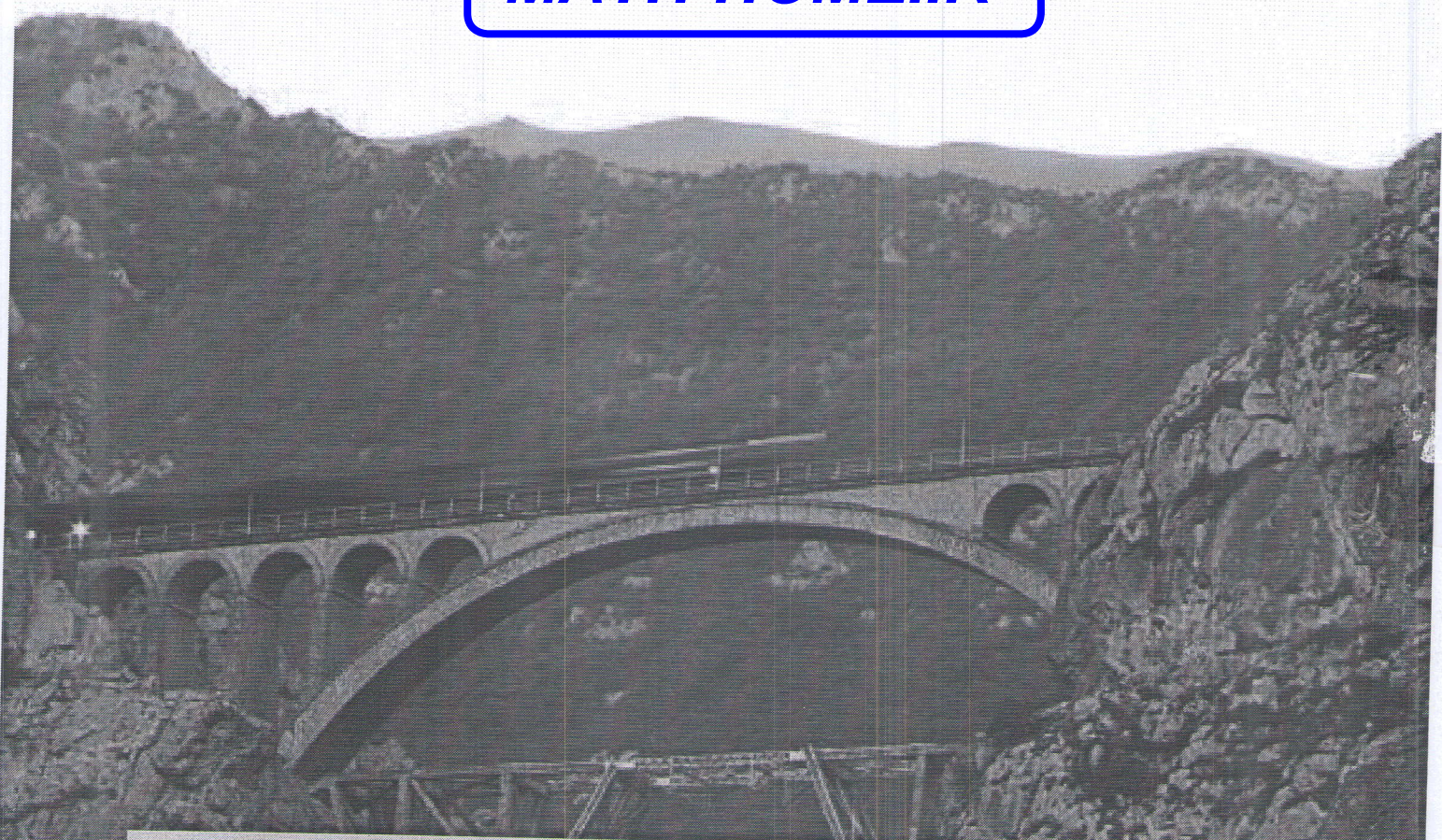


فصل ۱

ترسیم های هندسی و توازی

MATH-HOME.IR



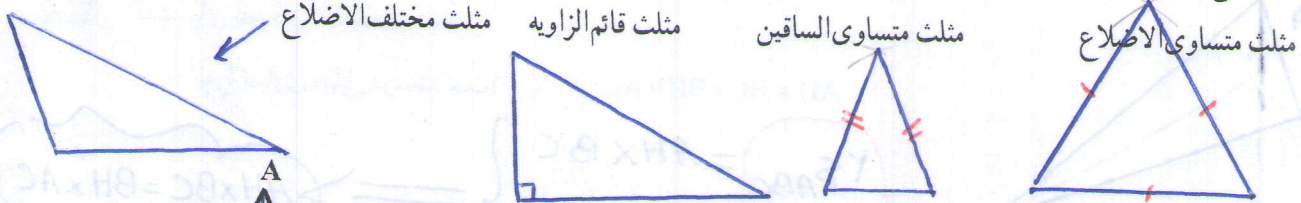
- مثلث و اجزاء آن
- ترسیم های هندسی
- اصول توازی
- خط های موازی و مورب

مهندسان در طراحی یک سازه پل یا ساختمان از قضیه ها و مسائل هندسی استفاده می کنند. به همین دلیل مهندس کسی است که هندسه می داند. آنها پس از طراحی یک سازه با کمک مفاهیم و قضایای هندسی، طرح خود را به صورت یک نقشه ارائه می کنند. آیا شما می خواهید مهندس شوید؟

مثلث و اجزاء آن

تجربین

۱- انواع مثلث در زیر نوشته شده است. شکل هر کدام را رسم کنید.

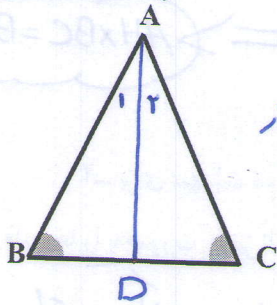


استدلال

۲- شکل مقابل مثلث متساوی الساقین است. $(AB=AC)$

فرض $AB = AC$
 $AD = AD$
 AD نیمساز $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

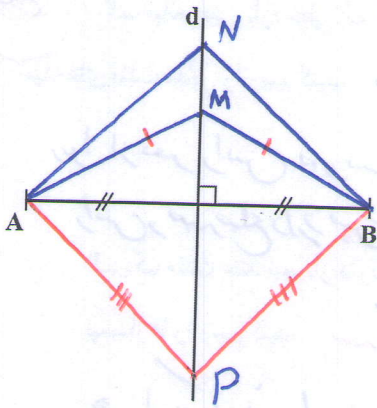
چرا دو زاویه C و B با هم مساوی اند؟
