بسم الله الرحمن الرحیم

استاتیک

سید روح الله کاظمی

منابع :

۱. استاتیک
مریام، کرایگ، ترجمه: علیرضا انتظاری، ناشر: آییژ

۲. استاتیک
بی یر، ای. راسل. جانستون ترجمه: علیرضا انتظاری، شاهرضایی، ناشر: نوپردازان

۳. تشریح کامل مسایل، استاتیک مریام
علیرضا انتظاری، بهزاد برزین ناشر: ناشر: نوپردازان

۴. راهنما و تشریح کامل مسایل استاتیک (جانستون)
سید امیر مسعود رحمانی و د امیر منصوررحمانی ، ناشر: آترا

سرفصلها :

۱. مبانی استاتیک

۲. نیروها

۳. تعادل

۴. سازه ها

۵. نیروهای گسترده و خواص سطوح

۶. اصطکاک

۷. کار مجازی

فصل اول: مقدمه

- ❑ مفاهیم بنیادی
- ❑ کمیتهای اسکالر و برداری
- ❑ قوانین نیوتن
- ❑ واحدهای اندازه گیری
- ❑ قانون جاذبه
- ❑ دقت، حدود و تقریبها
- ❑ شرح مسایل استاتیک

❑ مفاهیم بنیادی

- **فضا، زمان، جرم**
- **نیرو:** عمل یا کنش یک جسم روی جسم دیگر.
- **ذره:** جسمی با ابعاد ناچیز

وقتی ابعاد جسمی برای بیان موقعیت آن یا اثر نیروهای وارد بر آن بی اهمیت باشد، میتوان جسم را به صورت ذره در نظر گرفت.

- **جسم صلب:**

جسمی که حرکات نسبی اجزای آن در مساله مورد بررسی قابل صرف نظر باشد.

در استاتیک با محاسبه نیروهای وارد بر اجسام صلب که در حال تعادل هستند، سر و کار داریم.

❑ کمیتهای اسکالر و برداری

- بردار آزاد
- بردار لغزان
- بردار ثابت

❑ قوانین نیوتن

- قانون اول
- قانون دوم
- قانون سوم

❑ واحدهای اندازه گیری

- طول
- جرم
- نیرو
- زمان

❑ قانون جاذبه

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

فصل دوم: نیروها

الف) بررسی نیروها در دو بعد

❑ نیرو

❑ جمع نیروها

❑ مولفه ها

❑ گشتاور

❑ کوپل

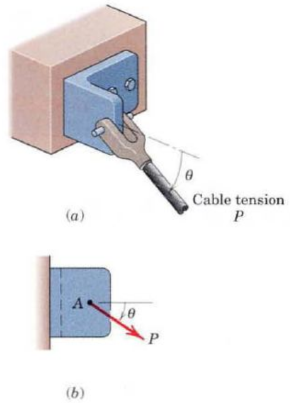
❑ برآیند

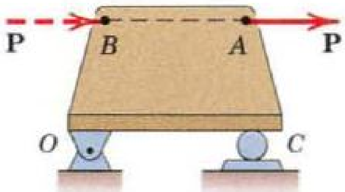
❑ تقسم بندیهای نیرو

✓خارجی
✓داخلی

- تماسی یا سطحی
- جسمی یا حجمی

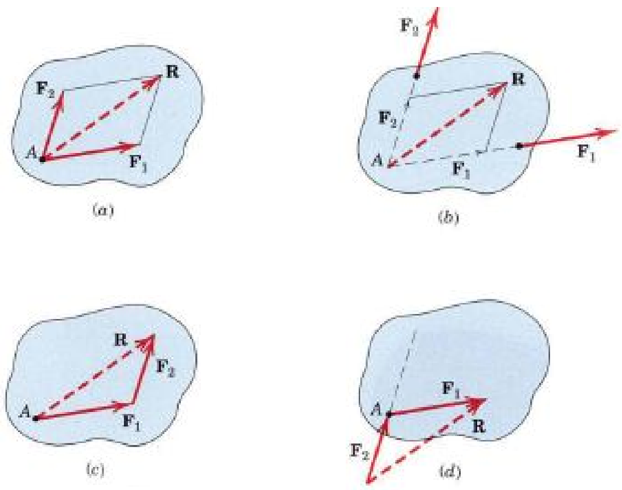
❖متمرکز
❖گسترده



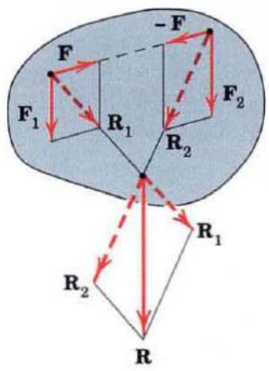


اصل انتقال پذیری: نیرو میتواند در هرنقطه از خط اثرش وارد شود، بدون آنکه اثرات خارجی روی جسم صلب تغییر کند.

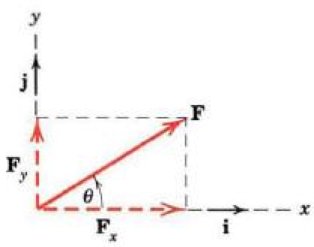
❑ جمع نیروها



❑ جمع نیروها

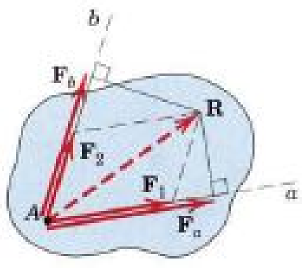


❑ مولفه ها



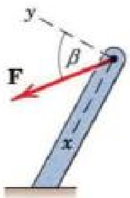
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

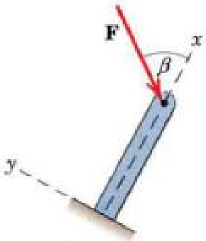


$$F_x = F\cos\theta \qquad F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

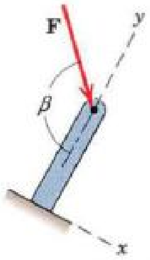
$$F_y = F\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$



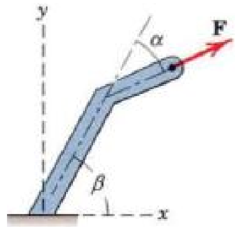
$F_x = F \sin\beta$
$F_y = F \cos\beta$



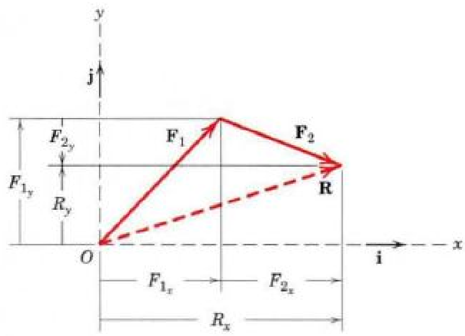
$F_x = -F \cos\beta$
$F_y = -F \sin\beta$



$F_x = F \sin(\pi - \beta)$
$F_y = -F \cos(\pi - \beta)$



$F_x = F \cos(\beta - \alpha)$
$F_y = F \sin(\beta - \alpha)$

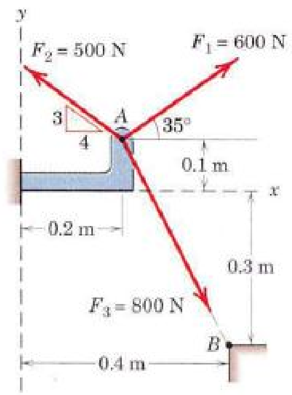


$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1_x}\mathbf{i} + F_{1_y}\mathbf{j}) + (F_{2_x}\mathbf{i} + F_{2_y}\mathbf{j})$$

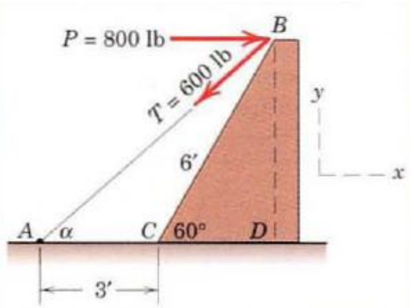
$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1_x} + F_{2_x})\mathbf{i} + (F_{1_y} + F_{2_y})\mathbf{j}$$

$$R_x = F_{1_x} + F_{2_x} = \Sigma F_x$$
$$R_y = F_{1_y} + F_{2_y} = \Sigma F_y$$

