فصل هشتم: فرمولاسیون اجزاء محدود برای مسائل اسکالر چند بعدی

مقدمه

در این فصل با نحوه استخراج دستگاه معادلات جبری اجزاء محدود برای میدان‌های چند بعدی اسکالر از فرم ضعیف آشنا می‌شویم.

به این منظور مسأله هدایت گرمای دو بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که فرم ضعیف آن در فصل ششم بدست آمد.

از میان تمام توابع مجاز که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند $T(x,y)$ را طوری بیابید که داشته باشیم:

(۸-۱)

××

مسأله رسانایی گرمایی

که در آن داریم:

$$\vec{\nabla} T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix} \qquad (۸-۲)$$

در معادله (۸-۱) از رابطه زیر نیز استفاده شده است:

(۸-۳)

در گام اول ناحیه مسأله به المان‌های مثلثی، مستطیلی یا ترکیبی از آن دو تقسیم می‌شود.

تعداد کل المان‌ها را با n_{el} و ناحیه هر المان را با Ω^e نمایش می‌دهیم.

××

در گام بعد، انتگرال فرم ضعیف یعنی معادله (۸-۱) با جمع انتگرال‌ها روی کل المان‌ها جایگزین می‌شود:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left(\int_{\Omega^e} \left(\vec{\nabla} w\right)^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{D}} \vec{\nabla} T d\Omega + \int_{\Gamma_q^e} w^{\mathrm{T}} \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega^e} w^{\mathrm{T}} s d\Omega \right) = 0 \qquad (۸-۴)$$

تقریب اجزاء محدود برای حل آزمون روی هر المان عبارت است از:

(۵-۸)

××

تقریب اجزاء محدود برای تابع وزن روی هر المان عبارت است از:

(۶-۸)

در این معادلات n_{en} تعداد گره‌های المان و $\tilde{\mathbf{N}}(x,y)$ ماتریس تابع شکل المان است.

$\tilde{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}T_1 & T_2 & \cdots & T_{nen}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ماتریس مقادیر گرهی دما برای المان است.

$\tilde{\mathbf{w}}=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & \cdots & w_{nen}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ماتریس مقادیر گرهی تابع وزن برای المان است.

××

میدان گرادیان دما برابر است با:

$$\vec{\nabla}T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x}T_1+\dfrac{\partial N_2}{\partial x}T_2+\cdots+\dfrac{\partial N_{nen}}{\partial x}T_{nen}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y}T_1+\dfrac{\partial N_2}{\partial y}T_2+\cdots+\dfrac{\partial N_{nen}}{\partial y}T_{nen}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_{nen}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial N_{nen}}{\partial y}\end{bmatrix}\tilde{\mathbf{T}} \qquad (۷-۸)$$

یا به فرم فشرده:

(۸-۸)

××

که در آن:

(۹-۸)

همچنین داریم:

$$\left(\vec{\nabla}w\right)^{\mathrm{T}}=\left(\vec{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{w}}\right)^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۰-۸)$$

با جاگذاری از معادلات (۱۰-۸) و (۸-۸) در معادله (۴-۸) برای هر المان خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega^e}\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{D}}\vec{\mathbf{B}}d\Omega\,\tilde{\mathbf{T}}+\int_{\Gamma_q^e}\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\bar{q}d\Gamma-\int_{\Omega^e}\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}sd\Omega=0 \qquad (۱۱-۸)$$

با توجه به این رابطه ماتریس رسانایی المان برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}}^e = \int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{D}}\vec{\mathbf{B}}d\Omega \qquad (۱۲\text{-}۸)$$

××

ماتریس‌های شار گرمایی هم عبارتند از:

(۱۳-۸)

بعد از بدست آمدن ماتریس هر المان، ماتریس کل سیستم با اسمبل کردن ماتریس المانی متناظر حاصل می‌آید.

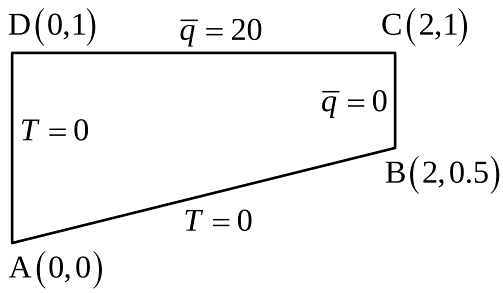
در نهایت نیز شرایط مرزی اعمال شده و حل دستگاه معادلات انجام می‌گیرد.

