بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

سیزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های میان‌دوره

آزمون تئوری ۱

(۱۶ مرداد ۱۳۹۶ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۳۰)

توضیحات مهم:

۱. این آزمون ۸ سؤال دارد و زمان آن ۲۷۰ دقیقه است.
۲. به همراه سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته است. نام و نام خانوادگی خود را بر روی این دفترچه وارد کنید.
۳. در دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، پاسخ هر سؤال را در برگه‌ی مربوط به همان سؤال بنویسید.
٤. استفاده از ماشین حساب CASIO $fx-82MS$ مجاز است.
٥. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	$۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	$۳/۰۰ \times ۱۰^{۸}$
h	ثابت پلانک	$\mathrm{J\ s}$	$۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$
k	ثابت بولتزمن	$\mathrm{J\ K^{-1}}$	$۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	$۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}$
eV	الکترون‌ولت	J	$۱/۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$
m_H	جرم اتم هیدروژن	kg	$۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶}$
ly	سال نوری	m	$۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$۶/۹۶ \times ۱۰^{۸}$
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴}$
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸
	تمایل محوری زمین		$۲۳/۵^\circ$
R_{wd}	شعاع کوتوله‌ی سفید نوعی	$R_\oplus$	۱
R_{ns}	شعاع ستاره‌ی نوترونی نوعی	km	۱۰
$H_\circ$	ثابت هابل	$\mathrm{km\ s^{-1}\ M}pc^{-1}$	۶۷
	دمای تابش زمینه‌ی کیهانی	K	۲/۷۳

سؤال ۱ (۱۵ نمره)

معادله‌ی یک موج عرضی به صورت $y = ۰/۱۵\sin(۰/۷۹x - ۱۳t)$ است که در آن x و y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.

الف) مقدار جابه‌جایی (y) را در مکان $x = ۲/۳\ \mathrm{m}$ و زمان $t = ۰/۱۶\ \mathrm{s}$ به دست آورید.

موج دیگری به این موج افزوده می‌شود و یک موج ایستاده ایجاد می‌کند.

ب) مقادیر y_m، k و ω را **برای موج ایستاده‌ی به‌وجود آمده** محاسبه کنید.

ج) در شرایط جدید، جابه‌جایی (y) در همان موقعیّت قسمت «الف» چه‌قدر خواهد بود؟

سؤال ۲ (۳۰ نمره)

در این مسئله فرض می‌کنیم **کیهان، تخت و مادّه-غالب** است. می‌دانیم معادلات تحوّل کیهان عبارت اند از

جدول ۱

عنوان	رابطه
معادله‌ی پیوستگی	$d\rho + ۳\frac{da}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^۲}\right) = ۰$
معادله‌ی اوّل فریدمان	$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^۲ = \frac{۸\pi G}{۳}\rho - \frac{kc^۲}{a^۲}$
معادله‌ی دوّم فریدمان	$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۴\pi G}{۳}\left(\rho + \frac{۳P}{c^۲}\right)$
چگالی بحرانی کیهان	$\rho_c = \frac{۳H^۲}{۸\pi G}$
متریک رابرتسون-واکر	$ds^۲ = -c^۲dt^۲ + a_{(t)}^۲[d\chi^۲ + \chi^۲ d\Omega^۲]$

*** توجّه کنید که به جز معادلات بالا، سایر روابط باید اثبات شوند. به روابطی که بدون اثبات نوشته شوند، نمره‌ای تعلّق نمی‌گیرد.**

*** حتماً جواب‌های خود را در جدول پاسخ‌نامه نیز وارد کنید.**

الف) رابطه‌ی $a(t)$ را به دست آورید.

دوردست‌ترین کهکشان مشاهده شده، کهکشان GN-z11 است که در قرمزگرایی $z = ۱۱/۱$ قرار دارد. فرض کنید نور این کهکشان که در زمان t_e ساطع شده است، در زمان حال ($t_۰$) به ما رسیده است.

ب) رابطه‌ی فاصله‌ی فیزیکی ($d_p = a\chi$) این کهکشان از ما را بر حسب $t_۰$ و t_e به دست آورید.

ج) رابطه‌ی قرمزگرایی این کهکشان را بر حسب $t_۰$ و t_e به دست آورید.

د) سنّ کیهان در زمان t_e، چند برابر $t_۰$ بوده است؟

ه) ابتدا رابطه‌ی فاصله‌ی فیزیکی این کهکشان از ما را بر حسب z و $H_۰$ بنویسید. سپس مقدار عددی آن را بر حسب مگاپارسک به دست آورید.