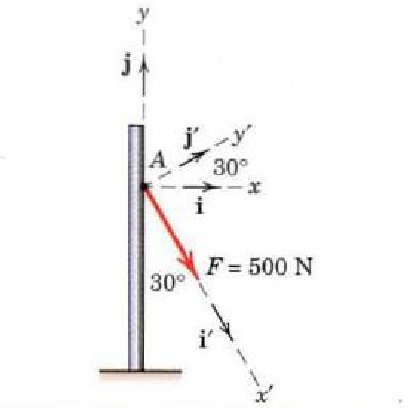
مثال:


y
$F_2 = 500$ N
$F_1 = 600$ N
3
4
A
35°
0.1 m
x
0.2 m
0.3 m
$F_3 = 800$ N
B
0.4 m

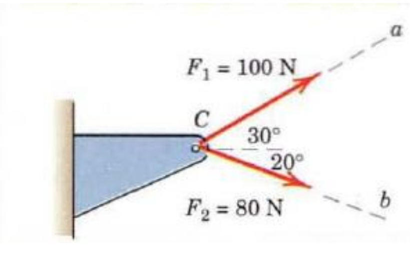
مثال:


P = 800 lb
B
T = 600 lb
y
x
6′
A
α
C
60°
D
3′

مثال:



مثال:

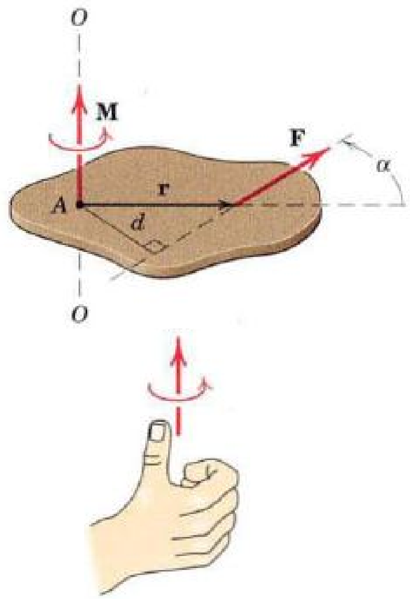


❑ گشتاور

$$M = Fd$$

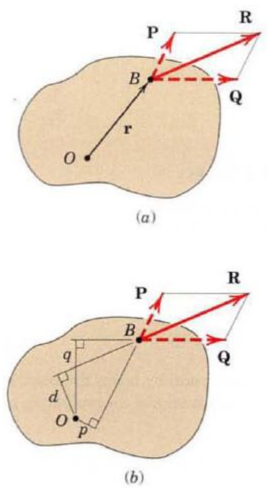
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$M = Fr \sin \alpha = Fd$$



قضیه وارینیون:

گشتاور هر نیرو حول هر نقطه برابر است با حاصل جمع گشتاورهای مولفه های آن نیرو حول همان نقطه.



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

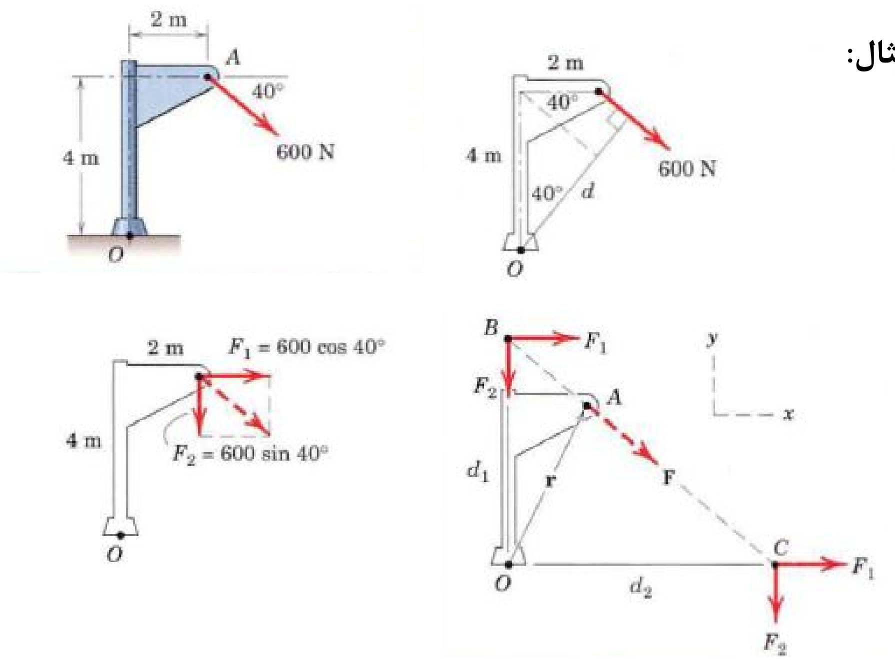
$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

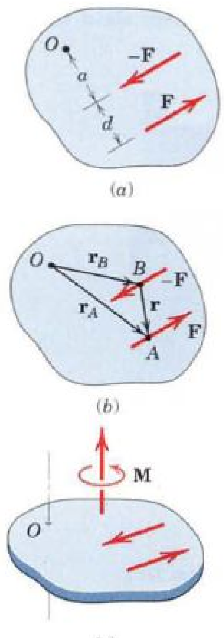
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q}$$

$$M_O = Rd = -pP + qQ$$

مثال:



❑ کوپل



(a) (b) (c)

$$M = F(a + d) - Fa$$

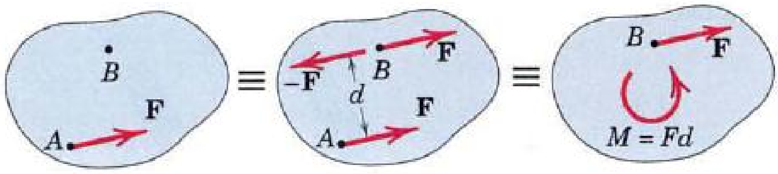
$$M = Fd$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

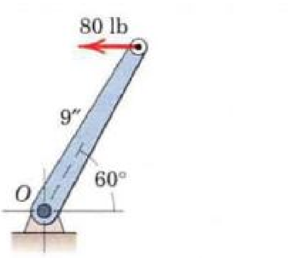
$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$$

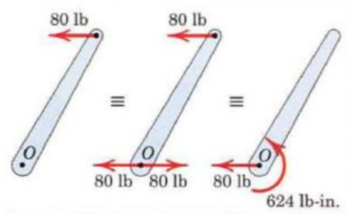
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

انتقال نقطه اثر نیرو به کمک کوپل:



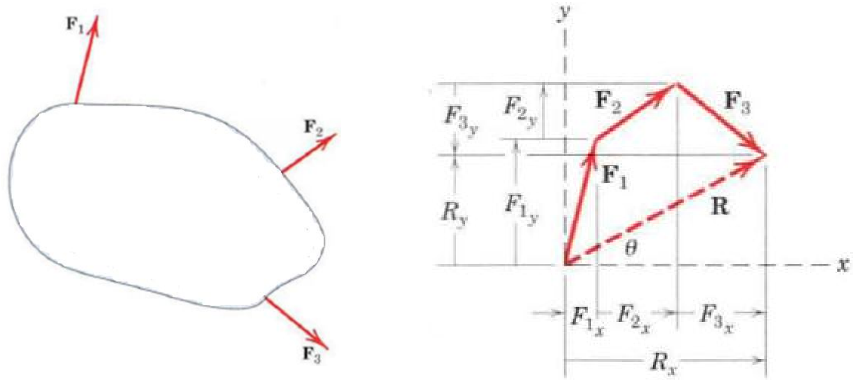
مثال:





$[M = Fd] \qquad M = 80(9 \sin 60°) = 624 \text{ lb-in.}$

❑ برآیند

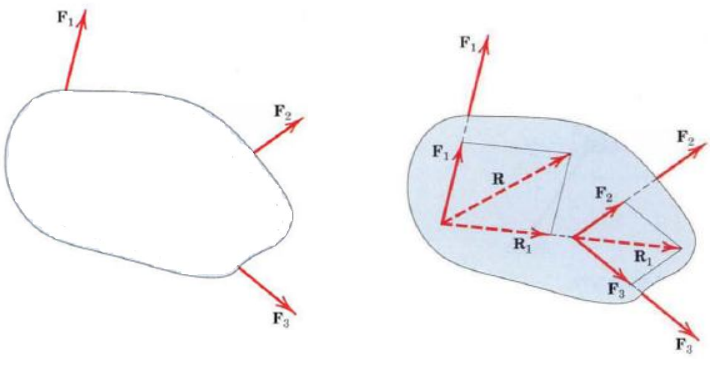


$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$

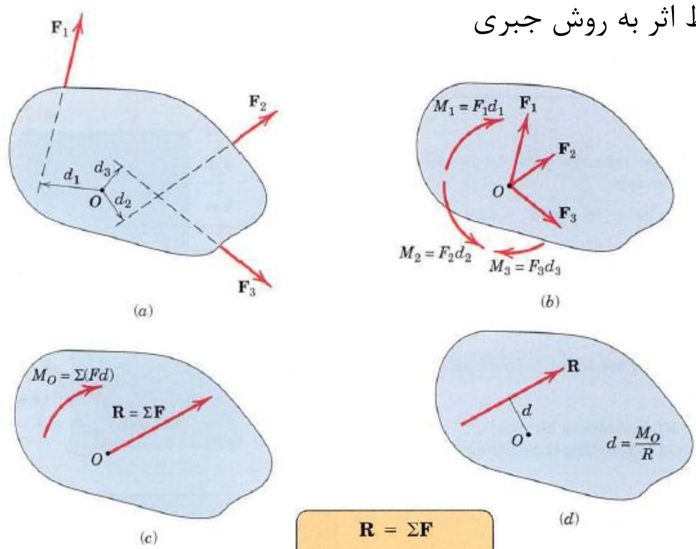
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

