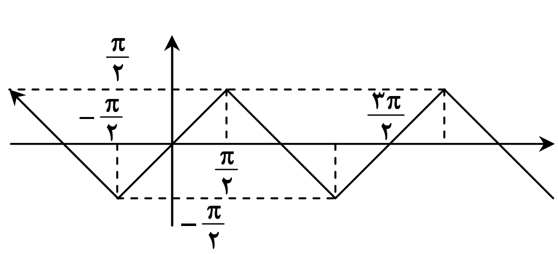
مثال: دوره تناوب توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.

الف) $f(x)=Sin^2 3x$

$T=\frac{\pi}{3}$



ب) $f(x)=\mathrm{Sin}^{-۱}(\mathrm{Sin}x)$

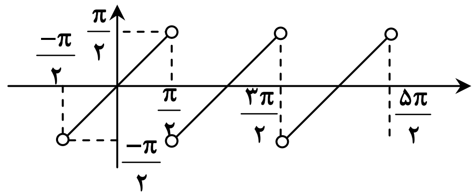


$T=۲\pi$

$-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲}\ \rightarrow\ -۱\le \mathrm{Sin}\le ۱\Rightarrow\ -\frac{\pi}{۲}\le \mathrm{Sin}^{-۱}(\mathrm{Sin}\,x)=x\le\frac{\pi}{۲}$

$\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}\ \rightarrow\ -۱\le \mathrm{Sin}\le ۱\Rightarrow\ -\frac{\pi}{۲}\le \mathrm{Sin}^{-۱}(\mathrm{Sin}\,x)=x\le\frac{\pi}{۲}$

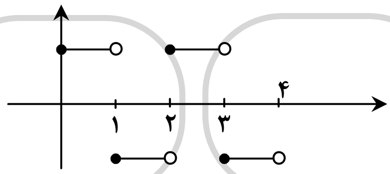
ج) $f_{(x)}=\tan^{-۱}(\tan x)$



$-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\ \rightarrow\ -\infty<\tan x<\infty\ \rightarrow\ -\frac{\pi}{۲}<\tan^{-۱}(\tan x)=x<\frac{\pi}{۲}$

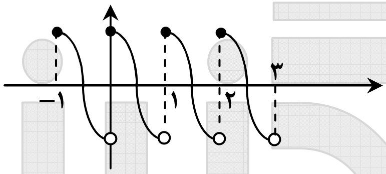
$T=\pi$

د) $f(x)=(-۱)^{[x]}$



$T=۲$

هـ) $f(x)=\mathrm{Cos}\pi(x-[x])$

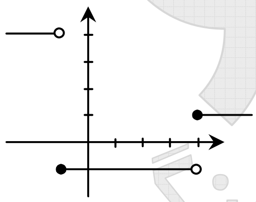


$T=۱$

توابع پله‌ای:

هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: تابع پله‌ای $f(x)=\begin{cases} ۵ & x<-۱ \\ -۱ & -۱\le x<۴ \\ ۲ & ۴\le x \end{cases}$ را رسم کنید.



تابع جزء صحیح:

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیش‌تر نیست (یعنی یا مساوی با آن است یا کوچک‌تر از آن است). جزء صحیح x را با نماد [x] نمایش می‌دهیم.

تابعی‌که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x)=[x]$ نمایش داده می‌شود.

نکات:

۱- همواره داریم:

$[x]\le x<[x]+۱$

یا

$x-۱<[x]\le x$

از این‌جا نتیجه می‌شود: $۰\le x-[x]<۱$

۲- اگر $k \le \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$[x+k]=[x]+k$$

۳-

$$[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$$

$$[3x]=[x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]$$

$$\vdots$$

$$[nx]=[x]+[x+\frac{1}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]$$

اثبات: برای نمونه اولین رابطه را اثبات می‌کنیم.

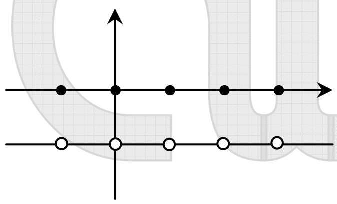
اگر α جزء اعشاری عدد باشد: $\quad 0\le\alpha<1 \qquad x=[x]+\alpha$

$$\begin{cases} 0\le\alpha<\frac{1}{2} \rightarrow [2x]=[2([x]+\alpha)]=2[x]+[2\alpha]=2[x]+\underbrace{\overbrace{[2\alpha]}^{0}}_{0\le 2\alpha<1}=2[x] \\ \frac{1}{2}\le\alpha<1 \rightarrow [2x]=[2([x]+\alpha)]=2[x]+\underbrace{[2\alpha]}_{1\le 2\alpha<2}=2[x]+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le\alpha<\frac{1}{2} \rightarrow [x]+[x+\frac{1}{2}]=2[x] \\ \frac{1}{2}\le\alpha<1 \rightarrow [x]+[x+\frac{1}{2}]=2[x]+1 \end{cases}$$

۴-

$$[x]+[-x]=\begin{cases} -1 & x\notin\mathbb{Z} \\ 0 & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

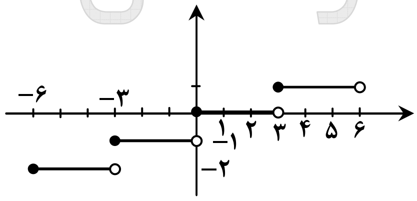


نتیجه:

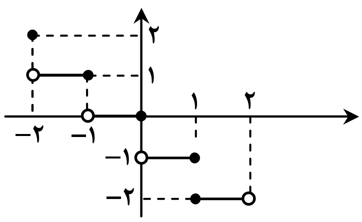
$$[-x]=\begin{cases} -[x] & x\in\mathbb{Z} \\ -1-[x] & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

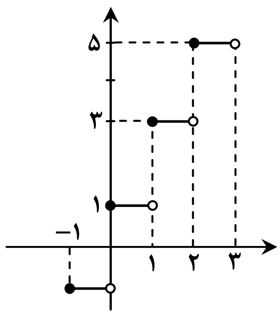
مثال: نمودار توابع زیر را در بازه‌های خواسته شده به‌دست آورید.

$f(x)=[\frac{x}{3}] \qquad [-6,6]$



$f(x)=[-x] \qquad [-2,2]$





$f(x)=2[x]+1$ $\qquad [-1,3]$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{1-[3-\sqrt{x}]}$

$1-[3-\sqrt{x}]=1-3-[-\sqrt{x}]\ge 0 \Rightarrow [-\sqrt{x}]\le -2 \Rightarrow -\sqrt{x}<-1 \Rightarrow \sqrt{x}>1 \Rightarrow x>1$

ب) $f(x)=\dfrac{x}{[x]+[-x]}$

$[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

پس دامنه‌ی این تابع عبارت است از: $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-[x]}{x^2+x+1}}$

$x^2+x+1:\Delta=1-4<0 \rightarrow$ مخرج همواره مثبت است

$f(x)=\dfrac{1}{[|x|]}\ ,\ [|x|]\ne 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}|x|\ge 2 \Rightarrow \begin{matrix}x\ge 2\\ x\le -2\end{matrix}\\ |x|<1 \Rightarrow -1\le x\le 1\end{matrix}\right\} D=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,\infty)$

مثال: برد تابع $f(x)=\sqrt{x-9[\frac{x}{9}]}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$f(x)=\dfrac{1}{[|x|]-1}$

$x-9[\frac{x}{9}]=9(\frac{x}{9}-[\frac{x}{9}])$

می‌دانیم $0\le x-[x]<1$ پس: $0\le\frac{x}{9}-[\frac{x}{9}]<1$

$\Rightarrow 0\le 9(\frac{x}{9}-[\frac{x}{9}])<9 \Rightarrow 0\le\sqrt{x-9[\frac{x}{9}]}<3$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $[\frac{x}{4}]=\frac{x}{3}$

چون براکت عدد صحیح است، لذا: $\frac{x}{3}=k\in\mathbb{Z}$ پس: $x=3k$ لذا:

$[\frac{3k}{4}]=k \Rightarrow \frac{3k}{4}-1<[\frac{3k}{4}]\le\frac{3k}{4} \Rightarrow \frac{3k-4}{4}\le k\le\frac{3k}{4} \Rightarrow 3k-4\le 4k\le 3k$

$\Rightarrow -4\le k\le 0 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,-1,-2,-3 \Rightarrow x=0,-3,-6,-9$

ب) $[x]-[-x]=۷$

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}[x]-(-[x])=۷ & x\in\mathbb{Z}\\ [x]-(-[x]-۱)=۷ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]=\frac{۷}{۲} & \Rightarrow \text{غیرممکن}\\ [x]=۳ & \Rightarrow ۳<x<۴\end{cases}$$

ج) $[\frac{x+۲}{x}]=۲$

$$[۱+\frac{۲}{x}]=۲\Rightarrow ۱+[\frac{۲}{x}]=۲\Rightarrow [\frac{۲}{x}]=۱\Rightarrow ۱\le\frac{۲}{x}<۲\Rightarrow ۱<x\le ۲$$

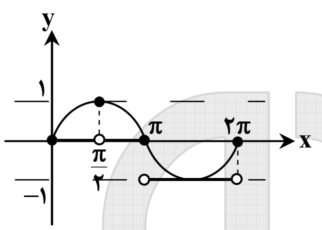
رسم تابع $y=[f(x)]$ و $y=f([x])$

رسم $y=[f(x)]$

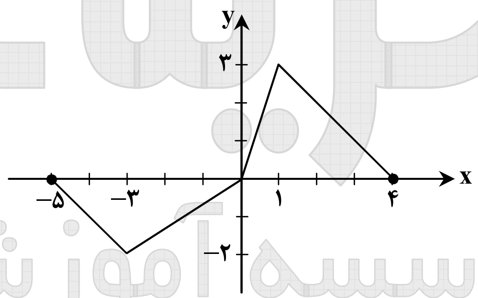
برای رسم $y=[f(x)]$ خطوط $y=k\in\mathbb{Z}$ را به موازات محور xها رسم می‌کنیم و سپس در نقاط تقاطع با منحنی قسمتی که بین دو خط محور شده است را روی خط پایینی تصویر می‌کنیم.

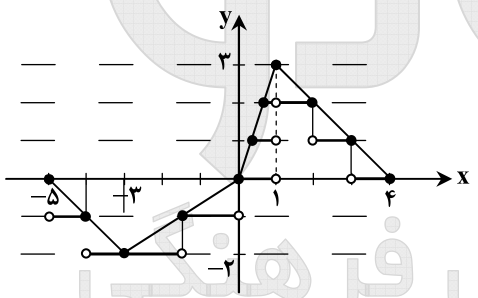
در نواحی‌ای که تابع صعودی است، ابتدای بازه‌ها را تو پر رسم می‌کنیم، و در نواحی‌ای که تابع نزولی است، انتهای بازه‌ها را تو پر رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار $y=[\operatorname{Sin}x]$ را رسم کنید. (در یک دوره‌ی تناوب)



مثال: اگر f به شکل زیر باشد، $y=[f(x)]$ را رسم کنید.

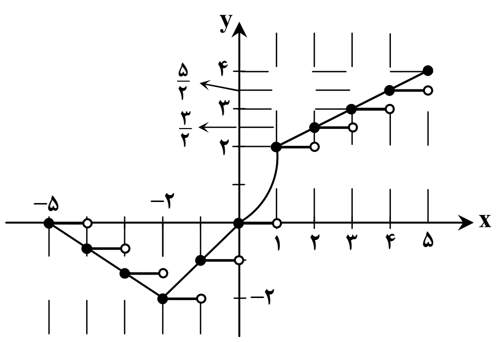


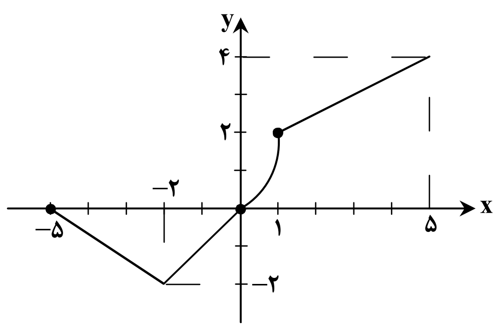


رسم $y=f([x])$:

برای رسم $y=f([x])$ خطوط $x=k\in\mathbb{Z}$ را رسم کرده و از ابتدای نقطه‌ی تقاطع هر خط با منحنی پاره‌خطی بـه طـول ۱ واحد به سمت راست رسم می‌کنیم. همواره نقاط ابتدای بازه‌ها تو پر خواهند بود (یعنی نقاط سمت چپ توپرند).

مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، $y=f([x])$ را رسم کنید.





گزینه دو

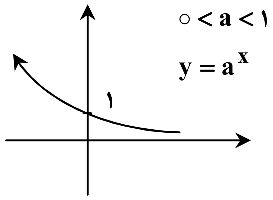
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

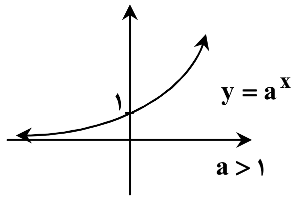
(فصل ۴)

توابع نمایی:

هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی و $a \neq ۱$ و $a > ۰$ و x متغیر است. یک تابع نمایی نامیده می‌شود. دامنه توابع نمایی تمام اعداد حقیقی و برد آن R^+ است.



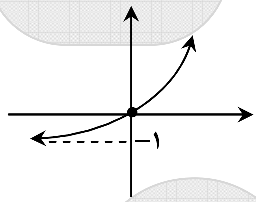
در این حالت اکیداً نزولی است.



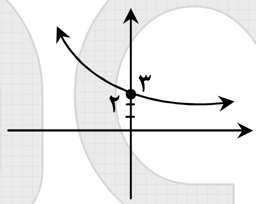
در این حالت اکیداً صعودی است.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

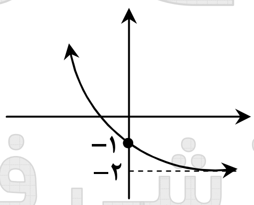
$y = ۲^x - ۱$



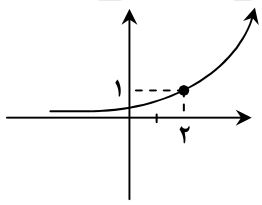
$y = (\frac{۱}{۳})^x + ۲$



$y = ۳^{-x} - ۲$

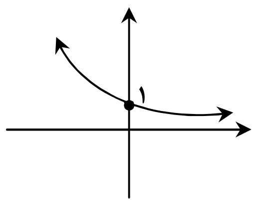


$y = ۳^{x-۲}$



$$y = \frac{(\frac{۱}{۶})^x}{۵^{-x}}$$

$$y = \frac{۶^{-x}}{۵^{-x}} = (\frac{۶}{۵})^{-x} = (\frac{۵}{۶})^x$$



خواص تابع نمایی:

۱) $a^x.a^y = a^{x+y}$ ۲) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ۳) $(a^x)^y = a^{xy}$

☜مثال: اگر سرعت تکثیر سلول‌ها براساس یک تابع نمایی قابل مدل‌سازی باشد، و بعد از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ و بعد از ٤ ساعت ٤٨ باشد، تعداد سلول‌ها ۷ ساعت پس از شروع تکثیر چقدر است؟

✍حل:

اگر سرعت رشد سلول‌ها را با تابع $y = ka^t$ مدل‌سازی کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y(2) = ka^2 = 12 \\ y(4) = ka^4 = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a>0} a = 2 \to k = 3$$

$$\to y(t) = 3\times 2^t \to y(7) = 3\times 2^7 = 384$$

دقت کنید که علت استفاده از ضریب k آن است که سلول‌ها با یک مقدار اولیه شروع به افزایش می‌کنند. این مقدار اولیه را در لحظه‌ی $t = 0$، k در نظر گرفتیم.