و) رابطه‌ای برای سرعت دور شدن کهکشان از ما (v_p) بر حسب z و سرعت نور (c) به دست آورده و مقدار عددی آن را در زمان $t_۰$ بر حسب c محاسبه کنید.

فرض کنید کهکشان کروی شکل است و قطر آن در زمان t_e برابر با w است. هم‌چنین فرض کنید این ساختار به قدری بزرگ است که در انبساط کیهانی شرکت می‌کند.

ز) رابطه‌ی قطر زاویه‌ای کهکشان (θ) را از دید ناظر زمینی بر حسب w، z، $H_۰$ و c به دست آورید و آن را با اندازه‌ی زاویه‌ای یک دایره به قطر w در فضای اقلیدسی ایستا (بدون انبساط) که در فاصله‌ی فیزیکی امروزی کهکشان قرار دارد، مقایسه کنید.

راهنمایی: فاصله‌ی فیزیکی را در قسمت «ب» محاسبه کردید.

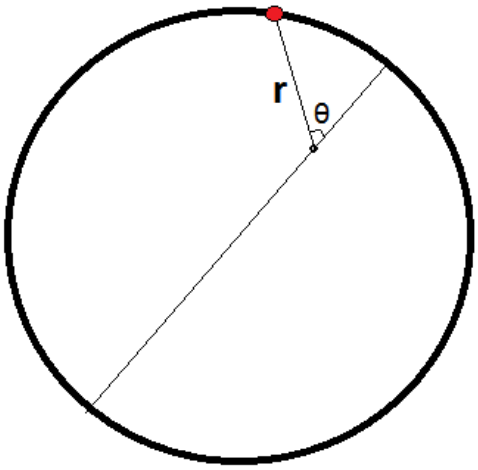
ح) نمودار θ بر حسب z را رسم کرده و تعیین کنید در کدام z مقدار θ برای یک کهکشان با قطر w کمینه است؟

فرض کنید در زمان t_e کهکشان با توان P به صورت متقارن و در همه‌ی جهات تابش می‌کند.

ط) رابطه‌ی شار دریافتی ($\frac{\text{انرژی}}{\text{سطح}\times\text{زمان}}$) کهکشان ($F$) را در زمان حال بر حسب P، z، $H_۰$ و c به دست آورید.

سؤال ۳ (۴۰ نمره)

دانشمندان در آزمایشگاه‌های پیشرفته موفّق به کشف میدان نیرویی شده‌اند که باعث شده جسمی به جرم $m = ۳\ \text{kg}$ در مسیری دایره‌ای به شعاع $R = ۴\ \text{m}$ با دوره‌ی تناوب $T = ۱\ \text{min}$ حرکت کند. با توجّه به شواهدی که از نحوه‌ی حرکت این جسم روی این مسیر دایره‌ای به دست آمده، دانشمندان حدس می‌زنند که این نیرو، نیرویی مرکزی است و مرکز این نیرو نقطه‌ای به فاصله‌ی ۲ متر از مرکز دایره است. در حلّ این مساله فرض می‌کنیم که حدس دانشمندان درست است.



شکل ۱

مبدأ مختصات قطبی را روی مرکز نیرو فرض کنید و راستای حضیض (نزدیک ترین فاصله‌ی جسم تا مرکز نیرو) را مبدأ زاویه در نظر بگیرید.

الف) رابطه‌ی فاصله‌ی جسم تا مبدأ (r) بر حسب زاویه (θ) را محاسبه کنید.

ب) اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای این جسم را در دستگاه مرکز نیرو بیابید.

ج) رابطه‌ای برای مدت زمانی (t) که طول می‌کشد این جسم از حضیض به زاویه‌ی θ برسد بر حسب θ بیابید.

د) رابطه‌ای برای اندازه‌ی سرعت جسم بر حسب فاصله‌ی جسم تا مرکز نیرو (r) بیابید و اندازه‌ی سرعت را هنگامی که جسم در فاصله‌ی ۵ متری از مرکز نیرو است محاسبه کنید.

راهنمایی: می توانید مؤلفه‌های شعاعی و مماسی سرعت را محاسبه کنید و با توجه به آن‌ها اندازه‌ی سرعت را بیابید.

ه) تابعیّت این نیرو بر حسب فاصله‌ی جسم تا مرکز نیرو را محاسبه کنید.

سؤال ۴ (۲۵ نمره)

در یک مدل ساده برای ستاره‌های تپنده، می‌توان طولانی‌ترین دوره‌ی تپش را به صورت یک موج طولی ایستاده در امتداد شعاع ستاره در نظر گرفت.