۱. تعیین خط اثر روش ترسیمی

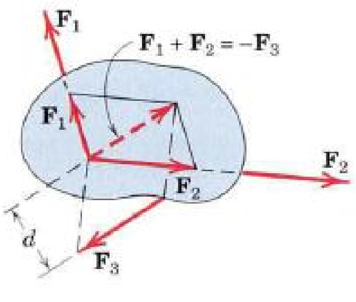


۲. تعیین خط اثر به روش جبری

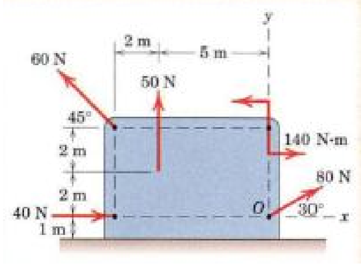


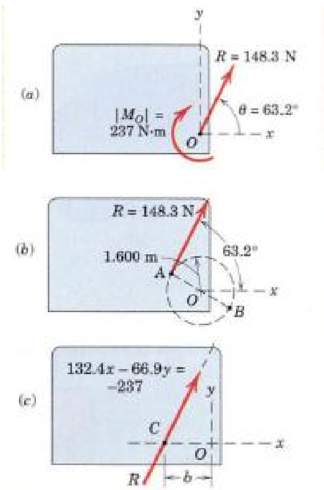
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$
$$M_O = \Sigma M = \Sigma(Fd)$$
$$Rd = M_O$$

ممکن است برآیند برابر فقط یک کوپل بشود.



مثال: برآیند نیروها وکوپل وارد بر جسم مقابل را تعیین کنید.





فصل دوم: نیروها

ب) بررسی نیروها در سه بعد

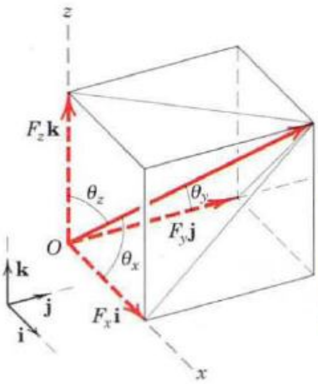
❑مولفه ها

❑گشتاور

❑کوپل

❑برآیند

مولفه های قائم



$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$F_y = F\cos\theta_y \qquad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$
$$F_z = F\cos\theta_z \qquad \mathbf{F} = F(\mathbf{i}\cos\theta_x + \mathbf{j}\cos\theta_y + \mathbf{k}\cos\theta_z)$$

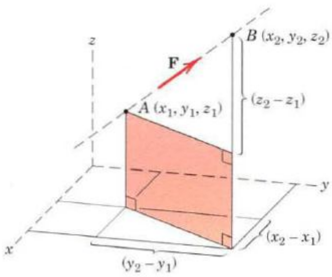
$$l = \cos\theta_x,\ m = \cos\theta_y,\ n = \cos\theta_z,$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$\boxed{\mathbf{F} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})}$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F$$

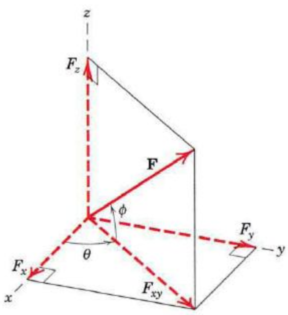
$$\mathbf{n}_F = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k},$$

نحوه تعیین بردار نیرو



الف) با دو نقطه از خط اثر نیرو:

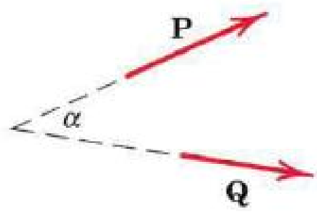
$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$



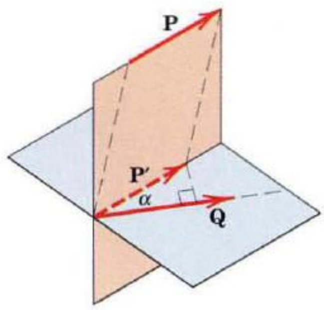
ب) با دو زاویه از امتداد خط اثر نیرو:

$$F_{xy} = F\cos\phi \qquad F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi\cos\theta$$
$$F_z = F\sin\phi \qquad F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\phi\sin\theta$$

ضرب داخلی

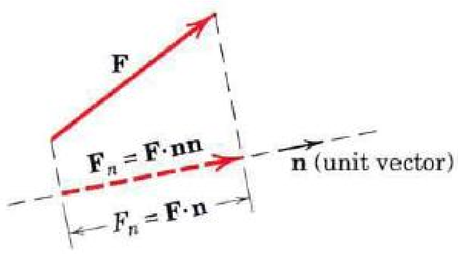


$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ \cos \alpha$$



$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}}{PQ}$$

تصویر یک بردار در یک جهت خاص:



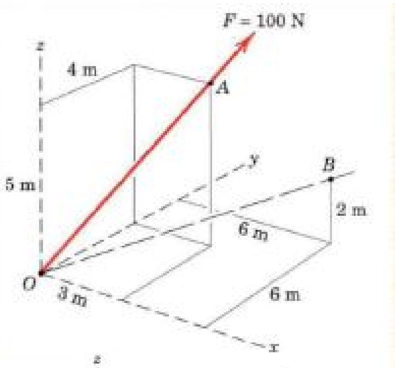
$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$$

$$F_n = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\cdot(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})$$
$$= F(l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

$$\mathbf{F}_n = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$$

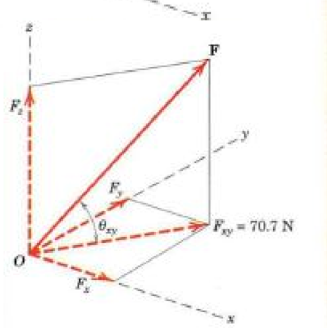
$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}}{F}$$

مثال:



$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{OA} = F\frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}} = 100\left[\frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}\right]$$

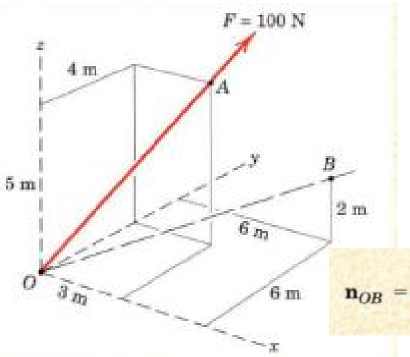
$$= 100[0.424\mathbf{i} + 0.566\mathbf{j} + 0.707\mathbf{k}]$$
$$= 42.4\mathbf{i} + 56.6\mathbf{j} + 70.7\mathbf{k}\ \text{N}$$



$$\cos\theta_{xy} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = 0.707$$

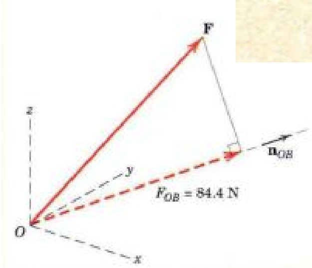
$$F_{xy} = F\cos\theta_{xy} = 100(0.707) = 70.7\ \text{N}$$

مثال:



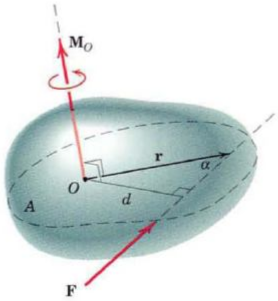
$$\mathbf{n}_{OB} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overline{OB}} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2}} = 0.688\mathbf{i} + 0.688\mathbf{j} + 0.229\mathbf{k}$$

$$F_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB} = (42.4\mathbf{i} + 56.6\mathbf{j} + 70.7\mathbf{k})\cdot(0.688\mathbf{i} + 0.688\mathbf{j} + 0.229\mathbf{k})$$
$$= (42.4)(0.688) + (56.6)(0.688) + (70.7)(0.229)$$
$$= 84.4\ \text{N}$$