☜مثال: معادلات یا نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{1}{5\sqrt5})^x = 125^{2x-1}$

$$5^{-\frac{3}{2}x} = 5^{6x-3} \Rightarrow 6x-3 = -\frac{3}{2}x \Rightarrow 6x+\frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow \frac{15}{2}x = 3 \Rightarrow x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

ب) $9^x = 2\times 3^{x+2} - 45$

$$3^{2x} - 2\times 9\times 3^x + 45 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 18(3^x) + 45 = 0 \Rightarrow (3^x-15)(3^x-3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} 3^x = 15 \to x = \log_3^{15} \\ 3^x = 3 \to x = 1 \end{array}\right.$$

ج) $(3-\sqrt8)^{x^2} \ge (3+\sqrt8)^x$

$$(3-\sqrt8)\times\frac{(3+\sqrt8)}{3+\sqrt8} = \frac{1}{3+\sqrt8}$$

$$(\frac{1}{3+\sqrt8})^{x^2} \ge (3+\sqrt{x})^x \Rightarrow (3+\sqrt8)^{-x^2} \ge (3+\sqrt8)^x$$

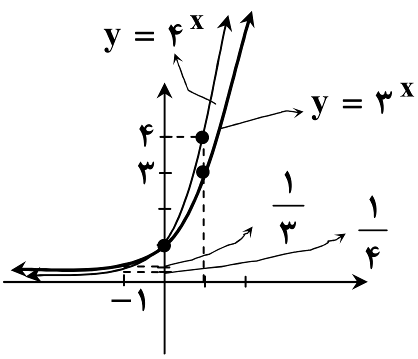
چون $1 < \sqrt8+3$ است، پس این تابع صعودی است، لذا لازم است:

$$-x^2 \ge x \Rightarrow x^2+x \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le 0$$

☜مثال: دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{3^x - 4^x}$ کدام است؟

✍حل:

باید $3^x - 4^x \ge 0$ باشد، پس باید $3^x \ge 4^x$ باشد. چون $3 < 4$ است، پس تابع 4^x برای $x \ge 0$ سریع‌تر از تابع 3^x بزرگ می‌شود و برای $x < 0$ سریعتر از تابع 3^x کوچک می‌شود.



پس برای $x \le 0$، $4^x \ge 3^x$ است، لذا دامنه‌ی تابع $D = (-\infty, 0]$ است.

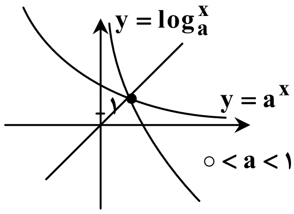
توابع لگاریتمی:

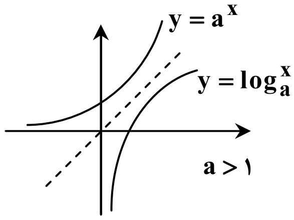
چون تابع نمایی $y=a^x$ $(a>۰, a\neq ۱)$ تابعی یک به یک است، لذا معکوس‌پذیر است. معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتمی نامیده می‌شود.

$$y=a^x \Rightarrow x=\log_a^y \Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_a^x$$

دامنه تابع لگاریتمی: $D_f=\{x>۰ \mid a>۰, a\neq ۱\}$

برد توابع لگاریتمی R است.

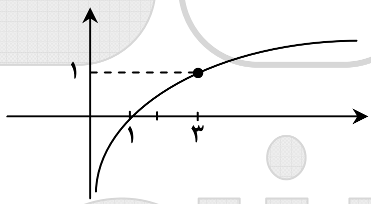




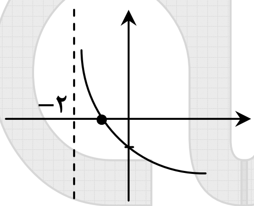
اگر پایه لگاریتم را ذکر نکردند، آن را ۱۰ در نظر می‌گیریم.

☜مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

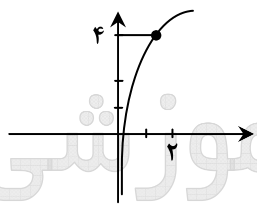
الف) $y=\log_۳^x$



ب) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x+۲}$



ج) $y=\log_۲^x+۳$



☜مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{\log\frac{۵x-x^۲}{۴}}$

$$\log\frac{۵x-x^۲}{۴}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۵x-x^۲}{۴}\geq ۱ \Rightarrow x^۲-۵x+۴\leq ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴)\leq ۰ \Rightarrow ۱\leq x\leq ۴$$

دقت کنید که شرط $\frac{۵x-x^۲}{۴}\geq ۱$، شرط $\frac{۵x-x^۲}{۴}>۰$ را هم تأمین می‌کند.

ب) $f(x)=\log_{۱+x}^{۹-x^۲} \rightarrow \left.\begin{array}{l} ۹-x^۲>۰ \Rightarrow -۳<x<۳ \\ ۱+x>۰, ۱+x\neq ۱ \Rightarrow x>-۱, x\neq ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow D=(-۱,۳)-\{۰\}$

$f(x)=\sqrt{\log^{\log^{\log^{x-۲}}}}$

ج) $\log^{\log^{\log^{x-2}}} \ge 0 \to \log^{\log^{(x-2)}} \ge 10^{0} = 1 \Rightarrow \log^{(x-2)} \ge 10^{1} = 10$

$\Rightarrow x-2 \ge 10^{10} \Rightarrow x \ge 10^{10}+2 \Rightarrow D=[10^{10}+2,\infty)$

خواص لگاریتم:

$1)\ \log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$

$2)\ \log_a^1 = 0$ و $\log_a^a = 1$

$3)\ \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy}$

$4)\ \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{\frac{x}{y}}$

$5)\ \log_{a^n}^{x^m} = \frac{m}{n}\log_a^x$

$6)\ \log_y^x = \frac{\log_z^x}{\log_z^y}$

در حالت کلی: $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$

این قضیه به تعداد نامحدودی لگاریتم قابل تعمیم است.

نتیجه: $\log_y^x = \frac{1}{\log_x^y}$

$6)\ x^{\log_a^y} = y^{\log_a^x}$

اگر لگاریتم دو عدد باهم برابر باشند، خود دو عدد نیز برابرند. تساوی فوق با لگاریتم گرفتن از دو طرف اثبات می‌شود.

$7)\ a^{\log_a^x} = x$

$8)\ \log_a^x > y : \begin{cases} x > a^y & a > 1 \\ x < a^y & 0 < a < 1 \end{cases} \quad (x > 0, y \in R)$

مثال: اگر $\log_{12}^3 = a$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{3}}^{16}$ کدام است؟

حل:

$\log_{12}^3 = a \to \log_3^{12} = \frac{1}{a} = \log_3^{3\times4} = \log_3^3 + \log_3^4 = 1 + \log_3^4 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3^4 = \frac{1}{a} - 1$

$\log_{\sqrt{3}}^{16} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{4^2} = \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_3^4 = 4\log_3^4 = 4(\frac{1}{a}-1) = \frac{4(1-a)}{a}$

مثال: اگر $\log^2 = 0/301$ باشد، $\log^{25}$ چقدر است؟

حل:

$\log^{5^2} = 2\log^5 = 2\log^{\frac{10}{2}} = 2(\log 10 - \log 2) = 2(1-\log 2) = 2(1-0/301) = 1/398$

مثال: لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه‌ی ۴/۵ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

حل:

$\log_9^x = \log_9^{\frac{1}{x^2}} + 4/5 \Rightarrow \log_9^x - \log_9^{\frac{1}{x^2}} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \log_9^{\frac{x}{\frac{1}{x^2}}} = \frac{9}{2} \Rightarrow \log_{3^2}^{x^3} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\log_3^x = \frac{9}{2} \Rightarrow \log_3^x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$

☜مثال: اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ کدام است؟

✍حل:

$$\log_{\sqrt{b}} ab^2 = \log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{b}} b^2 = \log_{b^{\frac12}} a + \log_{b^{\frac12}} b^2 = \frac{1}{\frac12}\log_b a + \frac{2}{\frac12}\log_b b = 2\log_b a + 4\log_b b = 2\log_b a + 4 = 2\times\frac{3}{2} + 4 = 7$$

☜مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $5^{(2\log_5 2 + 3\log_5 3)}$

$$5^{\log_5 4 + \log_5 27} = 5^{\log_5 4\times 27} = 4\times 27 = 108$$

ب) $[\log_6 2] + [\log_2 6]$

$$\left.\begin{array}{l}\log_6 1 = 0\\ \log_6 6 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0$$

$$\log_2 4 = 2 \Rightarrow \log_2 8 = 3 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2 \Rightarrow [\log_2 6] + \left[\log_6 2\right] = 2$$

ج) $(0/2)^{-2+\log_{\sqrt5} 10}$

$$(0/2)^{-2+\log_{5^{\frac12}} 2\times 5} = (0/2)^{-2+\frac{1}{\frac12}\log_5 2\times 5} = (0/2)^{-2+2\log_5 2\times 5} = (0/2)^{-2+2(\log_5 2+\log_5 5)} = (0/2)^{-2+2\log_5 2+2} = (0/2)^{\log_5 4}$$

$$= \left(\frac{10}{2}\right)^{-\log_5 4} = 5^{\log_5 4^{-1}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

د) $|\log_{\frac12} 8| + \log_8 \frac{\sqrt2}{2}$

$$|\log_{2^{-1}} 2^3| + \log_{2^3} 2^{-\frac12} = \left|\frac{3}{-1}\log_2 2\right| + \frac{-\frac12}{3}\log_2 2 = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

هـ) $\log_{x^2\sqrt{x}} x\sqrt[3]{x^2}$

$$\log_{x^{2+\frac12}} x^{1+\frac23} = \log_{x^{\frac52}} x^{\frac53} = \frac{\frac53}{\frac52}\log_x x = \frac{2}{3}$$

☜مثال: مجموعه جواب معادلات یا نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $5^x = 3^{1-x}$

از دو طرف پایه ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3 5^x = \log_3 3^{1-x} \Rightarrow x\log_3 5 = (1-x)\log_3 3 = (1-x) \Rightarrow x(\log_3 5 + 1) = 1 \to x(\log_3 5 + \log_3 3) \Rightarrow x = \frac{1}{\log_3 15} = \log_{15} 3$$

ب) $\log\frac{x+3}{5} < -1$

$$\frac{x+3}{5} < 10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow x+3 < \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

ج) $\log^{x-1}+\log^{x+1}=\log^{3}$

$$\log^{(x-1)(x+1)}=\log^{3} \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

با توجه به دامنه $\log x$، فقط $x=2$ قابل قبول است.

د) $x^{\log_5^x}=625$

از ۲ طرف در پایه ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_5^{(x^{\log_5^x})}=\log_5^{625}=\log_5^{5^4}=4$$

$$\log_5^x\times\log_5^x=(\log_5^x)^2=4 \Rightarrow \log_5^x=\pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x=25 \\ x=\frac{1}{25} \end{array} \right.$$

هـ) $\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

$$\log_{\frac{1}{9}}^{\frac{x-1}{3}}<\log_{2^{-1}}^{2}=-1 \Rightarrow \frac{x-1}{3}>(\frac{1}{9})^{-1}=9 \Rightarrow x-1>27 \Rightarrow x>28$$

و) $\log(3x-1)=(\log 5)^2-(\log 2)^2$

$$\log^{3x-1}=(\log^5-\log^2)(\log^5+\log^2)=(\log^{\frac{5}{2}}\times\log^{10})=\log^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3x-1=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{7}{6}$$

ن) $\log_x^3+\log_x^{2x+9}=2$

$$\log_x^{3(2x+9)}=2 \Rightarrow 6x+27=x^2 \to x^2-6x-27=0 \Rightarrow (x-9)(x+3)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=-3 \\ x=9 \end{array} \right.$$

با توجه به دامنه $\log^x$ که باید $x>0$ باشد، فقط $x=9$ قابل قبول است.

ی) $x^{1+\log_{10}^x}=10^2$

$$\log x^{(1+\log_{10}^x)}=\log 10^2=2$$

$$(1+\log_{10}^x)\log_{10}^x=2 \to (\log^x)^2+(\log^x)-2=0 \to (\log^x+2)(\log^x-1)=0$$

$$\Rightarrow \log x=-2,1 \Rightarrow x=10^{-2},10$$

مثال: کدام عبارت صحیح است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}}>\log_{\frac{1}{2}}^{100}$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{3}^{2}$ ۳) $\log_5^3>\log_3^5$ ٤) $\log_{\frac{1}{2}}^{3}>\log_{\frac{1}{2}}^{2}$

حل:

توابع لگاریتمی برای پایه‌های بزرگ‌تر از ۱ صعودی و برای پایه‌های کوچک‌تر از ۱ نزولی‌اند. پس عبارت زیر به‌علت نزولی بودن لگاریتم صحیح است: (به همین دلیل گزینه ٤ غلط است)

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{100}} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}$$

در گزینه‌ی ۲، $1>\log_3^2>0$ و $-2<\log_{\frac{1}{2}}^{3}=-\log_2^3<-1$ است. و در گزینه‌ی ۳: $0<\log_3^5$ و $\log_5^3<0$ است.

مثال: اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ باشد، عدد $۵^{۳۰}$ چند رقمی است؟

حل:

برای آن‌که بدانیم عدد چند رقمی است، ابتدا از آن لگاریتم می‌گیریم:

$$\log ۵^{۳۰} = ۳۰ \log ۵ = ۳۰ \log \frac{۱۰}{۲} = ۳۰(\log ۱۰ - \log ۲) = ۳۰(۱ - \log ۲) = ۲۰/۹۷$$

عدد $۱۰^{n-۱}$، عددی n رقمی است. حال کلیه اعداد n رقمی بین $۱۰^{n-۱}$ و ۱۰^{n} قرار دارند، لذا لگاریتم یک عدد n رقمی بین n و $n-۱$ است. لذا: اگر عدد A، n رقمی باشد، $[\log A]+۱ = n$ می‌باشد.

پس برای یافتن تعداد ارقام یک عدد پس از آن که از آن لگاریتم گرفتیم، از حاصل براکت گرفته و با یک جمع می‌کنیم. لذا این عدد: $[۲۰/۹۷]+۱ = ۲۱$ رقمی است.

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲

(فصل ۵)

🕮 مثلثات

زوایا و اندازه‌ی زوایا:

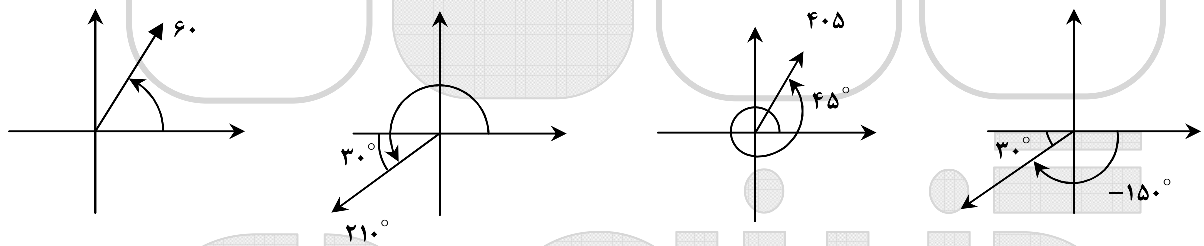
در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند، ایجاد می‌شود که یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم‌خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد در نظر می‌گیریم.

یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود.

اگر تغییر مکان نیم‌خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

☜ **مثال: زاویه‌های 60°، 210°، 405° و -150° را روی نمودار مشخص کنید؟**

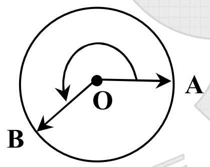
✍ حل:



واحد دیگری برای زاویه:

اگر متحرکی از نقطه‌ی **A** روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان **B** برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره‌خط **OA** حول **O** برحسب رادیان می‌نامند.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.