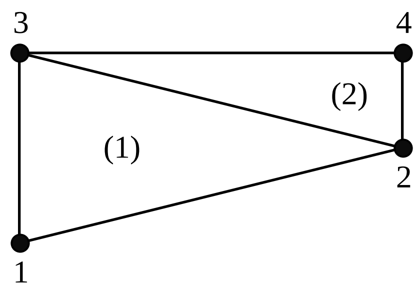
××

مثال (۸-۱)

در صفحه شکل زیر ماتریس رسانایی برابر $\vec{\mathbf{D}}$ و $k = 5\,\mathrm{WC}^{-1}$ است. منبع گرمایی ثابت $s = 6\,\mathrm{Wm}^{-2}$ روی صفحه اعمال می‌شود. مسأله را برای شرایط مرزی نشان داده شده با کمک شبکه اجزاء محدود زیر که از دو المان مثلثی تشکیل شده است حل کنید.

$$\vec{\mathbf{D}} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



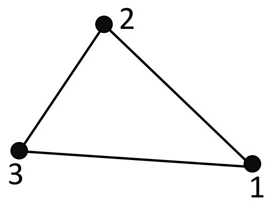


××

حل: از آنجا که شرط مرزی ضروری باید ضرورتاً ارضا شود گره‌هایی که در تقاطع مرزهای ضروری و طبیعی قرار دارند گره‌های مرز ضروری هستند.

بنابراین هنگام شماره‌دهی گره‌ها، این گره‌ها باید جزو گره‌هایی باشند که ابتدا شماره‌گذاری می‌شوند.

همانطور که در فصل هفتم دیدیم ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ برای المان مثلثی سه گرهی برابر است با:

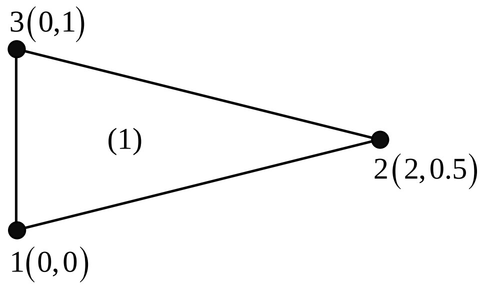


××

چون $\vec{\mathbf{B}}$ و k ثابتند می‌توان نوشت:

$$\vec{\mathbf{K}}^{e}=\int_{\Omega^e}\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{D}}\vec{\mathbf{B}}d\Omega=\int_{\Omega^e}\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}k\vec{\mathbf{I}}\,\vec{\mathbf{B}}d\Omega=\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{B}}\,k\int_{\Omega^e}d\Omega=kA\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{B}}$$

شماره موضعی گره‌های المان ۱ و مختصات آنها در شکل زیر آمده است.

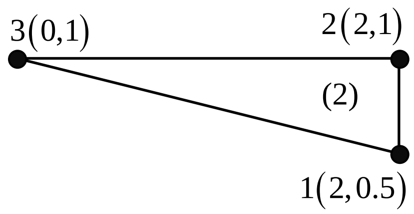


مساحت المان $A=1$ بوده و ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ مساوی است با:

××

ماتریس رسانایی المان ۱ به همراه شماره کلی گره‌های آن عبارت است:

شماره موضعی گره‌های المان ۲ و مختصات آنها در شکل زیر آمده است.



××

مساحت المان $A=0.5$ بوده و ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ مساوی است با:

ماتریس رسانایی المان ۲ به همراه شماره کلی گره‌های آن عبارت است:

$$\vec{\mathbf{K}}^{(2)}=kA\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{B}}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}10 & -10 & 0\\ -10 & 10.625 & -0.625\\ 0 & -0.625 & 0.625\end{bmatrix}\begin{array}{c}2\\4\\3\end{array}\\ \begin{array}{ccc}2 & \quad 4 & \quad 3\end{array}\end{array}$$

ماتریس رسانایی کلی با اسمبل مستقیم ماتریس رسانایی دو المان بدست می‌آید.