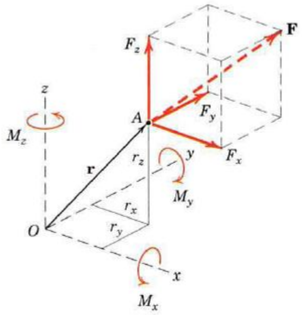


$$\mathbf{F}_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB}\mathbf{n}_{OB}$$
$$= 84.4(0.688\mathbf{i} + 0.688\mathbf{j} + 0.229\mathbf{k})$$
$$= 58.1\mathbf{i} + 58.1\mathbf{j} + 19.35\mathbf{k}\ \text{N}$$

گشتاور



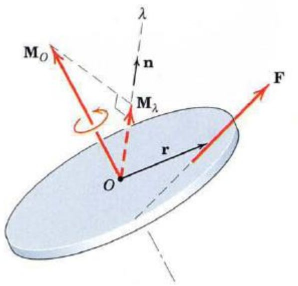
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

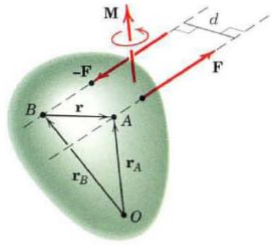
تصویر گشتاور یک نیرو روی یک محور دلخواه:



$$\mathbf{M}_\lambda = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

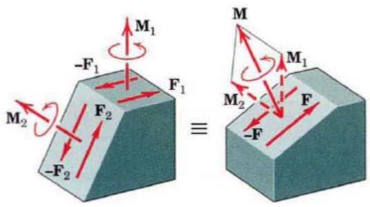
$$|\mathbf{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

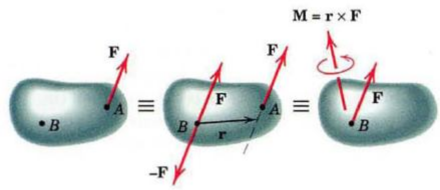
کوپل



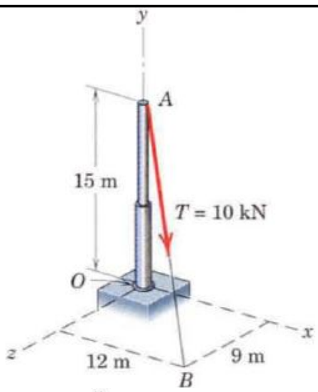
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

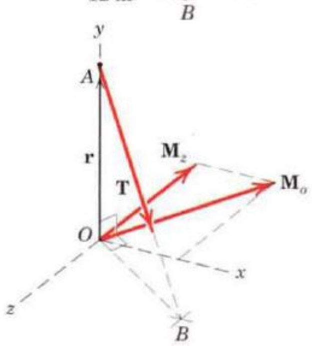




مثال: گشتاور $\mathbf{T}$ حول محور z را تعیین کنید.

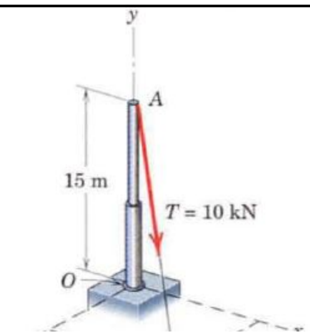


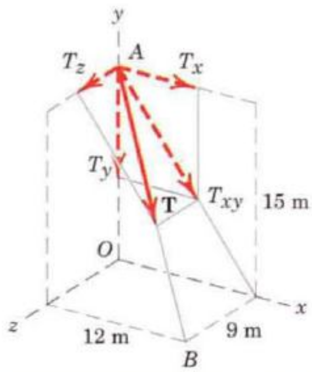
$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = 10\left[\frac{12\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (9)^2}}\right]$$
$$= 10(0.566\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j} + 0.424\mathbf{k})\ \text{kN}$$



$$\mathbf{M}_O = 15\mathbf{j} \times 10(0.566\mathbf{i} - 0.707\mathbf{j} + 0.424\mathbf{k})$$
$$= 150(-0.566\mathbf{k} + 0.424\mathbf{i})\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = 150(-0.566\mathbf{k} + 0.424\mathbf{i})\cdot\mathbf{k} = -84.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$





روش دوم:

$$\sqrt{15^2 + 12^2}/\sqrt{15^2 + 12^2 + 9^2} = 0.906$$

$$T_{xy} = 10(0.906) = 9.06 \text{ kN}$$

$$d = 15 \frac{12}{\sqrt{12^2 + 15^2}} = 9.37 \text{ m}$$

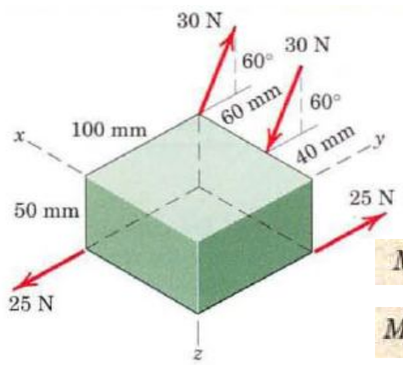
$$M_z = 9.06(9.37) = 84.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

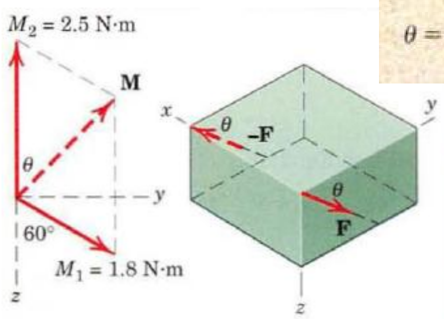
روش سوم:

$$12/\sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} = 0.566$$

$$T_x = 10(0.566)$$

$$M_z = 5.66(15) = 84.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$





مثال:

$$M_y = 1.80 \sin 60° = 1.559 \text{ N} \cdot \text{m}$$

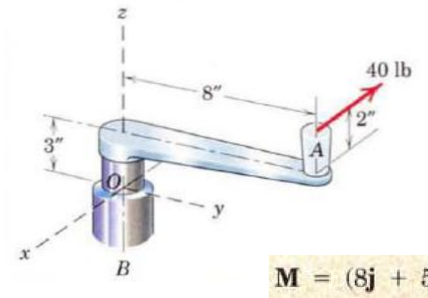
$$M_z = -2.50 + 1.80 \cos 60° = -1.600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M = \sqrt{(1.559)^2 + (-1.600)^2} = 2.23 \text{ N} \cdot \text{m}$$

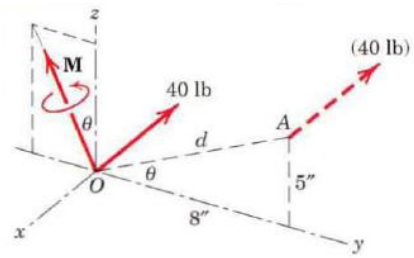
$$\theta = \tan^{-1} \frac{1.559}{1.600} = \tan^{-1} 0.974 = 44.3°$$

$$F = \frac{2.23}{0.10} = 22.3 \text{ N}$$

مثال:



$$\mathbf{M} = (8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (-40\mathbf{i}) = -200\mathbf{j} + 320\mathbf{k} \text{ lb-in.}$$



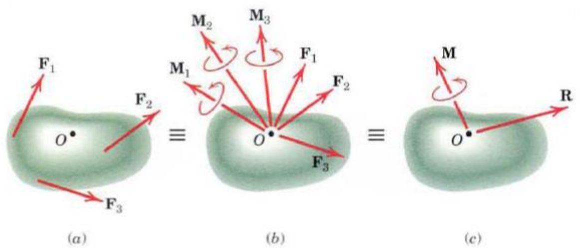
$$M = Fd = 40(9.43) = 377 \text{ lb-in.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{8} = 32.0°$$

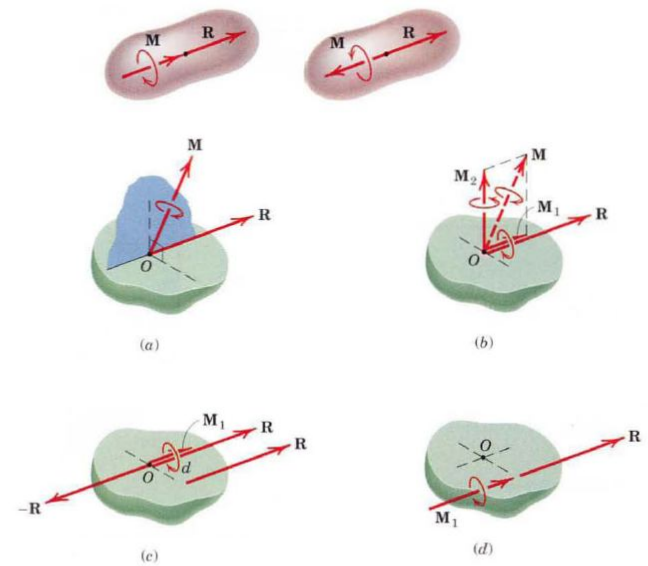
تعیین برآیند نیروها:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \cdots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

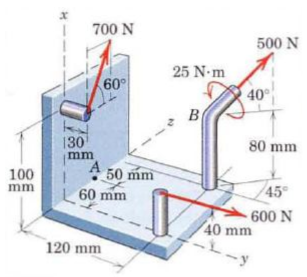
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$
$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$
$$\mathbf{M}_x = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x \qquad \mathbf{M}_y = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_y \qquad \mathbf{M}_z = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$



تعیین برآیند نیروها: رنچ



مثال: برآیند نیروها و گشتاورهای وارد در شکل مقابل را به شکل یک نیرو و یک گشتاور در نقطه A تعیین کنید.