چون می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع **R**، برابر $2\pi R$ است، لذا اگر ما کمانی از دایره به اندازه‌ی θ را طی کنیم، مسافت طی شده توسط متحرک یا همان طول کمان برابر است با: $L = R\theta$ (دقت کنید در این رابطه θ حتماً باید با واحد رادیان بیان شود.)

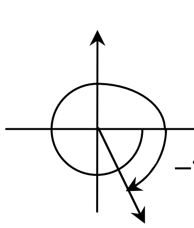
حال اگر دایره مثلثاتی را در نظر بگیریم (دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) محیط این دایره برابر 2π رادیان است، لذا می‌توان واحدهای درجه و رادیان را به صورت زیر بهم تبدیل نمود:

$$\begin{array}{cc} \text{رادیان} & \text{درجه} \\ 2\pi & 360^\circ \\ x & 1 \end{array} \Bigg\} \to x = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

یعنی ۱ درجه برابر $\frac{\pi}{180}$ رادیان است در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \to \underset{\text{رادیان}}{\underset{\downarrow}{R}} = \frac{\pi}{180} \underset{\text{درجه}}{\underset{\downarrow}{D}}$$

☜ **مثال: زاویه‌ی ۷- رادیان را روی نمودار نشان دهید.**



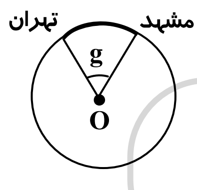
✍ حل:

$$D = \frac{180}{\pi} R = \frac{180 \times -7}{3/1415} \simeq -401$$

☜ **مثال: فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین ٦٤٤٠ کیلومتر فرض شود، زاویه‌ای از مرکز زمین که یک ضلع آن منتهی به تهران و ضلع دیگر منتهی به مشهد شود، چقدر است؟**

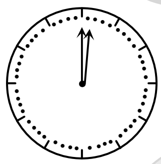
✍ حل:

اگر فاصله‌ی تهران تا مشهد را کمان طی شده در نظر بگیریم، داریم:



$$R\theta = L \to 6440\theta = 1000 \to \theta = \frac{100}{644} = 0/155\,\text{rad}$$

☜ **مثال: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار به اندازه‌ی $2/5\pi$ رادیان دوران کند؟**



✍ حل: دقیقه شمار هر ۱ دقیقه $\frac{1}{60}$ دایره یعنی $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ رادیان دوران می‌کند، لذا برای $2/5\pi$ رادیان دوران $\frac{2/5\pi}{\frac{\pi}{30}} = 75$ دقیقه زمان لازم است.

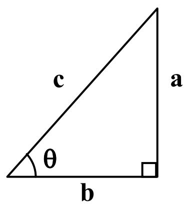
☜ **مثال: اگر چرخ و فلکی ٤٠ کابین داشته باشد و در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت روی کابین ۳ قرار داشته باشیم، پس از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان دوران در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیریم؟**

✍ حل: چون چرخ و فلک دایره را به ٤٠ قسمت مساوی تقسیم کرده است، لذا فاصله‌ی هر ۲ کابین $\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$ است، یعنی پس از هر $\frac{\pi}{20}$ رادیان دوران، ما در جایگاه کابین بعدی قرار می‌گیریم، لذا اگر بخواهیم $\frac{47\pi}{10}$ دوران کنیم، در واقع به اندازه‌ی $\frac{\frac{47\pi}{10}}{\frac{\pi}{20}} = 94$ کابین جلو رفته‌ایم چون هر 2π رادیان یکبار به جایی که هستیم برمی‌گردیم، پس باید فرض کنیم به اندازه‌ی ١٤ کابین پیش رفته‌ایم.

چون $\frac{47\pi}{10} = 4\pi + \frac{7\pi}{10}$ و $\frac{\frac{7\pi}{10}}{\frac{\pi}{20}} = 14$ یعنی الآن در جایی قرار داریم که کابین ۱۷ ام در ابتدای حرکت قرار داشت.

سینوس و کسینوس یک زاویه:

نسبت ضلع مقابل یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه سینوس آن زاویه می‌نامند. همچنین نسبت ضلع مجاور به یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه کسینوس آن زاویه می‌نامند.



$$\text{Sin}\theta = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

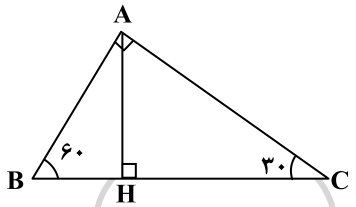
دامنه‌ی تابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$است.

چون همواره $|a|\le\sqrt{a^2+b^2}$ و $|b|\le\sqrt{a^2+b^2}$ است، لذا $|\sin x|\le 1$ و $|\cos x|\le 1$ پس:

$$-1\le \sin x\le 1$$
$$-1\le \cos x\le 1$$

☜ **مثال: اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا °۳۰ باشد و ضلع نظیر این زاویه (ضلع غیروتر) ۱۲ باشد، طول ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه و اندازه‌ی قطعاتی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند را به دست آورید.**

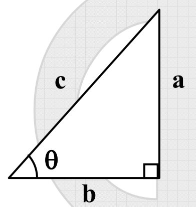
✍ حل:



$$\sin 30=\frac{AH}{AC}\to AH=12\sin 30=6$$
$$\cos 30=\frac{CH}{AC}\to CH=12\cos 30=6\sqrt{3}$$
$$\sin 60=\frac{AH}{AB}\to AB=\frac{AH}{\sin 60}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$
$$\cos 60=\frac{BH}{AB}\to BH=4\sqrt{3}\cos 60=2\sqrt{3}$$

تانژانت و کتانژانت یک زاویه:

بنابر تعریف تانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:



$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}$$

دامنه‌ی تابع تانژانت $D=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$است.

نکته: در واقع می‌توان گفت شیب یک خط، تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور xها است.

بنابر تعریف کتانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:

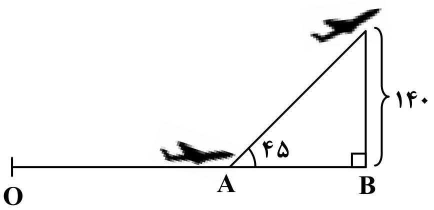
$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{b}{a}$$

دامنه‌ی تابع کتانژانت $D=\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ است.

لذا برای $x\ne\frac{k\pi}{2}$ داریم: $\tan x=\frac{1}{\cot x}$ یا $\tan x.\cot x=1$

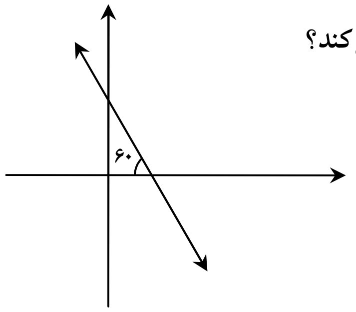
☜ **مثال: هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند، سپس با زاویه‌ی °۴۵ از زمین بلند می‌شود. وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟**

✍ حل:



$$\tan 45=\frac{140}{AB}\Rightarrow AB=\frac{140}{1}\Rightarrow AB=140$$

$$OA=300\to OB=300+140=440$$



☜ **مثال: خط مقابل از نقطه $\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$ می‌گذرد. این خط محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟**

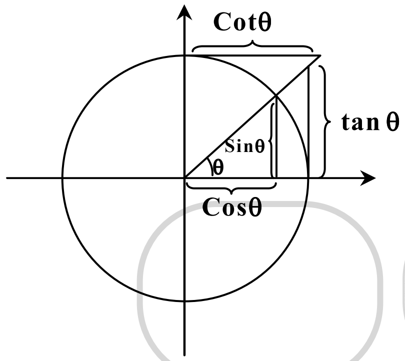
✍ حل: شیب تانژانت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور **x**ها است.

$$m=\tan\theta=\tan ۱۲۰=-\sqrt{۳}$$

$\rightarrow\ y-۲=-\sqrt{۳}\,(x-۱)$:معادله خط

$$\rightarrow\ y=۰\ \Rightarrow\ x-۱=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\ \Rightarrow\ x=۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۳}$$

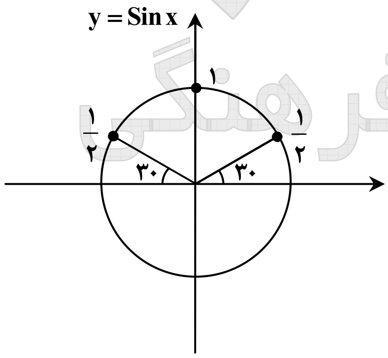
نمایش هندسی توابع مثلثاتی روی دایره‌ی مثلثاتی:



اگر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ (دایره‌ی مثلثاتی) را داشته باشیم، توابع مثلثاتی را می‌توان روی این دایره نمایش داد.

سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت زوایای مهم:

	۰	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
Sin x	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	۱−	۰
Cos x	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱−	۰	۱
tan x	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
Cot x	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

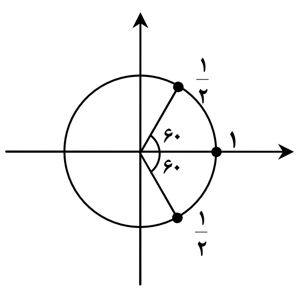


☜ **مثال: اگر $\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{۵\pi}{۶}$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $y=\sin x$ چقدر است؟**

✍ حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات **Sin x** در ربع اول و دوم ملاحظه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\le \sin x\le ۱$$

☜ **مثال: اگر $-\frac{\pi}{۹}<x<\frac{\pi}{۹}$ باشد، $\cos ۳x=\frac{m-۱}{۲}$ باشد، مقادیر x در کدام فاصله است؟**



✍ حل: با دقت در دایره‌ی مثلثاتی و ملاحظه‌ی تغییرات **۳x** داریم:

$$-\frac{\pi}{۹}<x<\frac{\pi}{۹}\ \rightarrow\ -\frac{\pi}{۳}<۳x<\frac{\pi}{۳}$$

$$\rightarrow\ \frac{۱}{۲}\le\cos ۳x\le ۱$$

$$\rightarrow\ \frac{۱}{۲}\le\frac{m-۱}{۲}\le ۱\ \rightarrow\ ۲\le m\le ۳$$

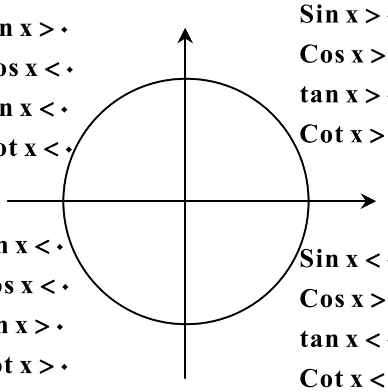
علامت توابع مثلثاتی در ربع‌های مختلف:

ربع دوم

$\sin x > ۰$
$\cos x < ۰$
$\tan x < ۰$
$\cot x < ۰$

ربع اول

$\sin x > ۰$
$\cos x > ۰$
$\tan x > ۰$
$\cot x > ۰$



$\sin x < ۰$
$\cos x < ۰$
$\tan x > ۰$
$\cot x > ۰$

ربع چهارم

$\sin x < ۰$
$\cos x > ۰$
$\tan x < ۰$
$\cot x < ۰$

ربع سوم

اتحادهای مثلثاتی مهم:

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$$

$$\tan\theta . \cot\theta = ۱ \qquad \theta \neq \frac{k\pi}{۲}$$

$$۱ + \tan^{۲}\theta = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta} \qquad \theta \neq (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$$

$$۱ + \cot^{۲}\theta = \frac{۱}{\sin^{۲}\theta} \qquad \theta \neq k\pi$$

تذکر: $\sin^{۲}\theta$ به معنای $(\sin\theta)^{۲}$ است و با مقدار $\sin(\theta)^{۲}$ متفاوت است.

☜ **مثال: اگر $\tan x = \frac{۱}{۳}$ و انتهای کمان x در ناحیه‌ی سوم باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟**

✍ حل:

$$۱ + \tan^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x} \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{\cos^{۲} x} \rightarrow \cos^{۲} x = \frac{۹}{۱۰}$$

$$\rightarrow \cos x = \pm\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \rightarrow \sin^{۲} x = ۱ - \cos^{۲} x = ۱ - \frac{۹}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰} \rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

چون انتهای کمان در ناحیه‌ی سوم است، لذا $\sin x < ۰$ است، پس: $\sin x = \frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}$

روابط توابع مثلثاتی در کمان‌های مثلثاتی مختلف با هم:

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$	$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$ $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$ $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\cot\theta$ $\cot(\theta+\frac{\pi}{2})=-\tan\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta \rightarrow \tan(k\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta \rightarrow \cot(k\pi+\theta)=\cot\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ $\cot(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$ $\cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta \rightarrow \sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta \rightarrow \cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta \rightarrow \tan(2k\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(2\pi+\theta)=\cot\theta \rightarrow \cot(2k\pi+\theta)=\cot\theta$

☜ مثال: از تساوی $2=\dfrac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$ مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

✍ حل:

$\sin(\alpha\pm 2k\pi)=\sin\alpha$

$\cos(\alpha\pm 2k\pi)=\cos\alpha$

$$\frac{2\sin(\alpha-\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=\frac{-2\sin\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha=2 \Rightarrow \tan\alpha=2$$

☜ مثال: ساده شده‌ی عبارت $A=\cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)+\cos(\pi+x)+\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ را به‌دست آورید.

✍ حل:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x\\ \cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\end{array}\right\} \Rightarrow A=-\cos x+\cos x-\cos x-\cos x=-2\cos x$$

☜ مثال: حاصل $A = \mathrm{Sin}\,1860^\circ + \mathrm{Cos}\,1860^\circ$ چقدر است؟

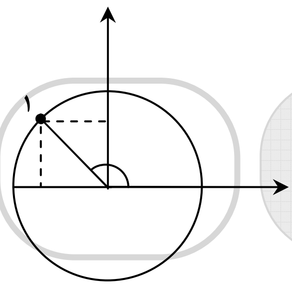
✍ حل:

$$1860^\circ = 5\times 360 + 60 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sin}\,(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{Cos}\,(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

☜ مثال: نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ را به اندازه‌ی $\frac{2\pi}{3}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی حاصل کدام است؟

✍ حل:

$$P\left|\begin{matrix}\mathrm{Cos}\,\theta\\ \mathrm{Sin}\,\theta\end{matrix}\right.$$



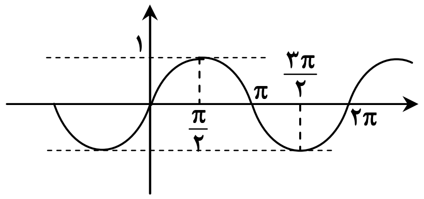
$$P = \left|\begin{matrix}\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{3}\\ \mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{3}\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$$

توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکات متناوب در طبیعت با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

توابع $y = \operatorname{Sin} x$, $y = \operatorname{Cos} x$, $y = \tan x$, $y = \operatorname{Cot} x$ توابع مثلثاتی نام دارند و دامنه و برد و نمودارشان به‌صورت زیر است:

الف)



$y = \operatorname{Sin} x$

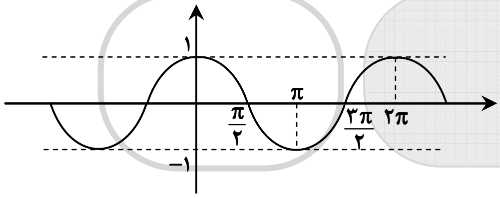
$D = \mathbb{R}$

$R = [-۱,۱]$

چون $\operatorname{Sin}(x+۲\pi) = \operatorname{Sin} x$ تابع $y = \operatorname{Sin} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

❋ صفر های (ریشه‌های) تابع $y = \operatorname{Sin} x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

ب)



$y = \operatorname{Cos} x$

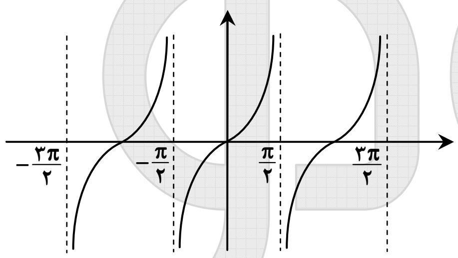
$D = \mathbb{R}$

$R = [-۱,۱]$

چون $\operatorname{Cos}(x+۲\pi) = \operatorname{Cos} x$ تابع $y = \operatorname{Cos} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

❋ صفرهای تابع $y = \operatorname{Cos} x$ در $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ رخ می‌دهد.