 $\hat{A}BD = \hat{A}CD \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 اجزاء متساوی
 (ابتدا نیمساز زاویه A را رسم کنید.)



۳- خط d عمود منصف پاره خط AB است. یعنی هم بر AB عمود است و هم آن را نصف می کند. نقطه دلخواه M را

روی عمود منصف در نظر بگیرید و به دو سر پاره خط وصل کنید. با سه نقطه دیگر این کار را

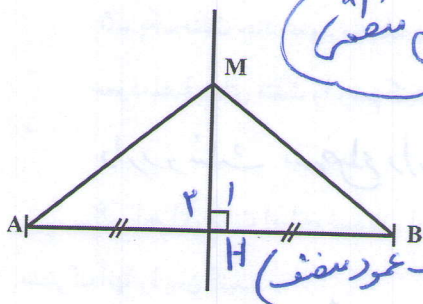
تکرار کنید. **دست ورزی** هر نقطه روی عمود منصف از دور آن چه نتیجه ای می گیرید؟



پاره خطی که فاصله می باشند

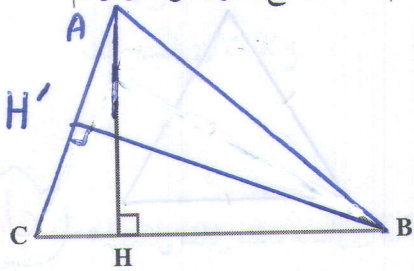
استدلال منصف

۴- نقطه M روی عمود منصف AB است. چرا $MA = MB$



$MH = MH$
 $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
 فرض $AH = BH$ (تعریف عمود منصف)
 اجزاء متساوی
 $\hat{A}MH = \hat{B}MH \Rightarrow AM = BM$

۱- در مثلث ABC ارتفاع نظیر رأس A یا ارتفاع وارد بر قاعده BC را رسم کرده ایم. شما ارتفاع نظیر رأس B را رسم کنید. پای عمود را H' بنامید.