$[R_x = \Sigma F_x] \qquad R_x = 500 \sin 40° + 700 \sin 60° = 928 \text{ N}$

$[R_y = \Sigma F_y] \qquad R_y = 600 + 500 \cos 40° \cos 45° = 871 \text{ N}$

$[R_z = \Sigma F_z] \qquad R_z = 700 \cos 60° + 500 \cos 40° \sin 45° = 621 \text{ N}$

Thus, $\quad \mathbf{R} = 928\mathbf{i} + 871\mathbf{j} + 621\mathbf{k} \text{ N}$

and $\quad R = \sqrt{(928)^2 + (871)^2 + (621)^2} = 1416 \text{ N}$

$$[\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}] \quad \mathbf{M}_{500} = (0.08\mathbf{i} + 0.12\mathbf{j} + 0.05\mathbf{k}) \times 500(\mathbf{i} \sin 40° + \mathbf{j} \cos 40° \cos 45° + \mathbf{k} \cos 40° \sin 45°)$$

$$\mathbf{M}_{500} = 18.95\mathbf{i} - 5.59\mathbf{j} - 16.90\mathbf{k} \text{ N·m}$$

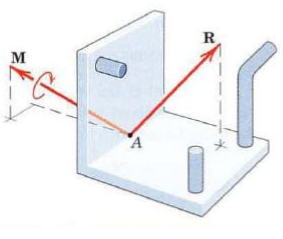
$$\mathbf{M}_{600} = (600)(0.060)\mathbf{i} + (600)(0.040)\mathbf{k} = 36.0\mathbf{i} + 24.0\mathbf{k} \text{ N·m}$$

$$\mathbf{M}_{700} = (700 \cos 60°)(0.030)\mathbf{i} - [(700 \sin 60°)(0.060) + (700 \cos 60°)(0.100)]\mathbf{j} - (700 \sin 60°)(0.030)\mathbf{k} = 10.5\mathbf{i} - 71.4\mathbf{j} - 18.19\mathbf{k} \text{ N·m}$$

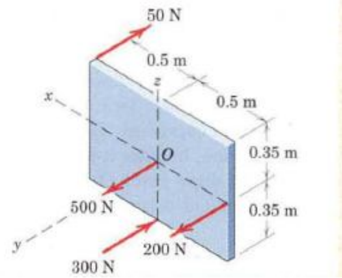
$$\mathbf{M}' = 25.0(-\mathbf{i} \sin 40° - \mathbf{j} \cos 40° \cos 45° - \mathbf{k} \cos 40° \sin 45°) = -16.07\mathbf{i} - 13.54\mathbf{j} - 13.54\mathbf{k} \text{ N·m}$$

$$\mathbf{M} = 49.4\mathbf{i} - 90.5\mathbf{j} - 24.6\mathbf{k} \text{ N·m}$$

$$M = \sqrt{(49.4)^2 + (90.5)^2 + (24.6)^2} = 106.0 \text{ N·m}$$



مثال: برآیند نیروها و گشتاورهای وارد در شکل مقابل را به شکل یک نیروی منفرد تعیین کنید.



Solution. Transfer of all forces to point O results in the force-couple system

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (200 + 500 - 300 - 50)\mathbf{j} = 350\mathbf{j}\ \text{N}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= [50(0.35) - 300(0.35)]\mathbf{i} + [-50(0.50) - 200(0.50)]\mathbf{k} \\ &= -87.5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

The placement of $\mathbf{R}$ so that it alone represents the above force-couple system is determined by the principle of moments in vector form

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

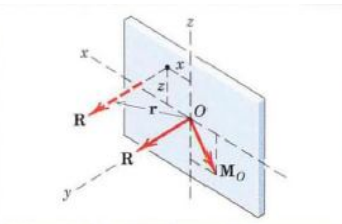
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times 350\mathbf{j} = -87.5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}$$

$$350x\mathbf{k} - 350z\mathbf{i} = -87.5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}$$

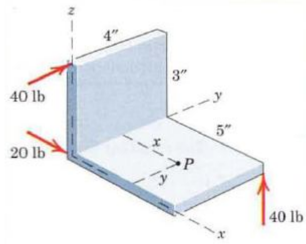
From the one vector equation we may obtain the two scalar equations

$$350x = -125 \quad \text{and} \quad -350z = -87.5$$

Hence, $x = -0.357$ m and $z = 0.250$ m are the coordinates through which the line of action of $\mathbf{R}$ must pass. The value of y may, of course, be any value, as ① permitted by the principle of transmissibility. Thus, as expected, the variable y drops out of the above vector analysis.



مثال: برآیند سه نیروی وارد بر نبشی شکل مقابل را به صورت یک رنچ تعیین کنید. مختصات نقطه ای در صفحه xy را که رنچ از آن میگذرد به دست آورید.

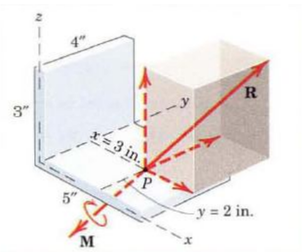


$$\mathbf{R} = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\ \text{lb} \qquad R = \sqrt{(20)^2 + (40)^2 + (40)^2} = 60\ \text{lb}$$

$$\cos\theta_x = 20/60 = 1/3 \quad \cos\theta_y = 40/60 = 2/3 \quad \cos\theta_z = 40/60 = 2/3$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{M})_{R_x} &= 20y\mathbf{k}\ \text{lb-in.} \\ (\mathbf{M})_{R_y} &= -40(3)\mathbf{i} - 40x\mathbf{k}\ \text{lb-in.} \\ (\mathbf{M})_{R_z} &= 40(4 - y)\mathbf{i} - 40(5 - x)\mathbf{j}\ \text{lb-in.}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = (40 - 40y)\mathbf{i} + (-200 + 40x)\mathbf{j} + (-40x + 20y)\mathbf{k}\ \text{lb-in.}$$



$$\begin{aligned}\cos\theta_x &= (40 - 40y)/M \\ \cos\theta_y &= (-200 + 40x)/M \\ \cos\theta_z &= (-40x + 20y)/M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}40 - 40y &= \frac{M}{3} \\ -200 + 40x &= \frac{2M}{3} \\ -40x + 20y &= \frac{2M}{3}\end{aligned}$$

$$M = -120\ \text{lb-in.} \qquad x = 3\ \text{in.} \qquad y = 2\ \text{in.}$$

فصل سوم: تعادل

$$R = \Sigma F = 0 \qquad M = \Sigma M = 0$$

الف) ترسیم نمودار آزاد

ب) تعادل در دو بعد

ج) تعادل در سه بعد

الف) رسم نمودارآزاد جسم

ترسیم «نمودار آزاد جسم» مهمترین گام در حل مسایل مکانیک است.