ج)



$y = \tan x$

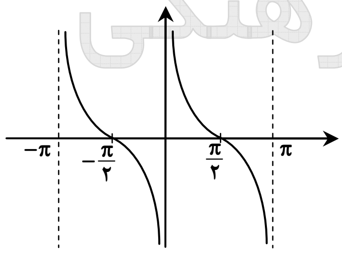
$D = \mathbb{R} - \{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$R = \mathbb{R}$

چون $\tan(x+\pi) = \tan x$ تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

❋ صفرهای تابع $y = \tan x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

د)



$y = \operatorname{Cot} x$

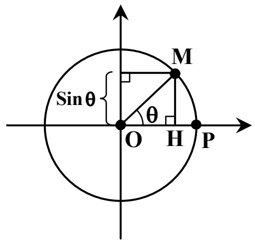
$D = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

چون $\operatorname{Cot}(x+\pi) = \operatorname{Cot} x$ تابع $y = \operatorname{Cot} x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

❋ صفرهای تابع $y = \operatorname{Cot} x$ در $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ رخ می‌دهد.

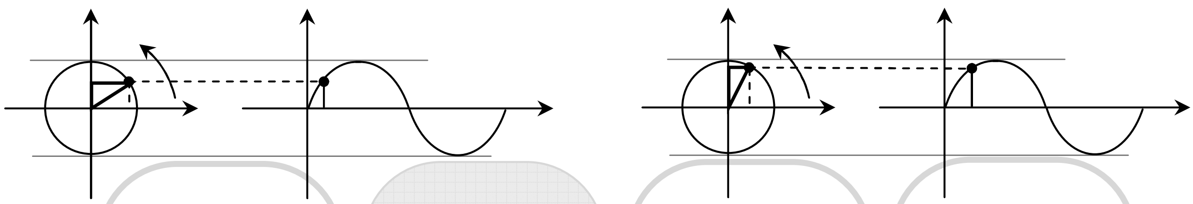
نکته: توابع $y = A\operatorname{Sin}(ax+b)$ و $y = A\operatorname{Cos}(ax+b)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ می‌باشند. دامنه‌ی این توابع $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها $-|A| \le y \le |A|$ است.

ارتباط بین دایره‌ی مثلثاتی و تابع سینوس:



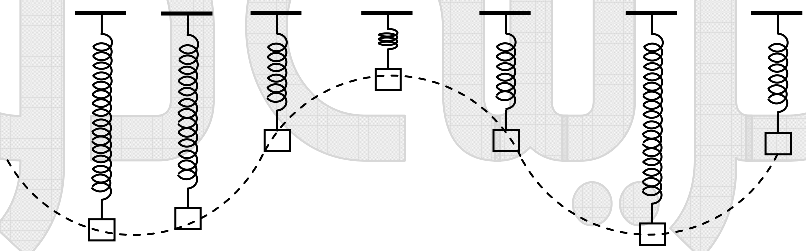
اگر نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی حرکت کند، مقدار **y** نقطه در هر لحظه، برابر مقدار سینوس زاویه‌ای است که نقطه با مبدأ و محور **x**ها می‌سازد. در واقع تصویر متحرک **M** روی محور **y**ها برابر با سینوس زاویه در هر لحظه است.

❋ یعنی حرکت تصویر **M** روی محور **y**ها با تابعی سینوس صورت می‌پذیرد.



برخی حرکات در طبیعت وقتی در قالب زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند، نموداری سینوسی دارند، مثلاً فرض کنید وزنه را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حالت تعادل رسیده است. اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده شود و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک، وزنه حرکتی نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه حالت تعادل وزنه باشد و وزنه در $t = 0$ در حالت تعادل باشد، ارتفاع وزنه در هر حالت برابر است با: $y(t) = A\sin \omega t$

اگر از مقابل به آونگ نگاه کنیم، و حرکت را در زمان‌های مختلف تصویربرداری کنیم، چیزی شبیه حرکت تصویر نقطه‌ی روی محور **y**ها در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌شود.

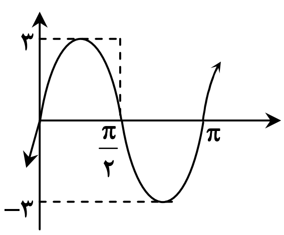


☜ **مثال: حداقل و حداکثر و دوره‌ی تناوب توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.**

✍ حل:

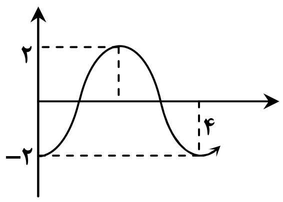
$y = 3\sin 2x$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad -3 \le y \le 3$



$y = -2\cos \frac{\pi}{2} x$

$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \qquad -2 \le y \le 2$



☜ **مثال: اگر $y = Cos^2x - 3Sin^2x$ باشد، محدوده‌ی تغییرات y کدام است؟**

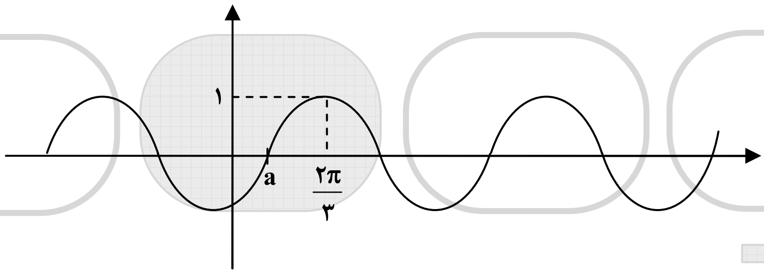
✍ حل:

$$y = Cos^2x - 3(1 - Cos^2x) = 4Cos^2x - 3$$

$$0 \le Cos^2x \le 1 \rightarrow 0 \le 4Cos^2x \le 4 \rightarrow -3 \le 4Cos^2x - 3 \le 1 \rightarrow -3 \le y \le 1$$

☜ **مثال: اگر $x = \frac{2\pi}{3}$ طول اولین نقطه‌ای با طول مثبت باشد که تابع $y = Sin(x - a)$ در آن به مقدار حداکثر می‌رسد، a چقدر است؟**

✍ حل: در تابع $y = Sin\,x$، $x = \frac{\pi}{2}$ اولین نقطه‌ای است که $y = Sin\,x$ در آن به اوج می‌رسد. لذا چون این نقطه به اندازه‌ی $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ به جلو حرکت کرده است، پس $a = \frac{\pi}{6}$ می‌باشد.



☜ **مثال: کدام عبارت نادرست است؟**

۱) $Sin\,37 > Cos\,75$

۲) $Sin\,160 > Cos\,285$

۳) $Cos\,125 < Cos\,212$

٤) $Cos(-65) < Sin\,55$

✍ حل:

گزینه‌ی ۱ : چون $Cos\,75 = Sin\,15$ و $Sin\,x$ در فاصله‌ی $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ صعودی است، لذا:

$$Sin\,37 > Cos\,75 = Sin\,15$$

گزینه‌ی ۲:

$$\left.\begin{array}{l} Sin\,160 = Sin\,20 \\ Cos\,285 = Cos(-75) = Cos\,75 = Sin\,15 \end{array}\right\} \rightarrow Sin\,20 > Sin\,15$$

گزینه‌ی ۳:

$$Cos\,125 = Cos(180 - 55) = -Cos\,55$$

$$Cos\,212 = Cos(180 + 32) = -Cos\,32$$

تابع $y = Cos\,x$ در فاصله‌ی $[0\,,\,\pi]$ تابعی نزولی است، لذا:

$$Cos\,32 > Cos\,55 \rightarrow -Cos\,32 < -Cos\,55 \rightarrow Cos\,212 < Cos\,125$$

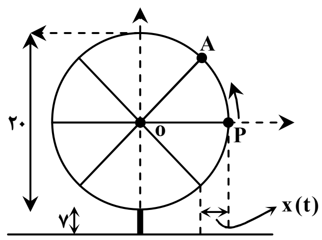
پس گزینه‌ی ۳ نادرست است.

گزینه‌ی ٤:

$$Cos(-65) = Cos\,65 = Sin\,25$$

$$Sin\,55 > Sin\,25 = Cos(-65)$$

☜ مثال: فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنید پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه‌ی $t=0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.



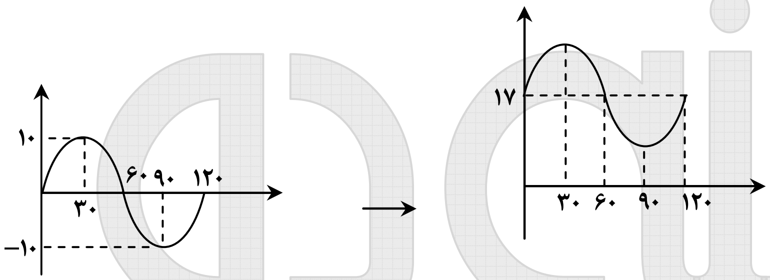
الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

ب) اگر در لحظه‌ی t فاصله‌ی سایه این کابین روی زمین تا نقطه‌ی A را با x(t) نشان دهیم، این تابع را به‌دست آورید.

✍ حل:

الف) اگر محورهای مختصات را بر مرکز دایره قرار دهیم در لحظه‌ی $t=30$، $y=10$ است و در لحظه‌ی $t=60$، $y=0$ و در لحظه‌ی $t=90$، $y=-10$ و در لحظه‌ی $t=120$ مجدداً $y=0$ می‌شود.

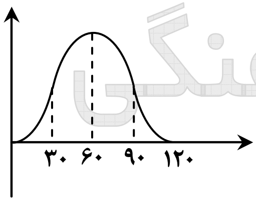
لذا چون معادله‌ی این حرکت نوسانی $y=A\sin\omega t$ است، لذا با داده‌های فوق می‌توان ω و A را یافت. چون ماکزیمم تابع در $t=30$ رخ می‌دهد. پس باید: $\omega\times 30=\frac{\pi}{2}$ باشد، پس: $\omega=\frac{\pi}{60}$ است. اما چون این مقدار ماکزیمم برابر ۱۰ است، لذا هنگامی‌که سینوس برابر یک است، y باید برابر ۱۰ باشد؛ پس: $y=10\sin(\frac{\pi}{60}t)$

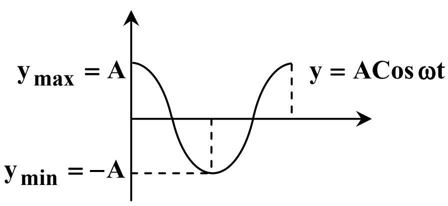


حال اگر محورهای مختصات را نسبت به زمین در نظر بگیریم، معادله‌ی حرکت نقطه‌ی P عبارت است از: $y=10\sin(\frac{\pi}{60}t)+17$ چون در لحظه‌ی $t=0$ فاصله‌ی نقطه‌ی P از زمین ۱۷ متر است.

ب) چون طول سایه هم نوسانی است و در لحظه‌ی $t=0$ برابر $x=0$ و در لحظه‌ی $t=30$ برابر $x=10$ و در لحظه‌ی $t=60$ برابر $x=20$ و در لحظه‌ی $t=90$ برابر $x=10$ و در لحظه‌ی $t=120$ برابر $x=0$ است.

چون این تابع با مقدار می‌نیمم آغاز و به مقدار ماکزیمم ختم می‌شود، از تابع $\cos x$ استفاده می‌کنیم. منتها چون این تابع از می‌نیمم به ماکزیمم حرکت می‌کند، نمودار آن به‌صورت مقابل است:





با دقت در نمودار $y=A\cos\omega t$ و مقایسه‌ی آن با نمودار فوق درمی‌یابیم این تابع به‌صورت $y=-A\cos\omega t+B$ است.

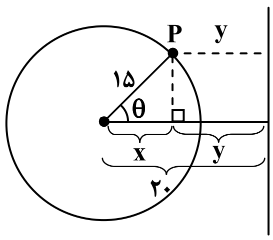
ابتدا ω را می‌یابیم:

$$t=0 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow y=-A\cos(\omega\times 30)=-10 \Rightarrow \omega\times 30=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{60}\ ,\ A=10$$

پس تابع با انتقال ۱۰ واحدی به بالا نهایتاً به‌صورت: $y=-10\cos(\frac{\pi}{60}t)+10$ است.

مثال: فاصله‌ی مرکز یک تاب گردان از میله‌های محافظ کنار آن ۲۰ متر و شعاع آن در هنگام گردش ۱۵ متر است. کدام معادله فاصله‌ی هر نقطه‌ی تاب در حال گردش را از میله‌ی محافظ به‌دست می‌دهد؟ (θ زاویه‌ی بین نقطه‌ی روی تاب و خط فاصله‌ی مرکز دوران تا میله‌هاست.)

حل: فاصله‌ی هر نقطه مانند **P** از میله‌ی فلزی برابر **y** می‌باشد که به زاویه‌ی **θ** بستگی دارد. داریم:



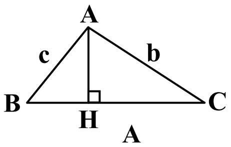
$$\cos\theta = \frac{x}{۱۵} \Rightarrow x = ۱۵\cos\theta \quad (*)$$

$$y = ۲۰ - x \overset{(*)}{=} ۲۰ - ۱۵\cos\theta$$

کاربردهایی از مثلثات

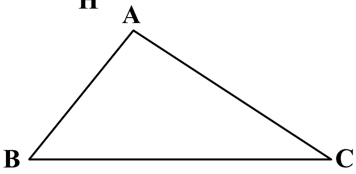
قضیه‌ی کسینوس‌ها:

در هر مثلث داریم:



$$BC = BH + HC$$
$$\rightarrow\ a = c\,\mathrm{Cos}\,\hat{B} + b\,\mathrm{Cos}\,\hat{C}$$

لذا در هر مثلث داریم:

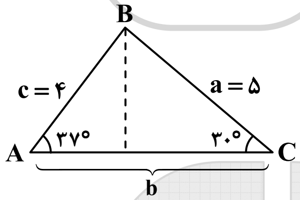


$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,\mathrm{Cos}\,\hat{A}$$
$$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\,\mathrm{Cos}\,\hat{B}$$
$$c^{۲} = b^{۲} + a^{۲} - ۲ab\,\mathrm{Cos}\,\hat{C}$$

اثبات روابط فوق بر اساس قضیه‌ی فیثاغورس و رابطه‌ی فوق صورت گرفته و در کتاب درسی موجود است.