الف) انتظار ما چیست؟ مرکز ستاره باید گره باشد یا شکم؟

ب) طولانی‌ترین دوره‌ی تناوب نوسان‌های کوچک را بر حسب پارامترهای ستاره و سرعت انتشار صوت در داخل ستاره (v) به دست آورید.

ج) جدول زیر، مقدار ضریب فشردگی (B) را برای ستاره‌های مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۲ - ضریب فشردگی ستارگان مختلف

نوع ستاره	B (Pa)
ستاره‌ی خورشیدگون ($\odot$)	$۱۰^{۱۵}$
کوتوله‌ی سفید (wd)	$۱۰^{۲۲}$
ستاره‌ی نوترونی (ns)	$۱۰^{۳۳}$

دوره‌ی نوسان (T) هر کدام از ستاره‌ها را محاسبه کنید.

*** تمام فرض‌های خود را در پاسخ‌نامه و در کادر مربوط به فرض‌ها بنویسید.**

سؤال ۵ (۵۰ نمره)

برج میلاد (با ارتفاع ۴۳۵ متر) در موقعیّت جغرافیایی $35^\circ\ 45'\ \mathrm{N},\ 51^\circ\ 22'\ \mathrm{E}$ قرار گرفته است. تصویر پیوست شده، یک عکس ماهواره‌ای از برج میلاد است. در این تصویر راستای شمال و مقیاس زاویه‌ای مشخّص شده‌اند. فاصله‌ی ماهواره تا برج میلاد در لحظه‌ی عکّاسی ۳۶۱٫۱ کیلومتر است. سطح زیر برج را بدون ناهمواری فرض کنید.

در لحظه‌ی عکّاسی:

الف) فاصله‌ی ماهواره از مرکز زمین چند کیلومتر است؟

ب) سمت و ارتفاع خورشید چند درجه است؟

سؤال ۶ (۴۰ نمره)

سیّاره‌ای فراخورشیدی به دور ستاره‌ای در حال گردش است. این سیّاره دارای حلقه‌ای با جرم یک‌نواخت و ضخامت ناچیز است که **همواره در صفحه‌ی استوای سیّاره قرار دارد**. جهت چرخش حلقه‌ها و حرکت وضعی سیّاره یکسان است. اطّلاعات این منظومه‌ی تک‌سیّاره‌ای در جدول زیر قابل مشاهده است.

جدول ۳

کمیت		مقدار
r	فاصله‌ی سیّاره تا ستاره	۲×۱۰^{۱۱} m
M	جرم ستاره	۵×۱۰^{۳۰} kg
m_p	جرم سیّاره	۸×۱۰^{۲۵} kg
m	جرم حلقه	۲×۱۰^{۲۴} kg
R	شعاع سیّاره	۴×۱۰^{۷} m
$R_۱$	شعاع داخلی حلقه	۸×۱۰^{۷} m
$R_۲$	شعاع خارجی حلقه	۱۲×۱۰^{۷} m
T	دوره‌ی تناوب وضعی سیّاره	۸×۱۰^{۷} s
i	زاویه‌ی میل استوای سیّاره نسبت به صفحه‌ی مدار آن	۴۰°
e_p	پخی سیّاره	۰

الف) اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای ناشی از حرکت وضعی سیّاره و حرکت حلقه‌ها را محاسبه کنید.

در قسمت بعد می‌توانید فاصله‌ی حلقه تا سیّاره را در مقابل فاصله‌ی ستاره تا سیّاره کوچک در نظر بگیرید و تا اوّلین مرتبه‌ی غیر صفر تقریب بزنید.

ب) اثبات کنید که اندازه‌ی **بیشینه**‌ی گشتاور وارد شده به سیستم سیاره-حلقه از جانب ستاره طی یک دوره‌ی تناوب انتقالی از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$|\vec{\tau}_{max}| = \frac{۳}{۸}\frac{GMm}{r^{۳}}(R_{۲}^{۲} + R_{۱}^{۲})\sin(۲i)$$

راهنمایی: برای هر عدد حقیقی n و $۱ \gg \varepsilon$ داریم: $(۱+\varepsilon)^n = ۱ + n\varepsilon$

جهت این گشتاور را با رسم شکل مناسب نشان دهید.

ج) با فرض این که گشتاور میانگین وارد شده به حلقه‌ها طی یک دوره‌ی تناوب انتقالی نصف مقدار بیشینه است، دوره‌ی تناوب حرکت تقدیمی سیّاره را بیابید.