××

$$\vec{\mathbf{K}}=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 11.25 & -0.625 & -10 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.9375 & -0.625 \\ 0 & -10 & -0.625 & 10.625 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{array} \end{array}$$

حال ماتریس منبع المان را محاسبه می‌کنیم (s ثابت است و از انتگرال بیرون می‌آید):

برای المان مثلثی سه گرهی $N_i=L_i$ است.

××

بنابراین:

$$\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e=s\int_{\Omega^e}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}d\Omega=s\begin{bmatrix} \dfrac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!}2A \\ \dfrac{0!1!0!}{(0+1+0+2)!}2A \\ \dfrac{0!0!1!}{(0+0+1+2)!}2A \end{bmatrix}=\frac{sA}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه برای المان‌های ۱ و ۲ بدست می‌آید:

××

ماتریس منبع کلی المان با اسمبل مستقیم ماتریس‌های المانی متناظر حاصل می‌شود:

اکنون نوبت به محاسبه ماتریس شار مرزی المان‌ها می‌رسد:

$$\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e=-\int_{\Gamma_q^e}\vec{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\bar{q}\,d\Gamma$$

چون هیچیک از اضلاع المان ۱ روی مرز طبیعی (مرز شار گرمایی) قرار ندارند بنابراین ماتریس شار مرزی برای این المان صفر است.

××

در المان ۲ اضلاع BC و CD روی مرز طبیعی قرار دارند.

به این منظور نیاز است تابع شکل المان ۲ را روی این ضلع که در آن $y=1$ است تعیین کنیم:

$$\tilde{\mathbf{N}}^{(2)} = \frac{1}{2A^{(2)}}\begin{bmatrix} x_2^{(2)}y_3^{(2)} - x_3^{(2)}y_2^{(2)} + \left(y_2^{(2)} - y_3^{(2)}\right)x + \left(x_3^{(2)} - x_2^{(2)}\right)y \\ x_3^{(2)}y_1^{(2)} - x_1^{(2)}y_3^{(2)} + \left(y_3^{(2)} - y_1^{(2)}\right)x + \left(x_1^{(2)} - x_3^{(2)}\right)y \\ x_1^{(2)}y_2^{(2)} - x_2^{(2)}y_1^{(2)} + \left(y_1^{(2)} - y_2^{(2)}\right)x + \left(x_2^{(2)} - x_1^{(2)}\right)y \end{bmatrix}$$

××

با جاگذاری مختصات گره‌ها و $y=1$ در این رابطه بدست می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{N}}^{(2)}\Big|_{y=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5x \\ -0.5x+1 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی $d\Gamma = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ می‌باشد اما با توجه به دو بعدی بودن مسأله حاضر و ثابت بودن y در این مرز، $d\Gamma = dx$ خواهد بود.

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Gamma}^{(2)} = -20\int_{x=0}^{x=2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5x \\ -0.5x+1 \end{bmatrix}dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$

××

می‌توان دید که انرژی گرمایی کل یعنی (2×20-) بطور مساوی بین دو گره المان تقسیم شده است.

با استفاده از اسمبل مستقیم خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس شار گرمایی کل برابر است با:

××

حال نوبت به تشکیل دستگاه معادلات کلی، اعمال شرایط مرزی و حل می‌رسد.

$$\begin{bmatrix} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 11.25 & -0.625 & -10 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.9375 & -0.625 \\ 0 & -10 & -0.625 & 10.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+r_1 \\ 3+r_2 \\ -17+r_3 \\ -19 \end{bmatrix}$$

با حل معادله چهارم این دستگاه خواهیم داشت:

××

تمرین سری ششم

مثال قبلی را با برنامه‌نویسی به زبان متلب با ۲۰ المان چهارضلعی حل کرده و مقادیر گرهی دما را بدست آورید.

برنامه باید کاملاً انعطاف‌پذیر باشد بطوریکه در صورت افزایش المان‌ها به چندصد یا چندهزار المان با تغییری کوچک بتواند مسأله را حل کند.

مقادیر گرهی دما و کانتور توزیع دما به عنوان خروجی داده شود.

نامگذاری متغیرها و توضیحات داده شده در برنامه باید آن را کاملاً قابل درک کند.