مثال: زمینی مثلث شکل برای ساخت یک فروشگاه زنجیره‌ای در نظر گرفته شده است. محیط این زمین کدام است؟

$(\mathrm{Cos}\,۳۷^\circ = ۰/۸$ و $\mathrm{Cos}\,۳۰^\circ = ۰/۸۶)$



حل: از رابطه‌ی $b = c\,\mathrm{Cos}\,A + a\,\mathrm{Cos}\,C$ داریم:

$$b = ۴\,\mathrm{Cos}\,۳۷^\circ + ۵\,\mathrm{Cos}\,۳۰^\circ = ۴(۰/۸) + ۵(۰/۸۶) = ۳/۲ + ۴/۳ = ۷/۵$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با:

$$\text{محیط} = a + b + c = ۵ + ۷/۵ + ۴ = ۱۶/۵$$

مثال: اگر اضلاع مثلثی $a = ۳$ و $b = ۳\sqrt{۳}$ و $c = ۶$ باشد، زاویه‌ی A چقدر است؟

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,\mathrm{Cos}\,A \ \rightarrow\ ۹ = ۲۷ + ۳۶ - ۲\times۳\sqrt{۳}\times۶\,\mathrm{Cos}\,A$$

$$\Rightarrow\ ۳۶\sqrt{۳}\,\mathrm{Cos}\,A = ۵۴ \ \rightarrow\ \mathrm{Cos}\,A = \frac{۵۴}{۳۶\sqrt{۳}} = \frac{۶}{۴\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \ \rightarrow\ A = \frac{\pi}{۶}$$

مثال: اگر در مثلث غیر متساوی‌الساقینی رابطه‌ی $a^{۳} - b^{۳} = c^{۲}(a-b)$ برقرار باشد، زاویه‌ی C کدام است؟

حل:

$$(a-b)(a^{۲} + b^{۲} + ab) = c^{۲}(a-b) \xrightarrow{a \neq b} a^{۲} + b^{۲} + ab = c^{۲}$$

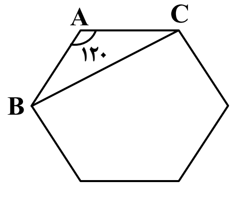
از طرفی همواره داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\,\mathrm{Cos}\,\hat{C}$$

با مقایسه‌ی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\rightarrow\ -۲ab\,\mathrm{Cos}\,\hat{C} = ab \ \rightarrow\ \mathrm{Cos}\,\hat{C} = -\frac{۱}{۲} \ \rightarrow\ \hat{C} = ۱۲۰^\circ$$

مثال: طول قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم را پیدا کنید که طول ضلع آن ۲ است.



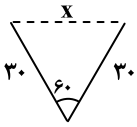
حل: می‌دانیم هر زاویه‌ی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. لذا طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB\,.\,AC\,\mathrm{Cos}\,۱۲۰$$
$$= ۲^{۲} + ۲^{۲} - ۲\times۲\times۲\times(-\frac{۱}{۲}) = ۱۲$$
$$\rightarrow\ BC^{۲} = ۱۲ \ \rightarrow\ BC = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

نکته: هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم از رابطه‌ی $\frac{(n-۲)\times۱۸۰}{n}$ به‌دست می‌آید.

☜ **مثال: متحرکی ابتدا ۳۰ متر حرکت کرده و سپس روی مسیری که با مسیر اول زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد به همان اندازه حرکت می‌کند. وقتی متحرک به انتهای مسیر دوم می‌رسد، فاصله‌ی وی از نقطه‌ی شروع چقدر است؟**

✍ حل: با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$x^۲=(۳۰)^۲+(۳۰)^۲-۲(۳۰)(۳۰)\times\frac{۱}{۲}=۹۰۰$$

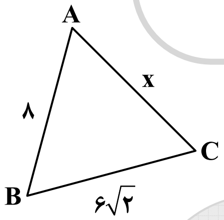
$$\Rightarrow\ x=\sqrt{۹۰۰}=۳۰$$

البته این مثال را با روش هندسی نیز می‌توان حل کرد.

☜ **مثال: فاصله‌ی بین دو شهر A و B، ۸ کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C، $۶\sqrt{۲}$ کیلومتر است. اگر این سه شهر را دوبه‌دو روی نقشه با خط راست به هم وصل کنیم، زاویه‌ی A با دو شهر دیگر ۶۰° می‌شود. فاصله‌ی شهر A تا شهر C چند کیلومتر است؟**

✍ حل:

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



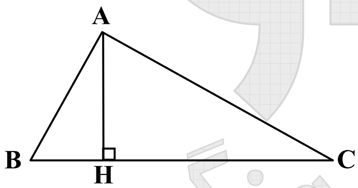
$$(۶\sqrt{۲})^۲=x^۲+۸^۲-۲(۸)(x)\cos ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow\ (۷۲)=x^۲+۶۴-۸x\ \Rightarrow\ x^۲-۸x-۸=۰$$

$$\xrightarrow[\Delta=(-۸)^۲+۳۲=۹۶]{\text{حل معادله}}\begin{cases}x=۴+\sqrt{۲۴}=۴+۲\sqrt{۶}\\ x=۴-\sqrt{۲۴}=۴-۲\sqrt{۶}<۰\end{cases}$$ $\Rightarrow$ ضلع با طول منفی نداریم پس غیرقابل قبول است

مساحت مثلث و قضیه‌ی سینوس‌ها:

در مثلث **ABC** مساحت مثلث برابر است با:



$$\left.\begin{array}{l}S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\\ AH=AB\times\sin B=AC\times\sin C\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times\sin B=\frac{۱}{۲}AC\times BC\sin C$$

$$\rightarrow\ AB\sin B=AC\sin C\ \rightarrow\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$$

با نوشتن این رابطه با یکی دیگر از ارتفاع‌ها و اثباتی مشابه داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$

پس: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

قضیه‌ی فوق را قضیه‌ی سینوس‌ها می‌نامند.

نکته: مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع **a** و **b** و زاویه‌ی بین θ عبارتست از:

$$S=ab\sin\theta$$

☜ **مثال: اگر در مثلثی $A=۳۰^\circ$ و $B=۱۲۰^\circ$ و $a=۸$ باشد، سه ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید.**

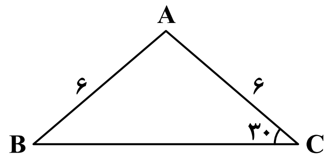
✍ حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \to\ \frac{۸}{\sin ۳۰}=\frac{b}{\sin ۱۲۰}=\frac{c}{\sin ۳۰}\ \Rightarrow\ ۱۶=\frac{b}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲c\ \Rightarrow\ c=۸\ ,\ b=۸\sqrt{۳}$$

حال مساحت را با هر کدام از دو ضلع به‌صورت دلخواه می‌توان نوشت:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\sqrt{۳}\sin ۳۰=۱۶\sqrt{۳}$$

☜ **مثال: مؤسسه‌ای غرفه‌ی فروش محصولات خود را در زمینی به ابعاد مقابل برپا کرده است. مساحت این زمین کدام است؟**

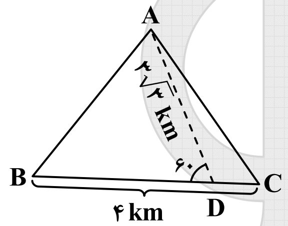


✍ حل: مثلث **ABC** متساوی‌الساقین است، لذا $\hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ$، بنابراین $\hat{A}=۱۸۰-(۳۰+۳۰)=۱۲۰^\circ$ داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \sin ۱۲۰^\circ=۱۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳}$$

☜ **مثال: بانکی مثلثی شکل با پارتیشن‌بندی به‌طول $۳\sqrt{۳}$ متر به دو قسمت برای استفاده‌ی کارمندان و ارباب رجوع تقسیم شده است. اگر بزرگ‌ترین ضلع بانک به‌طول ٤ متر بوده و زاویه‌ی مرز AD و یکی از نواحی جدید ۶۰° باشد، مساحت بانک چند متر مربع است؟**

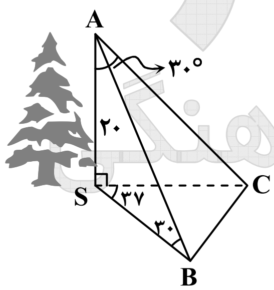
✍ حل:



$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}=\frac{۱}{۲}AD\times DB\times \sin ۶۰^\circ+\frac{۱}{۲}AD\times DC\times \sin ۱۲۰^\circ$$

$$=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}BD+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}DC=\frac{۹}{۴}(BD+DC)=\frac{۹}{۴}(BC)=\frac{۹}{۴}\times ۴=۹$$

☜ **مثال:** رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است، اندازه بگیرد. او روبه‌روی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت ۳۰° است. سپس رضا به سمت نقطه‌ی C حرکت می‌کند به‌گونه‌ای که SB و SC با یکدیگر زاویه‌ی ۳۷° می‌سازند. اگر در این حالت رضا طول درخت را ۲۰ متر اندازه‌گیری کند، مساحت مثلث SBC چقدر است؟ (زاویه‌ی بین AS و AB، ۱۵° است و داریم: $\sin ۱۵^\circ=۰/۲۶$)



✍ حل:

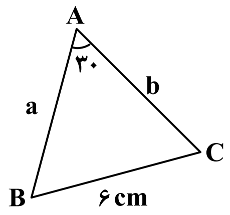
$$\overset{\Delta}{ASC}:\tan A=\frac{SC}{SA}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{SC}{۲۰}\ \to\ SC=\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ASB}:\frac{SB}{\sin ۱۵}=\frac{AS}{\sin ۳۰}=\frac{۲۰}{\frac{۱}{۲}}\ \Rightarrow\ SB=۴۰\times ۰/۲۵۶=۱۰/۴$$

لذا در مثلث **SBC** داریم:

$$S_{BCS}=\frac{۱}{۲}(SB.SC.\sin ۳۷^\circ)\simeq\frac{۱}{۲}\times ۱۰/۴\times\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}\times\frac{۶}{۱۰}=۳۶/۷$$

☜ **مثال: در مثلث روبه‌رو اگر $a=۶\,cm$ و $\hat{A}=۳۰°$ و $\cos B=\frac{۳}{۵}$ باشد، طول ضلع b کدام است؟**



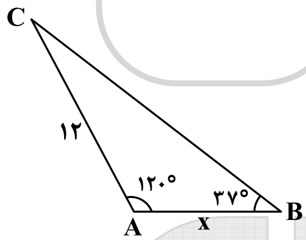
✍ حل:

$$\sin^۲B+\cos^۲B=۱ \Rightarrow \sin^۲B=۱-\cos^۲B=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow[\text{پس } \sin\hat{B} \text{ مثبت است}]{۰<\hat{B}<۱۸۰°} \sin B=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۶}{\sin ۳۰°}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۶}{\frac{۱}{۲}}=\frac{b}{\frac{۴}{۵}} \Rightarrow b=۱۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴۸}{۵}$$

☜ **مثال: شکل کلی یک زمین گلف به‌صورت زیر است. مساحت این زمین چقدر است؟ ($\sin ۲۳°\simeq ۰/۴$ و $\sin ۳۷°\simeq ۰/۶$)**

✍ حل:



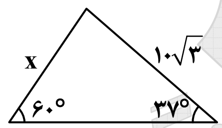
$$\hat{C}=۱۸۰°-(۱۲۰+۳۷)°$$

$$\frac{۱۲}{\sin ۳۷°}=\frac{x}{\sin ۲۳°} \Rightarrow x=\frac{۱۲\times ۰/۴}{۰/۶}=۸$$

$$S\simeq\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۸\times\sin ۱۲۰°=۴۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۴\sqrt{۳}$$

☜ **مثال: شمعی به‌طول ۱۵ سانتی‌متر را در حالی‌که خودکاری به‌طول $۱۰\sqrt{۳}$ به نوک آن تکیه داده شده و شمع با زمین زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد، روشن می‌کنیم. مدتی پس از آب شدن شمع (بدون تغییر زاویه با زمین) خودکار بدون تغییر طول کمی روی زمین سُر خورده و زاویه‌ی آن با زمین به ۳۷° کاهش می‌یابد. چند سانتی‌متر از شمع آب شده است؟ ($\sin ۳۷\simeq ۰/۶$)**

✍ حل: ابتدا طول شمع را پس از کاهش از رابطه‌ی سینوس‌ها می‌یابیم:

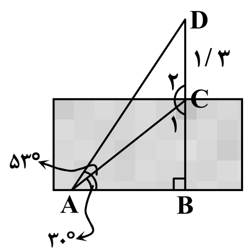


$$\frac{۱۰\sqrt{۳}}{\sin ۶۰°}=\frac{x}{\sin ۳۷°} \Rightarrow x=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\times ۰/۶=۱۲$$

بنابراین $۱۵-۱۲=۳$ سانتی‌متر از شمع آب شده است.

☜ **مثال: آنتنی روی زمین به‌صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون زمین آنتن، ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهای میله با نقطه‌ی A در داخل زمین زاویه‌ی ۵۳° و قسمت ابتدایی بیرون زمین آنتن با آن نقطه زاویه‌ی ۳۰° بسازد، طول آنتن کدام است؟ ($\sin ۲۳°\simeq ۰/۳۹$ و $\sin ۳۷°\simeq ۰/۶$)**

✍ حل: در مثلث ACD با توجه به قانون سینوس‌ها داریم:

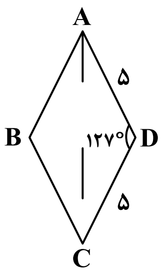


$$\frac{CD}{\sin(۵۳°-۳۰°)}=\frac{AC}{\sin D} \Rightarrow \frac{۱/۳}{\sin ۲۳°}=\frac{AC}{\sin ۳۷°} \Rightarrow AC=\frac{۱/۳\times ۰/۶}{۰/۳۹}=۲$$

$$BC=AC\,.\sin ۳۰°\simeq ۲\times\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow BD=BC+CD=۱+۱/۳=۲/۳$$

☜ **مثال: مساحت لوزی‌ای با ضلع ۵ و یک زاویه‌ی ۱۲۷ چقدر است؟** $(\text{Cos}\,۱۲۷° \simeq -\frac{۳}{۵})$

✍ حل:



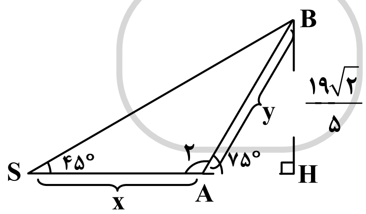
$$\text{Sin}^۲ D + \text{Cos}^۲ D = ۱$$

$$\Rightarrow \text{Sin}^۲ D = ۱ - \text{Cos}^۲ ۱۲۷° = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{Sin در ربع دوم}} \text{Sin}\,D = \frac{۴}{۵}$$

$$S_{ABCD} = AD \,.\, DC \,.\, \text{Sin}\,D = ۵ \times ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۲۰$$

☜ **مثال: حمید و وحید در یک امتداد روی زمین دراز کشیده‌اند و به نوک یک کوه می‌نگرند. اگر یکی از آن‌ها قله‌ی کوه را در نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۷۵ درجه و دیگری در نقطه‌ی S با زاویه‌ی ۴۵ درجه ببیند و ارتفاع کوه برابر ۳/۸ کیلومتر باشد، فاصله‌ی آن دو از هم چند کیلومتر است؟** $(\text{Sin}\,۷۵° \simeq ۰/۹۵)$

✍ حل: در مثلث **AHB** دایم:



$$\text{Sin}\,A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \text{Sin}\,۷۵° = \frac{۳/۸}{y} \Rightarrow y = \frac{۳/۸}{۰/۹۵} \Rightarrow y = \frac{۴ \times ۰/۹۵}{۰/۹۵} \to y = ۲$$

هم‌چنین داریم:

$$\hat{A}_۲ = ۱۸۰° - ۷۵° = ۱۰۵° \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰° - (۱۰۵° + ۴۵°) = ۳۰°$$

از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{y}{\text{Sin}\,۴۵°} = \frac{x}{\text{Sin}\,۳۰°} \Rightarrow \frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{x}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۲x \Rightarrow x = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین این دو نفر به فاصله‌ی $۲\sqrt{۲}$ کیلومتر از هم قرار دارند.