مراحل رسم نمودار آزاد جسم:

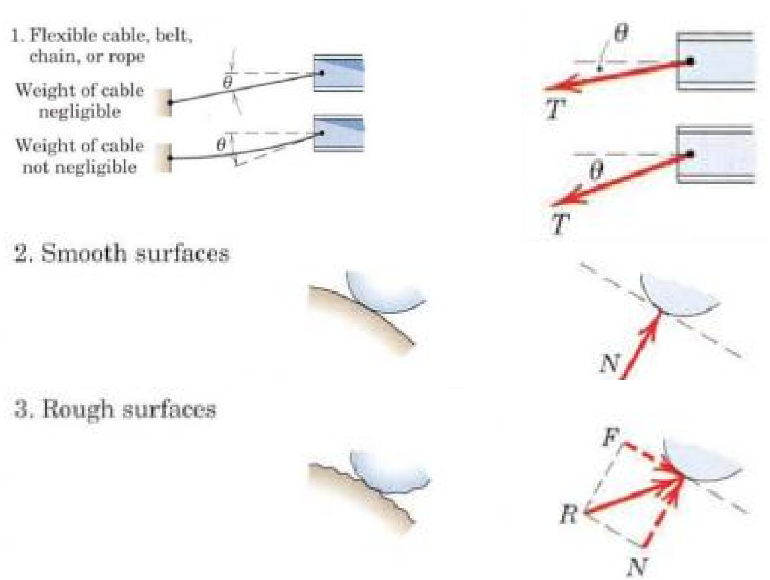
۱. انتخاب جسم یا مجموعه اجسام منزوی شونده

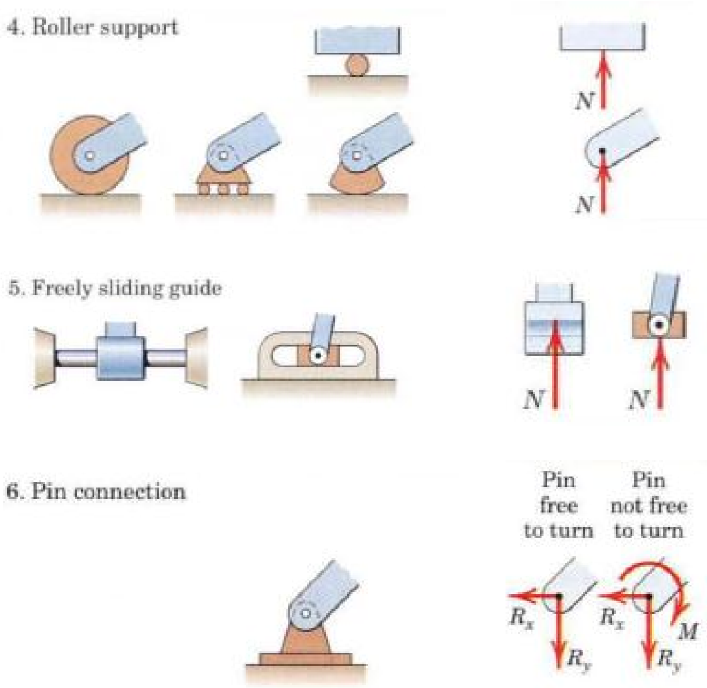
۲. رسم طرحی برای نشان دادن کامل مرز خارجی جسم یا مجموعه منزوی

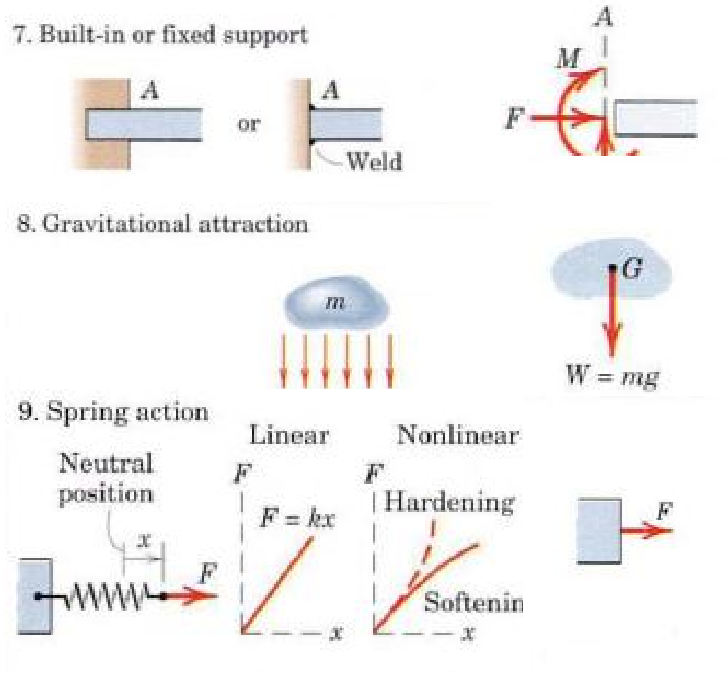
۳. رسم همه نیروهای تماسی و غیر تماسی بر جسم یا مجموعه اجسام منزوی

۴. نشان دادن محورهای مختصات انتخابی

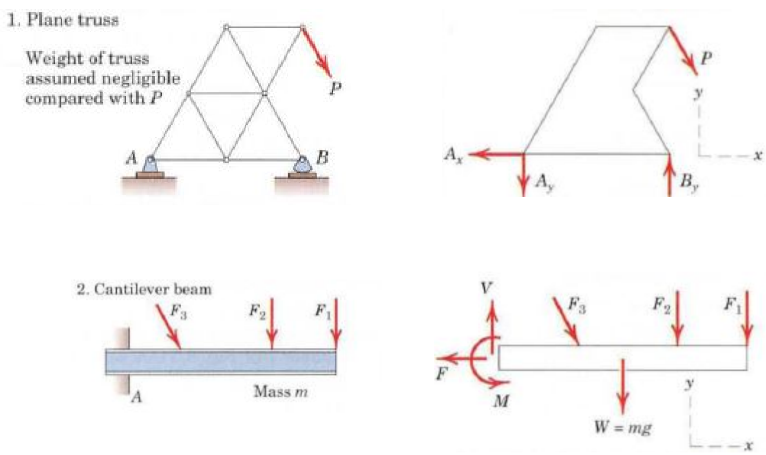
مدلسازی اثر نیروها:



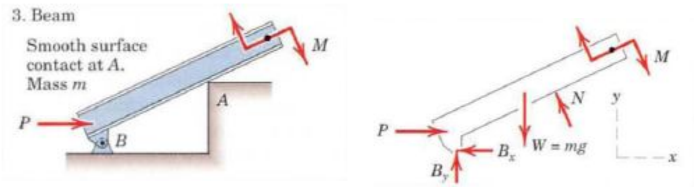


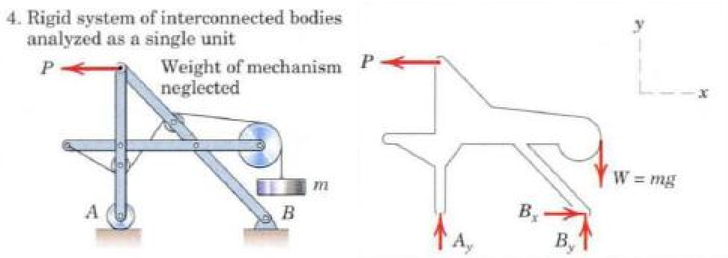


چند مثال برای نمودارآزاد جسم:



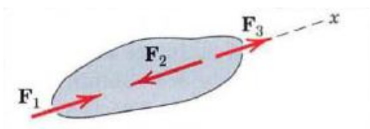
چند مثال برای نمودارآزاد جسم:



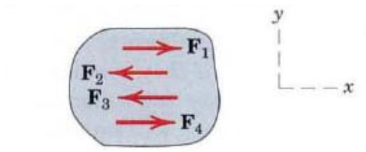


ب) شرایط تعادل در دو بعد

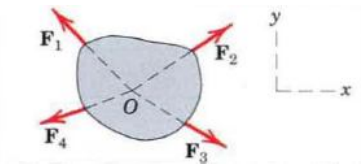
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$



$\Sigma F_x = 0$

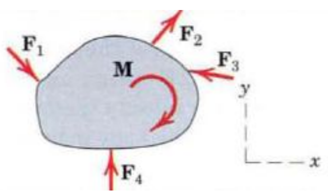


$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_z = 0$



$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$



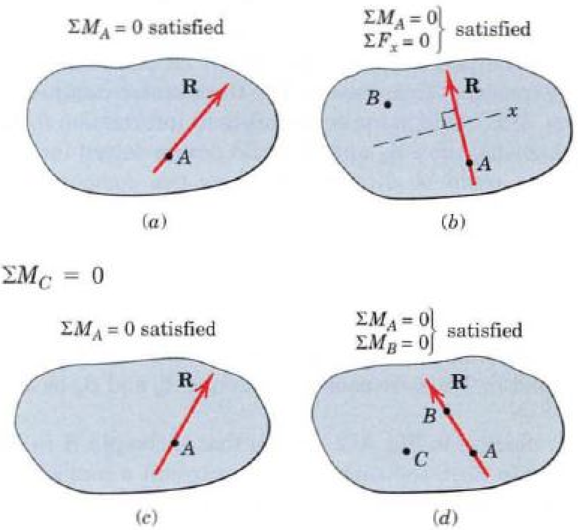
$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_z = 0$