د) پس از گذشت زمان ۷۰۰ سال زمینی از دید ناظرهای روی این سیّاره، قطب شمال سماوی نسبت به موقعیّت اوّلیّه‌ی خود چند درجه در آسمان جابه‌جا شده است؟

سؤال ۷ (۳۰ نمره)

از میان ذرّات موجود در کیهان، نوترینوها (ν)، الکترون‌ها (e^-) و میون‌ها (μ^-) به همراه پادذرّه‌هایشان ($\bar{\nu}$، e^+ و μ^+) از نوع ذرّات فرمیون هستند و فوتون‌ها (γ) از نوع بوزون هستند. هم‌چنین می‌دانیم در طبیعت ۳ نوع نوترینو وجود دارد که هر کدام پادذرّه‌ی مربوط به خودش را دارد.

چگالی انرژی گاز نسبیتی فرمیونی (زیروند f) و گاز نسبیتی بوزونی (زیروند b) از روابط زیر به دست می‌آید

$$\rho_f c^2 = \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}\, g\, \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} \quad , \quad \rho_b c^2 = \frac{\pi^2}{30}\, g\, \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$$

g درجه‌ی آزادی است. جدول زیر، مقدار آن را برای ذرّات مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۴ - مقدار درجه‌ی آزادی برای ذرّات مختلف

ذرّه	g
الکترون (e^-)	۲
میون (μ^-)	۲
نوترینو (ν)	۱
فوتون (γ)	۲

برای پادذرّه‌ها نیز g همین مقادیر را دارد.

دمای امروزی نوترینوها و تابش زمینه‌ی کیهانی با رابطه‌ی زیر به هم مربوط هستند

$$T_{\nu,0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_{\gamma,0}$$

الف) اگر چگالی تابش (ρ_r) را برابر با مجموع سهم فوتون‌ها و نوترینوها در نظر بگیریم، مقدار چگالی تابش در زمان حال ($\rho_{r,0}$) چه قدر است؟

ب) کلّ انرژی تابش زمینه‌ی موجود در کیهان (E_{rad}) را محاسبه کنید. تخمین بزنید کلّ ستاره‌های موجود در کیهانِ امروزی چه مدّت باید تابش کنند تا میزان کلّ انرژی تابش شده برابر با E_{rad} شود؟

فرض کنید در دمای $T_1 = ۱۵۰\ \mathrm{MeV}$ ضریب مقیاس برابر با a_1 بوده و کیهان از $\mu^\pm$، $e^\pm$، ν، $\bar{\nu}$ و γ تشکیل شده باشد. در دمای $T_2 = ۱۰\ \mathrm{MeV}$ که ضریب مقیاس a_2 بوده است، $\mu^\pm$ها نابود شده‌اند.

ج) با فرض پایسته بودن آنتروپی در حین انبساط عالم، مقدار a_2/a_1 چه قدر است؟

راهنمایی: چگالی آنتروپی برای بوزون‌ها و فرمیون‌ها عبارت اند از

$$s_f \propto \frac{۷}{۸}\frac{۴\pi^۲}{۳۰} gT^۳ \quad , \quad s_b \propto \frac{۴\pi^۲}{۳۰} gT^۳$$

سؤال ۸ (۳۰ نمره)

در این مسئله می‌خواهیم روند رشد اختلالات چگالی مادّه (ρ_m) با زمان را برای عالم‌های مختلف بررسی کنیم. معادله‌ای که رشد ناهمگنی را با زمان تعیین می‌کند، عبارت است از

$$\ddot{\delta} + ۲H\dot{\delta} = ۴\pi G\rho_m\delta$$

که $\delta = \Delta\rho/\bar{\rho}$ تباین چگالی است. $\bar{\rho}$ چگالی متوسّط و $\Delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ است.

الف) تابعیّت $\delta(t)$ را برای کیهان تخت در سه حالت زیر به دست آورید.

i) تابش-غالب ii) مادّه-غالب iii) Λ-غالب (دوسیته)

راهنمایی: جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل را به صورت $\delta(t) \propto t^n$ در نظر بگیرید. در صورتی که برای یک معادله دو مقدار n_1 و n_2 به دست آمد، جواب نهایی ترکیب خطّی این دو جواب است؛ یعنی

$$\delta(t) = A\, t^{n_1} + B\, t^{n_2}$$

ب) در کدام یک از حالت‌های بالا رشد ساختارها سریع‌تر است؟

شکل سؤال ۵: عکس ماهواره‌ای از برج میلاد