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲ فصل ۶

ماتریس:

آرایشی مستطیلی از اعداد را ماتریس می‌نامند. ماتریس را می‌توان با معرفی اعضای آن که درایه نامیده می شوند، یا به وسیله جمله عمومی آن نمایش داد.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

تعداد سطرها — تعداد ستون‌ها — درایه — مرتبه یا رتبه ماتریس

$1\le i\le m \quad 1\le j\le n$

☜ **مثال : اگر $a_{ij}=2i+j^2$ باشد و $A_{2\times 3}$ باشد، A را معین کنید.**

✍حل :

$a_{11}=3 \quad a_{12}=6 \quad a_{13}=11$
$a_{21}=5 \quad a_{22}=8 \quad a_{23}=13$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 5 & 8 & 13\end{bmatrix}$$

برخی ماتریس‌های پر کاربرد :

۱) **ماتریس مربعی:** ماتریسی که در آن تعداد سطرها و ستون‌ها برابر است، در این حالت عناصر a_{ii} را قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

۲) **ماتریس ستونی:** اگر ماتریسی فقط از یک ستون تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس ، ماتریس ستونی گفته می شود .

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n}\end{bmatrix}$$

۳) **ماتریس سطری:** اگر ماتریسی فقط از یک سطر تشکیل شده باشد ، به آن ماتریس ، ماتریس سطری گفته می شود .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{bmatrix}$$

٤) **ماتریس همانی:** ماتریس مربعی که قطر اصلی آن ۱ و بقیهٔ درایه های آن صفر باشد.

$$I_m=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{m\times m}$$

۵) **ماتریس صفر:** ماتریس $m\times n$ ای که تمام درایه‌های آن صفر باشد.

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

تساوی دو ماتریس :

دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هر گاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم مساوی باشد.

$$[a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$

☜ **مثال : اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2x-1 & x \\ 2y+1 & 1-x\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4y-1 & 2y \\ x+1 & -y\end{bmatrix}$ برابر باشند، x و y کدامند؟**

✍حل :

$4y-1=2x-1 \to x=2y$

$2y=x \to x=2y$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=2y+1 \to x=2y \\ -y=1-x \to x-y=1\end{array}\right\} \Rightarrow 2y-y=1 \to y=1 \to x=2$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی :

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مجموع دو ماتریس، ماتریسی است هم مرتبه با آن دو و به صورت :

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

یعنی کافی است درایه ها را نظیر به نظیر جمع کنیم .

به ازای هر عدد حقیقی r ماتریس rA به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب در اعداد حقیقی :

به ازای ماتریس‌های هم‌مرتبه A , B , C و عدد حقیقی r داریم:

۱) $A+(B+C)=(A+B)+C$ شرکت پذیری

۲) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ عضو بی اثر

۳) $A+(-A)=\overline{O}$ وجود عضو قرینه

٤) $A+B=B+A$ جابجایی

٥) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

٦) $r(A+B)=rA+rB$

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\ ۰&۳&-۲\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}-۱&۰&۴\\ ۲&-۵&۹\end{bmatrix}$ **باشد، ماتریس x را از معادله‌ی** $۳A+\frac{x}{۲}=۲B$ **به دست آورید.**

✍**حل :**

$$۳\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\ ۰&۳&-۲\end{bmatrix}+\frac{x}{۲}=۲\begin{bmatrix}-۱&۰&۴\\ ۲&-۵&۹\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\begin{bmatrix}-۲&۰&۸\\ ۴&-۱۰&۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&۶&-۳\\ ۰&۹&-۶\end{bmatrix}$$

$$\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}-۵&-۶&۱۱\\ ۴&-۱۹&۲۴\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-۱۰&-۱۲&۲۲\\ ۸&-۳۸&۴۸\end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها :

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix}a_{۱۱}&\cdots&a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\ldots+a_{۱n}b_{n۱}=\sum_{i=۱}^{n}a_{۱i}b_{i۱}$$

در حالت ضرب یک ماتریس $m\times n$ در یک ماتریس $n\times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

منظور از c_{ij} درایه سطر i ام و ستون i ام AB است.

نکته: برای آن که ماتریس $A\times B$ قابل تعریف باشد لازم است تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد. در این صورت مؤلفه سطر iام و ستون jام ماتریس حاصلضرب از ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B حاصل می‌گردد.

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ٤ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **باشد،** $C=AB$ ، $C_{۲۳}$ **کدامست؟**

✍**حل** : برای یافتن سطر دوم و ستون سوم حاصل‌ضرب، کافی است سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$C_{۲۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}=۲۰+۲=۲۲$$

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **باشد، حاصل** $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b \\ c= & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر** $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ٤ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **حاصل** $(A\times B)-(B\times A)$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ A\times B-B\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر** $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ٤ \end{bmatrix}$ **حاصل** $a+b-c-d$ **کدامست؟**

✍**حل :**

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}\rightarrow d=۱\quad c=۲\quad b=۳\quad a=۴\ \rightarrow\ a+b-c-d=۴$$

☜ **مثال : اگر داشته باشیم :** $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ **، مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

✍**حل :**

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳+a \\ ۳+۲b+a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\rightarrow a-۳=۱\rightarrow a=۴ \\ a+۲b+۳=۱\xrightarrow{a=۴} b=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۱$$

☜ **مثال : با فرض آنکه** $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ **مقدار** $x-y$ **کدام است ؟**

✍**حل :**

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -y+۴ \\ y+۲x+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\rightarrow -y+۴=-۱\rightarrow y=۵ \\ y+۲x+۲=۱\xrightarrow{y=۵} x=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow x-y=-۸$$

☜ مثال : ریشه‌های معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & -x & ۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \\ x & -۸x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \bar{O}$ کدام است؟

✍حل :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -x & ۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \\ x & -۸x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+x+۲x^۲ & -۱-x-۱۶x^۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱+x+۲x^۲ & -۱-x-۱۶x^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۲+۲x+۴x^۲-۱-x-۱۶x^۲ = ۰$$

$$\to -۱۲x^۲+x+۱=۰ \to (-۳x+۱)(۴x+۱)=۰ \begin{cases} x = -\frac{۱}{۴} \\ x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

خواص ضرب ماتریس‌ها :

اگر $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$ باشد آنگاه

۱) $A(BC) = (AB)C$ شرکت پذیری

۲) $A(B+C) = AB+AC \quad (A+B)C = AC+BC$ توزیع‌پذیری یا پخشی

۳) $A(rB) = (rA)B = r(AB)$

۴) $A_{m\times n} I_n = I_m A_{m\times n} = A$ عضو بی اثر ضرب ماتریسی

در فاکتورگیری عبارات ماتریسی هیچگاه اعداد را به تنهایی نمی‌نویسیم بلکه حاصلضرب آن عدد در ماتریس همانی با مرتبه مناسب را می‌نویسیم.

$A^۲+۲A \neq A(A+۲)$

$A^۲+۲A = A(A+۲I)$

تذکر: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت حذف‌پذیری ندارد (حتی اگر $A \neq \bar{O}$ باشد) مگر آن که A وارون‌پذیر باشد، یعنی :

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

مثلاً:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

تذکر: حاصلضرب دو ماتریس غیر صفر می‌تواند صفر شود .

مثلاً:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & b \\ -b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{O}_{۲\times ۲}$$

لذا حاصلضرب دو ماتریس برابر صفر باشد لزومی ندارد یکی از آنها برابر صفر باشد .

ماتریس‌های تعویض‌پذیر یا جابه‌جا شونده :

ضرب ماتریسها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نمی باشد . دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر (جابه‌جا شونده) گویند هر گاه $AB = BA$

در حالت کلی اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشند مگر آن که ماتریس‌ها دارای این خاصیت باشند که ضرب آنها دارای خاصیت جابجایی باشد.

☜ مثال : اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ مفروض باشند ، $a+b$ کدام است در صورتیکه B,A تعویض‌پذیر باشد؟

✍حل :

$$AB=BA \rightarrow \begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2a-15 & 2b-35\\ 5a+6 & 5b+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+5b & -5a+2b\\ 6+35 & -15+14\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix}5a+6=41 \rightarrow a=7\\ 5b+14=-1 \rightarrow b=-3\end{matrix}\right\} \rightarrow a+b=4$$

حال این دو عدد موجب برابری سطرهای اول نیز می‌شوند.

نکته: در حالت کلی ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$ با هم خانواده‌های خودشان و ماتریس‌هایی به صورت $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ نیز با هم خانواده‌های خودشان تعویض‌پذیرند. هم چنین ماتریس همانی **(I)** در هر مرتبه با ماتریس‌های مربع هم مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است.

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع :

اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، توان‌های طبیعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^1=A$$
$$A^2=A\times A$$
$$A^3=A^2\times A$$
$$\vdots$$
$$A^{m+1}=A^m\times A$$

خواص :

۱) $A^mA^n=A^nA^m=A^{m+n}$

۲) $(A^m)^n=A^{mn}$

۳) $(\lambda A)^n=\lambda^nA^n \qquad \lambda\in R$

٤) $I^n=I$

اما چون در ضرب ماتریس خاصیت جابه‌جایی لزوماً برقرار نمی‌باشد لذا تساوی $\mathbf{(AB)^n=A^nB^n}$ لزوماً برقرار نیست.

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم A^3 کدامست؟

✍حل :

برای به دست آوردن سطر دوم و ستون سوم A^3، ابتدا سطر دوم A^2 را با ضرب سطر دوم A در کلیه‌ی ستون‌های A به دست می‌آوریم.

$$A^2 \text{ سطر دوم } =\begin{bmatrix}0 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2x\end{bmatrix}$$

سطر ایجاد شده را در ستون سوم A ضرب می‌کنیم.

$$A^3 \text{ درایه سطر دوم و ستون سوم } =\begin{bmatrix}0 & 1 & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x\\ 1\end{bmatrix}=3x$$

☜ مثال : اگر $A^{2} = 5A - 2I$ باشد، در این صورت A^{4} برحسب A کدامست؟

✍حل :

$$A^{3} = A^{2}.A = (5A - 2I)A = 5A^{2} - 2A = 5(5A - 2I) - 2A = 25A - 10I - 2A = 23A - 10I$$

$$A^{4} = A^{3}A = (23A - 10I)A = 23A^{2} - 10A = 23(5A - 2I) - 10A = 115A - 46I - 10A = 105A - 46I$$

☜ مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس A^{7} کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{6} = (-I)^{3} = -I^{3} = -I \rightarrow A^{7} = -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^{4} \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A^{5} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، حاصل $b + c$ کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \rightarrow A^{4} = (A^{2})^{2} = I^{2} = I \Rightarrow A^{5} = A^{4}A = IA = A$$

$$\rightarrow I \times \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$-c = 1 \quad -d = 6 \quad -a = 2 \quad -b = 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} c = -1 \\ d = -6 \\ a = -2 \\ b = -4 \end{matrix}\right\} \rightarrow b + c = -5$$

☜ مثال : اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{2} - A$ کدامست؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{2} - A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

☜ مثال : هرگاه داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A^{2} = xA + yI$، قدرمطلق تفاضل اعداد y, x برابر کدام است ؟

✍حل :

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 3x & 4x+y \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ 2x = 10 \rightarrow x = 5 \\ 3x = 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 2$$

که این x و y باعث برقراری تساوی $4x + y = 22$ نیز می‌شوند، پس این تساوی قابل قبول است.

$$|x - y| = 3$$

دترمینان:

دترمینان یک ماتریس ۲×۲ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=|A|=ad-bc$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$ آن گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ چقدر است؟

حل :

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix} \rightarrow |AB|=۷\times۱۴-(۶)(-۱۰)=۹۸+۶۰=۱۵۸$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ -۲ & m+۱ \end{bmatrix}$ و $|A-I|=|A|+۲$ باشد، m کدامست ؟

حل :

$$A-I=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ -۲ & m+۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-۱ & -۱ \\ -۲ & m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A-I|=m(m-۱)-۲=m^۲-m-۲ \\ |A|+۲=m(m+۱)-۲+۲=m^۲+m \end{array}\right\} \Rightarrow m^۲-m-۲=m^۲+m \rightarrow ۲m=-۲ \rightarrow m=-۱$$

مثال : اگر $|A|\neq ۰$ ، دترمینان ماتریس $A_{۲\times۲}$ باشد ، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۲}{|A|}A$ کدام است؟

حل :

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \rightarrow |A|=a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱}$$

$$\frac{۲}{|A|}A=\begin{bmatrix} \frac{۲}{|A|}a_{۱۱} & \frac{۲}{|A|}a_{۱۲} \\ \frac{۲}{|A|}a_{۲۱} & \frac{۲}{|A|}a_{۲۲} \end{bmatrix} \rightarrow \left|\frac{۲}{|A|}A\right|=\frac{۴}{|A|^۲}(a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱})=\frac{۴}{|A|^۲}\times|A|=\frac{۴}{|A|}$$

نکته: با توجه به همین مسأله می‌توان در حالت کلی برای ماتریس‌های **۲×۲** گفت:

$$|\lambda A_{۲\times۲}|=\lambda^۲|A_{۲\times۲}| \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

ماتریس وارون یا ماتریس معکوس:

اگر به ازای ماتریس مربعی A ، ماتریس منحصر به فرد B وجود داشته باشد به گونه‌ای که $AB = BA = I$ آنگاه B را معکوس ماتریس A نامیده و با A^{-1} نمایش می‌دهند. توجه کنید که A^{-1} عضو معکوس ضرب ماتریس می‌باشد، اما $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$. لذا $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

قضیه: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری ماتریس A آن است که $|A| \neq 0$

نکات و خواص:

۱) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۲) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \qquad \lambda \neq 0$

۳) $(A^{-1})^{-1} = A$

توجه: رابطه $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ لزوماً برقرار نمی‌باشد.

☜ **مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ با چه شرطی وارون‌پذیر است؟**

✍**حل :**

شرط وارون‌پذیری ماتریس این است که: $|A| \neq 0$

$$\rightarrow |A| = (a+1)(a+2) - 2 = a^2 + 3a + 2 - 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a(a+3) \neq 0 \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

☜ **مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، حاصل ab کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\begin{matrix} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow ab = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

چون $AA^{-1} = I$ می باشد ، لذا داریم :

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 2-4b \\ 0 & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow a = -1$$

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

☜ مثال : اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & -٧ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس A کدامست؟

✍حل :

$$(A^{-1})^{-1}=A \Rightarrow (A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{۱۲+۲۱}\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{۶}{۳۳} & -\frac{۳}{۳۳} \\ \frac{۷}{۳۳} & \frac{۲}{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(\frac{۱}{۳۳})^{۲}(۶\times۲+۲۱)=\frac{۱}{۳۳}$$

نکته: جالب است بدانید در حالت کلی $|A^{-1}|=\frac{۱}{|A|}$ است.

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ٤ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$، $A-A^{-1}$ کدام ماتریس است؟

✍حل :

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۸-۷=۱$$

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A-A^{-1}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A|=-۱$، A^{-1} کدامست؟

✍حل :

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

☜ مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $(AB)^{-1}$ کدامست؟

✍حل :

$$(AB)^{-1}=\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-1}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توانستیم از رابطه‌ی $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ نیز بهره بگیریم.