$\Sigma F_y = 0$

صورتهای دیگر معادلات تعادل

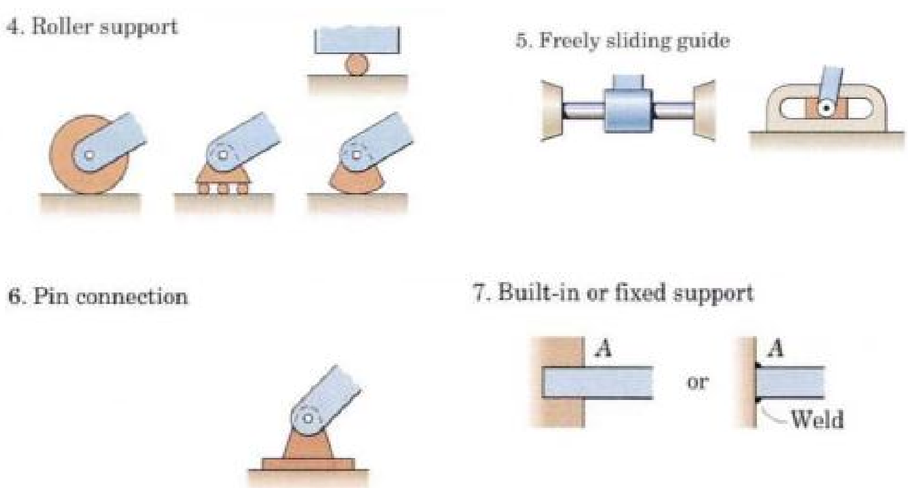
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$



قیدها:

محدویت در مقابل حرکت را قید گوییم.



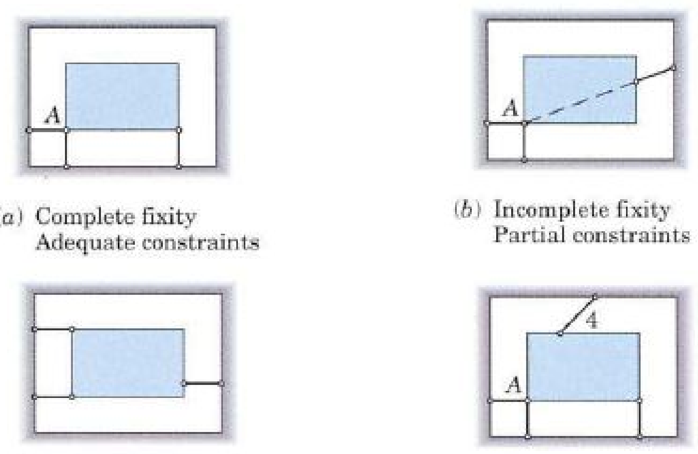
تعیین پذیری استاتیکی:

اگر تعداد تکیه گاهها یا قیدهای خارجی سیستم، از آنچه برای حفظ تعادل آن لازم است بیشتر باشد، میگوییم جسم به طور استاتیکی نامعین است.

تکیه گاههایی را که بتوان حذف کرد، بی آنکه تعادل جسم از دست برود، تکیه گاه زائد گوییم.

تعداد تکیه گاههای زائد معرف درجه نامعینی جسم است و برابر است با تعداد کل نیروهای خارجی مجهول منهای تعداد معادلات تعادل مستقل.

تعیین پذیری استاتیکی:

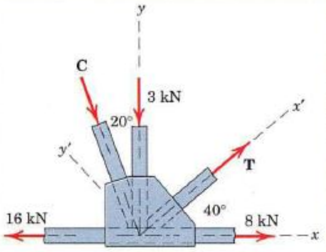


(a) Complete fixity
Adequate constraints

(b) Incomplete fixity
Partial constraints

(c) Incomplete fixity
Partial constraints

(d) **Excessive fixity**
Redundant constraint



مثال: پنج نیرو مطابق شکل به مفصل یک خرپا وارد میشود.

C و T را به دست آورید.

Solution I (scalar algebra). For the x-y axes as shown we have

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 8 + T\cos 40^\circ + C\sin 20^\circ - 16 = 0$$

$$0.766T + 0.342C = 8 \qquad (a)$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad T\sin 40^\circ - C\cos 20^\circ - 3 = 0$$

$$0.643T - 0.940C = 3 \qquad (b)$$

Simultaneous solution of Eqs. (a) and (b) produces

$$T = 9.09 \text{ kN} \qquad C = 3.03 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

Solution II (scalar algebra). To avoid a simultaneous solution, we may use axes x'-y' with the first summation in the y'-direction to eliminate reference to T. Thus,

$$[\Sigma F_{y'} = 0] \qquad -C\cos 20^\circ - 3\cos 40^\circ - 8\sin 40^\circ + 16\sin 40^\circ = 0$$

$$C = 3.03 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$[\Sigma F_{x'} = 0] \qquad T + 8\cos 40^\circ - 16\cos 40^\circ - 3\sin 40^\circ - 3.03\sin 20^\circ = 0$$

$$T = 9.09 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

ادامه حل مثال

Solution III (vector algebra). With unit vectors **i** and **j** in the x- and y-directions, the zero summation of forces for equilibrium yields the vector equation

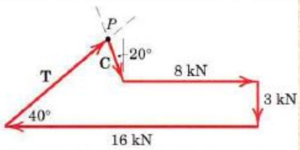
$$[\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}] \qquad 8\mathbf{i} + (T\cos 40^\circ)\mathbf{i} + (T\sin 40^\circ)\mathbf{j} - 3\mathbf{j} + (C\sin 20^\circ)\mathbf{i} - (C\cos 20^\circ)\mathbf{j} - 16\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Equating the coefficients of the **i**- and **j**-terms to zero gives

$$8 + T\cos 40^\circ + C\sin 20^\circ - 16 = 0$$

$$T\sin 40^\circ - 3 - C\cos 20^\circ = 0$$

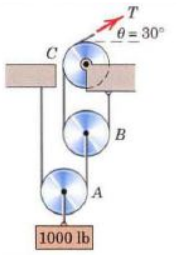
which are the same, of course, as Eqs. (a) and (b), which we solved above.



Solution IV (geometric). The polygon representing the zero vector sum of the five forces is shown. Equations (a) and (b) are seen immediately to give the projections of the vectors onto the x- and y-directions. Similarly, projections onto the x'- and y'-directions give the alternative equations in Solution II.

A graphical solution is easily obtained. The known vectors are laid off head-to-tail to some convenient scale, and the directions of **T** and **C** are then drawn to close the polygon. The resulting intersection at point P completes the solution, thus enabling us to measure the magnitudes of **T** and **C** directly from the drawing to whatever degree of accuracy we incorporate in the construction.

مثال: نیروی کشش T و نیروی وارد بر محور قرقره را به دست آورید.

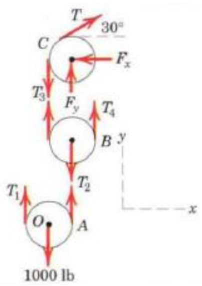


$[\Sigma M_O = 0] \qquad T_1 r - T_2 r = 0 \qquad T_1 = T_2$

$[\Sigma F_y = 0] \qquad T_1 + T_2 - 1000 = 0 \qquad 2T_1 = 1000 \qquad T_1 = T_2 = 500 \text{ lb}$

$T_3 = T_4 = T_2/2 = 250 \text{ lb}$

$T = T_3 \quad \text{or} \quad T = 250 \text{ lb}$



$[\Sigma F_x = 0] \qquad 250 \cos 30° - F_x = 0 \qquad F_x = 217 \text{ lb}$

$[\Sigma F_y = 0] \qquad F_y + 250 \sin 30° - 250 = 0 \qquad F_y = 125 \text{ lb}$

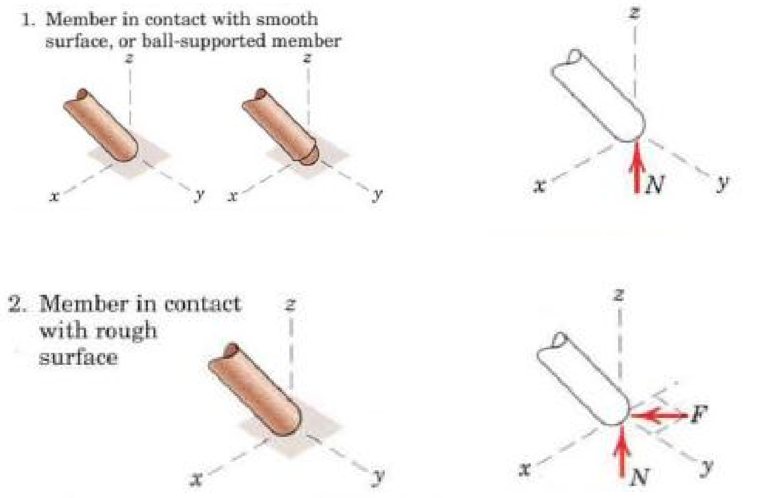
$\left[F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right] \qquad F = \sqrt{(217)^2 + (125)^2} = 250 \text{ lb}$