☜ مثال : اگر $2A+I_{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $2A^{-1}$ چقدر است؟

✍حل :

$$۲A+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A^{-1}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |۲A^{-1}|=۲$$

☜ مثال : با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ مقدار a کدام باشد تا دترمینان ماتریس A^{-1} برابر ۲ باشد؟

✍حل :

$$A^{-1}=\frac{۱}{a+۲}\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{۱}{(a+۲)^{۲}}(a+۲)=\frac{۱}{a+۲}=۲ \Rightarrow a+۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ نیز بهره گرفت:

$$\frac{1}{2}=a+2 \Rightarrow a=\frac{-3}{2}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ باشد عنصر واقع بر سطر دوم و ستون اول در وارون ماتریس $2A$ کدام عدد است؟**

✍**حل :**

$$2A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow (2A)^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}10 & -6\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/5 & 1/5\\ 1 & -0/5\end{bmatrix}$$

نکته: می‌توان از رابطه‌ی $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ نیز بهره گرفت:

$$(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/5 & 1/5\\ 1 & -0/5\end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ آنگاه جواب معادله ی $AX=B$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow IX=X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

☜ **مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -12\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{49-48}\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}\to |(A^2)^{-1}|=49-48=1$$

☜ **مثال : اگر A یک ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و در رابطهٔ $A^2=3A+I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A-A^{-1}$ کدام است؟**

✍**حل :**

$$A^2=3A+I \Rightarrow A(A-3I)=I$$

چون معکوس یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است، لذا ماتریس $A-3I$ معکوس ماتریس A است که با ضرب کردن A در آن حاصل برابر I شده است، لذا: $A^{-1}=(A-3I)$

پس:

$$A-A^{-1}=A-(A-3I)=3I \to |A-A^{-1}|=|3I|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9$$

کاربردهای ماتریس:

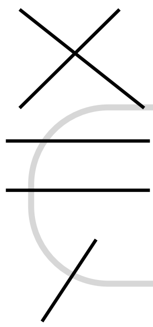
دستگاه دو معادله دو مجهول :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

بیان ماتریسی دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت زیر است :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

تعبیر هندسی دستگاه فوق معادله‌ی دو خط در صفحه است لذا :



۱) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ دو خط متقاطعند $\Leftarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۲) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ دو خط موازی‌اند $\Leftarrow$ دستگاه جواب ندارد.

۳) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ دو خط منطبق‌اند $\Leftarrow$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

به بیان دیگر: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد (یا بی‌شمار جواب دارد)

☜ **مثال : دستگاه** $\begin{cases} mx + 2y = 4 \\ (1-m)x + 3y = 5 \end{cases}$ **با چه شرطی برای m فقط یک جواب دارد؟**

✍ **حل :**

$$\frac{m}{1-m} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 3m \neq 2 - 2m \to 5m \neq 2 \to m \neq \frac{2}{5}$$

☜ **مثال : اگر دستگاه** $\begin{cases} (2m-1)x - y = 1 \\ -5x + (n-2)y = 2 \end{cases}$ **دارای بی شمار جواب باشد ، مقدار $n-m$ چقدر است؟**

✍ **حل :**

$$\frac{2m-1}{-5} = \frac{-1}{n-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2m = -\frac{3}{2} \to m = -\frac{3}{4} \\ n-2 = -2 \to n = 0 \end{matrix}\right\} \to n - m = \frac{3}{4}$$

☜ **مثال : به ازای چه مقدار از m، دستگاه معادلات زیر فاقد جواب (مبهم) می‌شود ؟**

$$\begin{cases} (m-1)x - 3y = 4m + 2 \\ -x + (m+1)y = m \end{cases}$$

✍ **حل :**

$$\frac{m-1}{-1} = \frac{-3}{m+1} \neq \frac{4m+2}{m} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \to m^2 = 4 \to m = \pm 2$$

$$\begin{cases} m = 2 \to \dfrac{-3}{2+1} \neq \dfrac{2+2}{2} \to m = 2 & \text{قابل قبول است} \\ m = -2 \to \dfrac{-3}{-2+1} \neq \dfrac{-2+2}{-2} \to m = -2 & \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

☜ مثال : به ازای چند مقدار برای m دستگاه $\begin{cases}(m+1)x-2y=m^2-2\\(m-3)y+3x=-1\end{cases}$ فاقد جواب است؟

✍حل :

$$\frac{m+1}{3}=\frac{-2}{m-3}\neq\frac{m^2-2}{-1}$$

$$m^2-2m-3=-6$$

$$m^2-2m+3=0$$

این معادله جواب ندارد $(\Delta<0)$، یعنی دو خط همواره متقاطعند و این دستگاه هرگز فاقد جواب نیست.

روش‌های حل دستگاه در معادله دو مجهولی (در صورت وجود جواب منحصر به فرد) :

۱) روش حذفی :

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول می‌توان یکی از متغیرها را بین دو معادله حذف نمود که در این صورت جواب‌های دستگاه $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

این روش به **دستور کرامر** مشهور است.

۲) روش ماتریس وارون :

$$AX=B\quad\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\quad\Rightarrow\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B\quad\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

☜ مثال : جواب‌های دستگاه $\begin{cases}2x+3y=5\\2x-y=1\end{cases}$ را بدست آورید.

حل:

روش اول: (روش حذفی) دو دستگاه را از هم کم می‌کنیم:

$$4y=4\ \rightarrow\ y=1\ \rightarrow\ 2x-1=1\ \rightarrow\ x=1$$

روش دوم: (روش کرامر)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1$$

روش سوم:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

☜ مثال : در دستگاه $\begin{cases} x^{2}+xy=6 \\ y^{2}+xy=10 \end{cases}$ مقدار مثبت x کدام است؟

✍حل :

$$\begin{cases} x(x+y)=6 \\ y(y+x)=10 \end{cases} \to \frac{x}{y}=\frac{6}{10} \to y=\frac{5}{3}x \to x^{2}+x(\frac{5}{3}x)=6 \Rightarrow 3x^{2}+5x^{2}=18 \Rightarrow x^{2}=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

☜ مثال : مقدار x از دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{xy}{2x+y}=\frac{5}{3} \\ \frac{xy}{y-x}=-\frac{5}{7} \end{cases}$ کدام است؟

✍حل :

$$\frac{\frac{xy}{2x+y}}{\frac{xy}{y-x}}=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{7}}=-\frac{7}{3} \to \frac{y-x}{2x+y}=-\frac{7}{3} \Rightarrow 3y-3x=-14x-7y \Rightarrow 10y=-11x \to y=-\frac{11}{10}x$$

$$\frac{x(-\frac{11}{10}x)}{2x-\frac{11}{10}x}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{-\frac{11}{10}x^{2}}{\frac{9}{10}x}=-\frac{11}{9}x=\frac{5}{3} \Rightarrow x=-\frac{9\times 5}{3\times 11}=-\frac{15}{11}$$

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۲ فصل ۷

آنالیز ترکیبی:

شاخه‌ای از ریاضیات که در آن روش‌هایی برای بدست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل، بدون شمارش معرفی می‌گردد.

فاکتوریل:

اگر n یک عدد طبیعی باشد:

$n! = n(n-1)(n-2)\times...\times 1$

نتیجه: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = ...$

قرارداد: $0! = 1$

اصل جمع:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشند و انجام همزمان این دو عمل، غیرممکن باشد، تعداد حالات وقوع عمل اول یا عمل دوم برابر است با $n_1 + n_2$. مثلاً اگر هشت پیراهن آبی و ۱۲ پیراهن قرمز داشته باشیم به ۲۰ حالت می‌توانیم پیراهن بپوشیم.

اصل ضرب:

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دیگری به n_2 طریق قابل انجام باشد، به فرض آنکه وقوع این اعمال بر یکدیگر تأثیری نداشته باشد تعداد حالات انجام همزمان این دو عمل برابر است با $n_1 \times n_2$. مثلاً اگر ۵ پیراهن و ٤ شلوار داشته باشیم به ۲۰ طریق می‌توان لباس پوشید.

جایگشت n شیء متمایز:

حالات مختلف قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء می‌نامند. در واقع حالات جابه‌جاشدن n شیء در یک ردیف را جایگشت آن n شیء می‌نامند. مثلاً جایگشت سه حرف a,b,c عبارت است از abc , acb bac , bca , cab , cba

قضیه: تعداد جایگشت های n شئ متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با: n!

تذکر: در این درس هرگاه صحبت از جایگشت می شود ، منظور تعداد جایگشتهاست .

مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ به چند طریق می‌توان اعداد هفت رقمی بدون ارقام تکراری نوشت به طوری که زوج باشد؟

حل:

برای آنکه عدد زوج باشد باید رقم سمت راست آن زوج باشد .

در حالتی که تکرار ارقام جایز نیست ، باید نسبت به وضعیت صفر مسأله را به دو حالت تقسیم کرد .چون اگر صفر در سمت چپ قرار بگیرد عدد هفت رقمی نخواهد بود لذا مسأله را در دو حالت بررسی می کنیم .

حالت اول حالتی است که صفر در سمت راست قرار دارد و لذا دیگر در سمت چپ قرار نخواهد گرفت و حالت دوم حالتی است که ارقام زوج دیگر در سمت راست قرار بگیرند .

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{0}{\underline{1}} \\ \\ \underline{5} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underset{\substack{2\\4\\6}}{\underline{3}} \end{array}\right\} \rightarrow \text{جواب} = 6! + 15 \times 5!$$

☜مثال: جواب مثال قبلی در حالتی که ارقام امکان تکرار شدن داشته باشند را به دست آورید .

✍ حل:

$\underline{۶}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underline{۷}\quad \underset{۰,۲,۴,۶}{\underline{۴}} \rightarrow$ جواب $= ۶\times ۷^{۵}\times ۴$

در این حالت چون امکان تکرار وجود دارد، به دو حالت کردن مسأله نیاز نیست، چون هم‌چنان باید مواظب باشیم صفر در سمت چپ عدد قرار نگیرد.

☜مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت به طوریکه تکرار ارقام جایز است؟

✍ حل: با تقسیم کردن اعداد بزرگتر از ۳۵۰۰ به دو گروه خواهیم داشت :

$\underset{۳}{\underline{۱}}\quad \underset{۵,۶,۷}{\underline{۳}}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}$ $۱\times ۳\times ۸\times ۸$

$\underset{۴,۵,۶,۷}{\underline{۴}}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}\quad \underline{۸}$ $۴\times ۸\times ۸\times ۸$

$\rightarrow$ تعداد اعداد: $۳\times ۸^{۲} + ۴\times ۸^{۳} - ۱$

خود ۳۵۰۰ را نمی‌خواهد

☜مثال: با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه سه حرفی با حروف متمایز می‌توان تشکیل داد که حرف اولش نقطه نداشته باشد؟

✍ حل:

$\underline{۴}\quad \underline{۵}\quad \underset{م,ه,و,ر}{\underline{۴}} \rightarrow\ = ۴\times ۵\times ۴ = ۸۰$

دقت کنید که ی در اول کلمه نقطه‌دار می‌شود.

☜مثال: تعداد حالاتی که می‌توان چهار کتاب ریاضی مختلف و سه فیزیک مختلف یک در میان در قفسه کنار هم قرار داد چقدر است؟ اگر چهار کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک موجود بود جواب مسأله چه می‌شد؟

✍ حل:

ر ف ر ف ر ف ر $\rightarrow$ $۴!\times ۳!$

ف/ر ر ف ر ف ر ف $\rightarrow$ می‌تواند ریاضی شروع‌کننده باشد یا فیزیک $\rightarrow ۲\times ۴!\times ۴!$

☜مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که شامل عدد ۲ باشد؟

✍ حل: به جای دسته بندی مسأله به سه حالت بهتر است تنها حالت غیر قابل قبول را از بین حالات حذف کنیم :

$\underline{۸}\quad \underline{۹}\quad \underline{۹}$ اعداد فاقد ۲: ۸×۹^{۲}

اعداد شامل ۲: $۹۰۰ - ۸\times ۹^{۲} = ۹(۱۰۰ - ۷۲) = ۹\times ۲۸ = ۲۵۲$

قضیه طناب پیچ:

تعداد جایگشت n شیء متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار گرفته باشند برابر است با $(n-r+1)!r!$ و تعداد جایگشت‌های n شیء معین و متمایز که در آن r شیء معین کنار هم قرار نداشته باشند، برابر است با $n!-(n-r+1)!r!$

☜مثال: با حروف a,b,c,d,e,f چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که حتماً a,b کنار هم باشند و c,d کنار هم نباشند؟

✍ حل:

$(ab),c,d,e,f \to$ کنار هم هستند a,b تعداد اعدادی که $= 5!\times 2!$

$(ab)(cd)\ e\ f \to$ کنار همند c,d کنار هم هستند و a,b تعداد اعدادی که $= 4!\times 2!\times 2!$

$5!\times 2! - 4!\times 2!\times 2! =$ تعداد اعدادی که a و b کنار همند و c و d کنار هم نیستند

☜مثال: ۵ نفر a و b و c و d و e می‌خواهند سخنرانی کنند. به چند حالت بین فرد a و b فقط یک نفر سخنرانی می‌کند؟

✍ حل:

$a\ \square\ b\ \Delta\ *$ ۳ نفر می‌توانند بین a,b صحبت کنند

$3! \times 2 \times 3 = 36$

جایشگت ۳ شیء — جابجا شدن a,b — افرادی که بین a,b صحبت می‌کنند

جایگشت با اشیاء دایره‌ای:

اگر ابتدا و انتهای یک صف را به هم متصل کنیم و یا n شیء را دور یک میزگرد قرار دهیم، جایگاه شروع و پایان بی‌معنی می‌شود. در واقع چهار حالت زیر با هم معادلند و یک حالت محسوب می‌شوند:

B / A ◯ C / D $\equiv$ A / D ◯ B / C $\equiv$ D / C ◯ A / B $\equiv$ C / B ◯ D / A

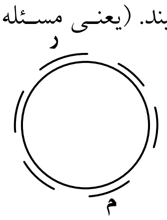
لذا اگر اشیا به صورت دایره ای چیده شود فرد اولی که تصمیم به نشستن می‌گیرد، دارای ۱ انتخاب است چون بین مکانهای نشستن هیچ تفاوتی نیست، اما بقیه افراد به نسبت این فرد دارای مکان خواهند شد که $n-1$ نفر باقیمانده دارای $(n-1)!$ جایگشت هستند.

تذکر: اگر اشیاء قابل وارونه‌سازی باشند (مانند دسته کلید، دست‌بند، گردنبند و تسبیح) تعداد جایگشت n شیء برابر است با $\frac{(n-1)!}{2}$ در این حالت جهت چرخش نیز فاقد اهمیت می‌باشد.

☜مثال: اگر رئیس، معاون و چهار کارمند مختلف بخواهند دور یک میز بنشینند، این کار به چند طریق امکان پذیر است هرگاه:

الف) رئیس مقابل معاون باشد:

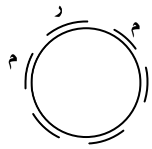
✍ **حل:** اگر رئیس بنشیند، معاون فقط می‌تواند در مکان مقابل رئیس بنشیند و ۴ کارمند بـه دلخـواه مـی‌تواننـد بنشـینند. (یعنـی مسـئله تبدیل به صف می‌شود.)



$4! = 24$

ب) **رئیس مجاور معاون باشد:**

✍ **حل:** در این حالت معاون برای نشستن ۲ انتخاب دارد که در کدام طرف رئیس بنشیند.



جای معاون

$$\underset{\uparrow}{4!\times 2} = 48$$

جایگشت با اشیاء تکراری:

اگر بخواهیم جایگشت n شیء که k_1 تا از آنها از نوع اول و k_2 تا از آنها از نوع دوم و .....، k_m تا از آنها از نوع m ام باشد را حساب کنیم (با شرط اینکه $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$) تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$

☜**مثال: با ارقام ۰و۰و۰و٤و٤و٤و۵و۵و۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان ساخت؟**

✍ **حل:** فرض کنید ارقام متمایز باشند، مثلاً $0, 0', 0'', 4, 4', 4'', 5, 5', 5''$. در پایان وقتی اعداد ۹ رقمی نوشته شده، جایگشت اشیا تکراری را حذف می‌کنیم.

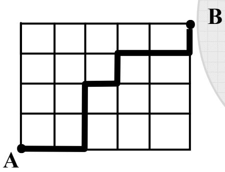
برای سمت چپ نمی‌توانیم از صفر استفاده کنیم.

$$\frac{\underset{\uparrow}{6}\times 8!}{3!\times 3!\times 3!}$$

☜**مثال: با ارقام ۰و۰و۰و۰و٤و٤و٤و٤ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟**

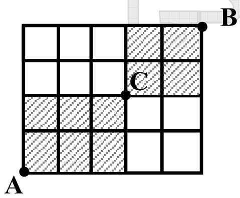
✍ **حل:** فرض کنید ارقام متمایز باشند، تعداد جایگشتها بدون در نظر گرفتن تکرار برابر است با: $\dfrac{4\times 7!}{4!\times 4!}$

☜**مثال: در شبکه مستطیلی شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه A به نقطه B حرکت کرد به طوری که کوتاه‌ترین مسیر پیموده شود؟**



✍ **حل:** برای آنکه با کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم باید حداقل ۹ حرکت انجام دهیم. مثلاً دنباله rruururru نشان‌دهنده‌ی مسیر فوق است. (r نشان دهنده‌ی حرکت به سمت راست و u نشان دهنده‌ی حرکت به سمت بالاست) باید ۵ حرکت به راست و ٤ حرکت به بالا انجام دهیم یعنی یک دنباله متشکل از ٤ تا u و ۵ تا r که این کار به $\dfrac{9!}{5!\,4!}$ حالت امکان‌پذیر است.

☜**مثال: در مسأله فوق اگر بخواهیم تعداد مسیرهایی را بدست آوریم که حتماً از نقطه c بگذرند، به چند طریق ممکن است؟**



✍ **حل:** ابتدا از A به C می‌رویم، سپس از C به B می‌رویم: $\dfrac{4!}{2!\times 2!}\times\dfrac{5!}{3!\times 2!}$

انتخاب:

تا اینجا در مسائل کلیه داده‌های مسأله در شمارش حالات ممکن مورد استفاده قرار می‌گرفت. حال به بررسی شمارش جایگشت حالاتی می‌پردازیم که در آن قسمتی از مجموعه داده شده انتخاب شده باشد. در اینجا ابتدا باید تعداد حالاتی که می‌توان اشیاء را انتخاب کرد را به دست آورد (ترکیب) و سپس جایگشت اشیا انتخاب شده را محاسبه کرد (تبدیل).

تبدیل:

تعداد حالات قرار گرفتن r شیء که از بین n شیء انتخاب شده‌اند در کنار یکدیگر، جایگشت r شیء از n شیء یا تبدیل r تایی n شیء می‌نامند. در واقع تبدیل، تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء می‌باشد به طوری که ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار یکدیگر، حائز اهمیت باشد.

قضیه: تعداد تبدیل‌هایی r شیء از n شیء برابر است با:

$$P(n,r)=(n)_r=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)=n(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب:

تعداد حالات انتخاب r شیء از میان n شیء که در آن ترتیب انتخاب اهمیّت نداشته باشد را ترکیب r تایی n شیء یا ترکیب r از n می‌نامند و با $\binom{n}{r}$ یا $\mathbf{c(n,r)}$ نشان می‌دهند.

به عبارت دیگر ترکیب r تایی n شیء یافتن زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی است.

ارتباط بین تعداد حالات انتخاب با ترتیب r شیء از میان n شیء با تعداد حالات انتخاب بدون ترتیب r شیء از میان n شیء به صورت زیر است:

$$P(n,r)=r!\times c(n,r)\Rightarrow c(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

نکته: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که شامل k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$ و تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء که فاقد k شیء معین باشند برابر است با $\binom{n-k}{r}$ $\quad \mathbf{n-k\geq r}$

☜ **مثال: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن o و m حتماً موجود باشند؟**

✍ **حل:** ابتدا ۳ حرف دیگر که لازم داریم را انتخاب کرده، سپس همه را در یک ردیف می‌چینیم.

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{۳ حرف دیگر}}\times\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ حرف}}$$

☜ **مثال: با حروف کلمه History چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت که:**

الف) حروف صدادار نداشته باشد؟

حروف صدادار u، o، i، e، a می‌باشند. فقط از ۵ حرف باقیمانده باید ٤ حرف انتخاب کنیم.

$$\binom{5}{4}\times 4!=5\times 4!=5!$$

ب) با حرف صدادار شروع شود و با حرف بی‌صدا ختم شود؟

$$\underset{\uparrow\, i,o}{\underline{2}}\quad\underline{5}\quad\underline{4}\quad\underset{\uparrow\, h,s,t,r,y}{\underline{5}}$$

$$2\times5\times4\times5=200$$

یا $2\times\left[\binom{5}{2}\times 2!\right]\times 5$

ج) با حرف T شروع شود و شامل S باشد؟

ابتدا ۲ عضو دیگر غیر از S را انتخاب کرده و سپس در کنار هم می‌چینیم.

$\{S,-,-\}$ $\qquad \binom{۵}{۲}\times ۳!$ $\qquad \underline{T}\ \_\ \_\ \_$

☜**مثال: ۸ خط دو به دو متمایز حداکثر در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟**

✍ **حل:** حداکثر تعداد نقاط تقاطع دو خط زمانی است که هر دو خط انتخابی همدیگردر نقاط متمایز قطع کنند. پس تعداد حالات تقاطع دوخط حداکثر برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی که از ببین این خطوط‌می توان انتخاب کرد: $\binom{۸}{۲}$

☜**مثال: از میان پنج مهره قرمز و چهار مهره سفید به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به نحوی دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد؟**

✍ **حل:** $\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{قرمز}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{سفید}} = ۴۰$

☜**مثال: از بین ۵ مهره سفید متمایز و ٤ مهره آبی متمایز و ۳ قرمز متمایز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد و در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند؟**

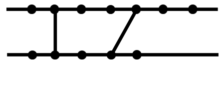
✍ **حل:** ابتدا ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم، سپس در کنار هم می‌چینیم: $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\times ۳!$

☜**مثال: در یک امتحان دانش‌آموزی باید هشت سؤال از میان ۱۰ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ به چهار سؤال از پنج سؤال اول اجباری باشد، او به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟**

✍ **حل:** دو حالت امکان‌پذیر است که نهایتاً با هم جمع می‌کنیم: $\underbrace{\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}}_{\text{۴ سوال از ۵ سوال اول}} + \underbrace{\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۳}}_{\text{۵ سوال از ۵ سوال اول}} = ۵\times۵+۱۰ = ۳۵$

☜**مثال: دو خط موازی داده شده‌اند. روی یکی از این خطها ۵ نقطه و روی دیگری ۷ نقطه قرار دارد. به چند طریق می‌توان با این نقاط، چهارضلعی ساخت؟**

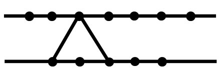
✍ **حل:** ۲ نقطه از خط بالایی و ۲ نقطه از خط پایینی انتخاب می‌کنیم: $\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}$

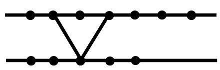


☜**مثال:در مسأله فوق تعداد مثلث‌ها برابر کدام است؟**

✍ **حل:**

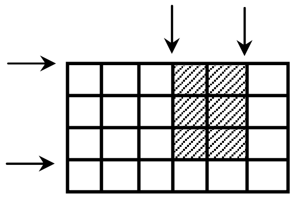
یا باید دو نقطه از بالایی انتخاب کنیم و یک نقطه از پایینی و یا بالعکس





$\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲}$

☜مثال: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟



✍ حل: باید ۲ خط از بین خط‌های افقی و ۲ خط از بین خط‌های عمودی انتخاب کنیم: $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۲}$

در حالت کلی در یک شبکه $m\times n$ تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با: $\binom{n+۱}{۲}\binom{m+۱}{۲}$

☜مثال: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتماً یک جفت در میان آنها باشد؟

✍ حل: ابتدا ۲ جفت انتخاب می‌کنیم. سپس یکی از جفت‌ها را برمی‌داریم. سپس از جفت باقی‌مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۱۰}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱۸۰$$

راه ۲: ابتدا ۲ جفت برمی‌داریم، سپس ۳ لنگه را انتخاب می‌کنیم که حتماً بینشان ۱ جفت هست.

☜مثال: ۱۲ نفر متشکل از ٦ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ٤ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد به شرطی که در بین آن‌ها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

✍ حل:

ابتدا ٤ زوج انتخاب می کنیم سپس از بین این ٤ زوج از هرکدام یک نفر را انتخاب می کنیم ، در این حالت حتماً هیچ زن و شوهری با هم انتخاب نشده اند :

$$\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\text{انتخاب ٤ زوج}}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}$$

☜مثال: سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ده پرتاب یک سکه به این منظور رسید کدام است؟

✍ حل: باید از ۹ بار قبلی ۲بار رو آمده باشد: $\binom{۹}{۲}$

☜مثال: از بین ۸ نفر قبول شدگان المپیاد، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. تا تعداد عضوهای پیشامد آن که در آن فرد مشخصی حتماً در بین انتخاب شدگان باشد کدام است؟

✍ حل: اگر فرد قبول شده حتماً در بین افراد باشد، کافی است دو نفر دیگر انتخاب کنیم: $\binom{۷}{۲}$

☜مثال: تساویهای زیر را با مفاهیم و روابط ترکیب اثبات کنید.

الف) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$

اگر بخواهیم از بین جمعی nنفره، k نفر که یکی از آنها رییس باشد، انتخاب کنیم ۲ راه داریم:

۱- اول k نفر را انتخاب می‌کنیم. سپس ۱ نفر را از بین این k نفر به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم: $\binom{k}{۱}\binom{n}{k}$

۲- یا اول ۱ نفر را به عنوان رییس انتخاب می‌کنیم و سپس از بین بقیه افراد $k-۱$ نفر را انتخاب می‌کنیم: $\binom{n-۱}{k-۱}\binom{n}{۱}$

ب) $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

اگر بخواهیم از ۲ گروه m نفره و n نفره، k نفر را انتخاب کنیم به ۲ طریق امکان‌پذیر است.

۱- هم‌زمان k نفر را انتخاب کنیم. $\binom{m+n}{k}$

۲- از گروه اول و دوم به‌ترتیب افرادی انتخاب کنیم که جمعاً k نفر باشند.

۰ نفر از گروه اول   k نفر از گروه دوم

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

الگوهای پرکاربرد:

کنار هم چیدن اشیائی که بعضی از آن‌ها نباید کنار هم قرار گیرند:

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می‌چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آن‌ها اشیائی که نمی خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می‌دهیم.

مثال: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف b و پنج حرف a می‌توان ساخت به طوری که هیچ دو a کنار هم نباشند؟

حل: ابتدا bها را می‌چینیم، سپس در فواصل به‌وجود آمده، aها را جایگزین می‌کنیم:

حالت $\binom{8}{5}$ $-b-b-b-b-b-b-b-$

مثال: با ارقام ۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱ چند عدد هفت رقمی می‌توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آن‌ها دو رقم متوالی زوج نباشند؟

حل: ابتدا ارقام فرد را می‌چینیم و در بین آن‌ها زوج‌ها را جا می‌دهیم:

جایگاه رقم زوج

$\binom{5}{3}\times 3!\times 4!$ ـ ف ـ ف ـ ف ـ ف ـ

جایگشت زوج‌ها با هم   جایگشت فردها با هم

مثال: حروف EEEFFFDD را به چند طریق می‌توان پیش هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها پیش هم نباشند؟

حل:

$\binom{6}{3}\times\frac{5!}{3!\times 2!}$ $-F-F-F-D-D-$

محل قرار گرفتن Eها   جایگشت Fها و Dها با هم

چینش اشیائی که عده ای از آنها ترتیبشان از قبل معلوم است:

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه‌ی اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

☜**مثال: هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه‌ای ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟**

✍ **حل:** ابتدا به $\binom{۷}{۳}$ حالت، طبقه پیاده شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ٤ طبقه لحاظ می‌کنیم: $\binom{۷}{۳}\times ۴!$

☜**مثال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟**

✍ **حل:** ابتدا ۳ رقم را به $\binom{۱۰}{۳}$ حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

☜**مثال: با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها A بعد از O و نیز E بعد از A باشد؟**

✍ **حل:** ابتدا مکان A و E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲تا H داریم):

$$\binom{۸}{۳}\times\frac{۵!}{\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت Hها با هم}}}$$

تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند:

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند، با تقسیم‌بندی مسأله به حالت‌های مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می‌آوریم.

☜**مثال: با ارقام ۲ و۲ و٤ و٤ و٦ و٦ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟**

✍ **حل:**

{۲،۴،۶} اعداد بدون تکرار ← $۳! = ۶$ حالت ← جایگشت ارقام

{*،_،_} اعداد با یک تکرار ← $\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{رقم تکرارشونده}}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{رقم غیرتکراری}}\times\frac{۳!}{۲!}=۱۸$

← کل اعداد $= ۱۸ + ۶ = ۲۴$

☜مثال: با حروف کلمه ALIABAD چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟

✍ حل:

حداکثر یک A: $\binom{5}{4}\times 4!$

دوبار A بیاید: AA: $\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2}$ (انتخاب ۲ رقم دیگر، جایگشت ارقام)

سه‌بار A بیاید: AAA: $\binom{4}{1}\times\frac{4!}{3!}$ (انتخاب ۱ رقم دیگر، جایگشت ارقام)

کـل کلمـات ← $=120+72+16=208$

خواص ترکیب:

۱- داریم:

الف) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\Rightarrow$ اگر $\binom{n}{x}=\binom{n}{y}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x+y=n\end{cases}$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شیئ از بین n شیئ با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است .

یا تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعۀ n عضوی با تعداد زیر مجموعه های $n-r$ عضوی یک مجموعۀ n عضوی برابر است .

ب) $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$ **قاعده پاسکال**

این قضیه مفهوماً به این معناست که در انتخاب r عضو یک عضو معین یا حضور دارد یا ندارد . سمت راست شمارش نامنظم و سمت چپ شمارش منظم است .

تعیین ضریب یک جمله از بسط:

نکته: در حالت کلی در بسط $(a_1+a_2+...+a_r)^n$ ضریب جمله $a_1^{k_1}a_2^{k_2}....a_r^{k_r}$ $(\sum_{i=1}^{r}k_i=n)$ برابر است با $\frac{n!}{k_1!k_2!....k_r!}$

☜مثال: در بسط $(a+b+c)^5$ ضریب جمله a^3bc کدام است؟

✍ حل: چون جمله a^3bc در واقع aaabc بوده، تمام جایگشت‌های c,b,a,a,a جمله‌ی a^3bc تولید می‌کند و ضریب جمله در واقع تعداد دفعاتی است که یک جمله تولید می‌شود. (چون به همان تعداد بار این جمله با خودش جمع می‌شود.)

$\frac{5!}{3!}\times a^3bc \leftarrow aaabc=a^3bc$

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+...+\binom{n}{n}x^0y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

نتایج: با قرار دادن $x=y=1$ و $x=-y=1$ نتایج مفید زیر به دست می آید :

$$1)\ x=y=1 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2)\ x=-y=1 \Rightarrow \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots=0 \Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

یعنی تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی یک مجموعه با هم برابر است.

مثال: اگر $\binom{n}{10}=\binom{n}{11}$ حاصل $\binom{n}{19}$ کدامست؟

حل:

$$\rightarrow n=10+11 \rightarrow \binom{21}{19}=\frac{21\times 20}{2}=210$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

الف) $$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\binom{8}{3}+\binom{8}{4}}_{\binom{9}{4}}+\binom{9}{5}}_{\binom{10}{5}}+\binom{10}{6}}_{\binom{11}{6}}+\binom{11}{7}}_{\binom{12}{7}}=$$

ب) $$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=$$

ابتدا به‌جای $\binom{2}{2}$، $\binom{3}{3}$ را جایگزین کرده و سپس متوالیاً از قاعده‌ی پاسکال بهره می‌گیریم.

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{20}{2}=\dots\binom{20}{3}+\binom{20}{2}=\binom{21}{3}$$