ج) شرایط تعادل در سه بعد

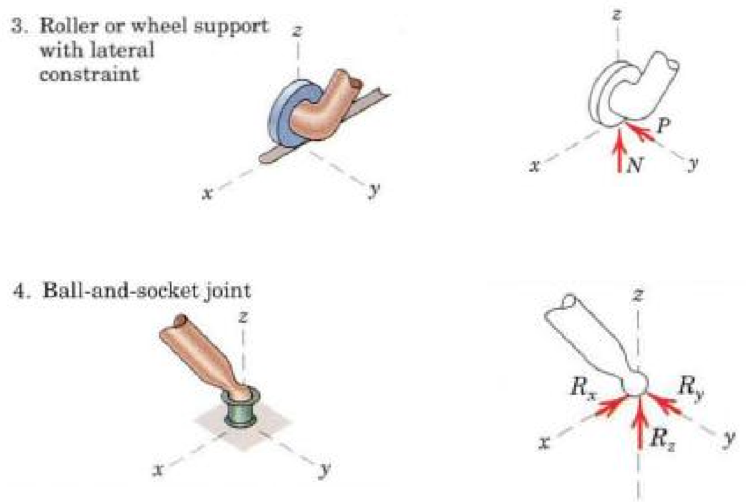
$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

مدلسازی اثر نیروها در سه بعد:

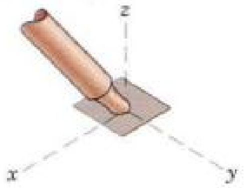


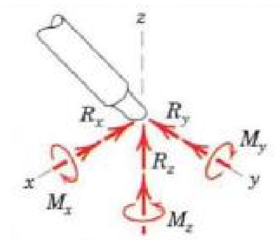
مدلسازی اثر نیروها در سه بعد:



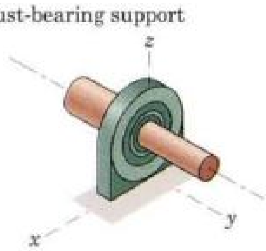
مدلسازی اثر نیروها در سه بعد:

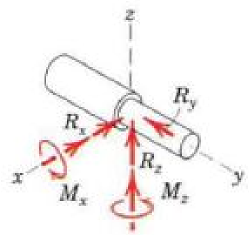
5. Fixed connection (embedded or welded)



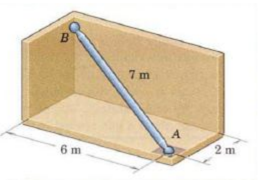


6. Thrust-bearing support



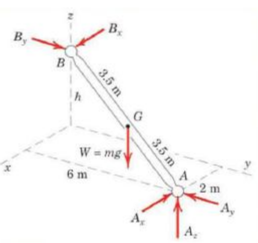


مثال:



The uniform 7-m steel shaft has a mass of 200 kg and is supported by a ball-and-socket joint at A in the horizontal floor. The ball end B rests against the smooth vertical walls as shown. Compute the forces exerted by the walls and the floor on the ends of the shaft.

$$\mathbf{r}_{AG} = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}\text{ m} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_{AB} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\text{ m}$$



$[\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}]$ $\qquad \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y) + \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W} = \mathbf{0}$

$$(-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + (-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \times (-1962\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -6 & 3 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1962 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(-3B_y + 5890)\mathbf{i} + (3B_x - 1962)\mathbf{j} + (-2B_y + 6B_x)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Equating the coefficients of **i**, **j**, and **k** to zero and solving give

$$B_x = 654\text{ N} \quad \text{and} \quad B_y = 1962\text{ N}$$

$[\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}]$ $\qquad (654 - A_x)\mathbf{i} + (1962 - A_y)\mathbf{j} + (-1962 + A_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$

and $\qquad A_x = 654\text{ N} \quad A_y = 1962\text{ N} \quad A_z = 1962\text{ N}$

Finally $\qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$$= \sqrt{(654)^2 + (1962)^2 + (1962)^2} = 2850\text{ N}$$

ادامه مثال:

Scalar solution. Evaluating the scalar moment equations about axes through A parallel, respectively, to the x- and y-axes, gives

$[\Sigma M_{A_x} = 0]$ $\quad 1962(3) - 3B_y = 0 \quad B_y = 1962\text{ N}$

$[\Sigma M_{A_y} = 0]$ $\quad -1962(1) + 3B_x = 0 \quad B_x = 654\text{ N}$

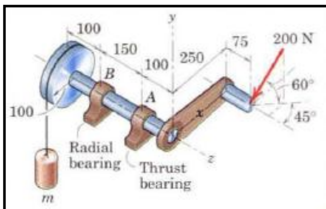
The force equations give, simply,

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad -A_x + 654 = 0 \quad A_x = 654\text{ N}$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad -A_y + 1962 = 0 \quad A_y = 1962\text{ N}$

$[\Sigma F_z = 0]$ $\quad A_z - 1962 = 0 \quad A_z = 1962\text{ N}$

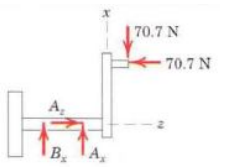
مثال: در شکل مقابل یاتاقان B فقط نیروی شعاعی را تحمل میکند، ولی یاتاقان A نیروی محوری را نیز تحمل میکند. جرم وزنه و کل نیروی شعاعی را که هر یک از یاتاقانها به محور وارد میکنند تعیین کنید.



Dimensions in millimeters

From the x-y projection

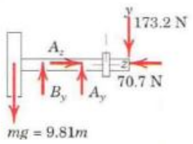
$[\Sigma M_O = 0]$ $\quad 100(9.81m) - 250(173.2) = 0 \quad m = 44.1\text{ kg}$



From the x-z projection

$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad 150B_x + 175(70.7) - 250(70.7) = 0 \quad B_x = 35.4\text{ N}$

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad A_x + 35.4 - 70.7 = 0 \quad A_x = 35.4\text{ N}$

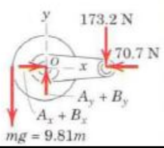


The y-z view gives

$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad 150B_y + 175(173.2) - 250(44.1)(9.81) = 0 \quad B_y = 520\text{ N}$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad A_y + 520 - 173.2 - (44.1)(9.81) = 0 \quad A_y = 86.8\text{ N}$

$[\Sigma F_z = 0]$ $\quad A_z = 70.7\text{ N}$

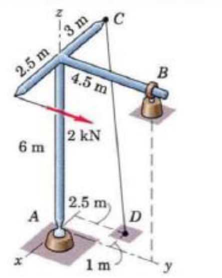


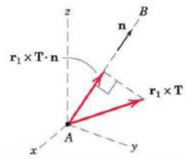
The total radial forces on the bearings become

$[A_r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}]$ $\quad A_r = \sqrt{(35.4)^2 + (86.8)^2} = 93.5\text{ N}$

$[B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}]$ $\quad B = \sqrt{(35.4)^2 + (520)^2} = 521\text{ N}$

مثال:

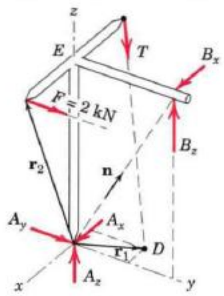




$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 4.5^2}}(4.5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \qquad \mathbf{F} = 2\mathbf{j}\ \text{kN}$$

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j}\ \text{m} \qquad \mathbf{r}_2 = 2.5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\ \text{m}$$



$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad (-\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j}) \times \frac{T}{\sqrt{46.2}}(2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (2.5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{j}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

$$-\frac{48T}{\sqrt{46.2}} + 20 = 0 \qquad T = 2.83\ \text{kN}$$

$$T_x = 0.833\ \text{kN} \qquad T_y = 1.042\ \text{kN} \qquad T_z = -2.50\ \text{kN}$$

$[\Sigma M_z = 0]$	$2(2.5) - 4.5B_x - 1.042(3) = 0$	$B_x = 0.417$ kN
$[\Sigma M_x = 0]$	$4.5B_z - 2(6) - 1.042(6) = 0$	$B_z = 4.06$ kN
$[\Sigma F_x = 0]$	$A_x + 0.417 + 0.833 = 0$	$A_x = -1.250$ kN
$[\Sigma F_y = 0]$	$A_y + 2 + 1.042 = 0$	$A_y = -3.04$ kN
$[\Sigma F_z = 0]$	$A_z + 4.06 - 2.50 = 0$	$A_z = -1.556$ kN