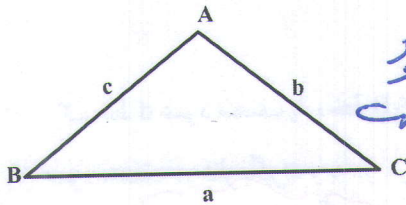
$$AH \times BC = BH' \times AC$$

چرا تساوی مقابل درست است؟

$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت } \triangle ABC &= AH \times BC \\ \text{مساحت } \triangle ABC &= BH' \times AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH \times BC = BH' \times AC$$

۲- برای سهولت نام گذاری ضلع های مقابل هر رأس را به صورت مقابل نام گذاری می کنیم. می توان ارتفاع وارد بر قاعده ها را به صورت h_a نیز نام گذاری کرد. چرا تساوی مقابل درست است؟

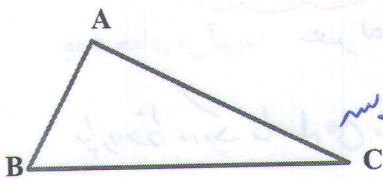
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$



با توجه به اینکه مساحت مقدار ثابتی است و حاصل ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش رو برابر مساحت مثلث می شود لذا نتیجه می گیریم حاصل ضرب ارتفاع در قاعده نظیر مقدار ثابتی است

تعریف میانه

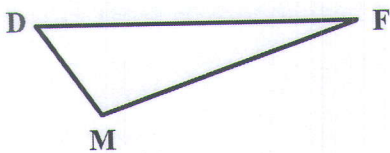
۳- میانه یعنی پاره خطی که از هر رأس به وسط ضلع مقابل آن وصل می شود. یک مثلث چند میانه دارد؟ چرا؟



میانه های مثلث مقابل را رسم کنید. سه میانه دارد

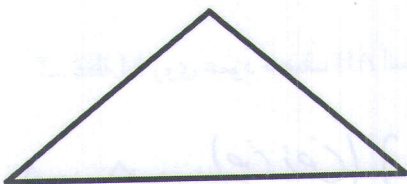
زیرا از هر رأس به وسط ضلع مقابل وصل می کنیم و مثلث سه رأس در ضلع دارد پس سه میانه دارد

۴- یک مثلث چند نیمساز دارد؟ چرا؟



نیمسازها را رسم کنید. سه نیمساز دارد

هر زاویه در نیمساز دارد و مثلث سه زاویه دارد پس سه نیمساز دارد



۵- یک مثلث چند عمود منصف دارد؟ چرا؟ سه عمود منصف دارد

عمود منصف های مثلث را رسم کنید. هر ضلع یک عمود منصف دارد و مثلث سه ضلع دارد

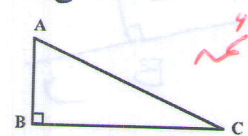
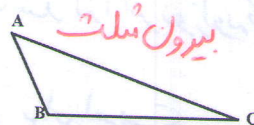
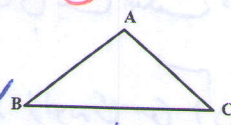
۶- اجزای مثلث (میانه، نیمساز، ارتفاع و عمود منصف) یک ویژگی مشترک دارند. با توجه به سؤال های بالا ویژگی مشترک آنها را بیان کنید.

هر سه در یک نقطه تلاقی می کنند - از هر کدام سه تا وجود دارد

سه ارتفاع یک نقطه می برخورد دارند

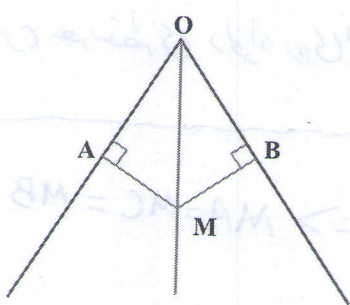
- ① در مثل قائم الزاویه سه ارتفاع روی رأس قائمه بلندتر ارفع می کنند
- ② یکی از زاویه ها باز باشد سه ارتفاع بیرون مثلث بیرون بلندتر ارفع می کنند
- ③ سه زاویه تند باشند سه ارتفاع داخل مثلث بلندتر ارفع می کنند

داخل مثلث



۱- در مثلث های داده شده هر سه ارتفاع را رسم کنید. از مقایسه آنها چه نتیجه ای می گیرید؟

- ۲- آیا محل برخورد سه نیمساز یک مثلث همیشه داخل مثلث است؟ چرا؟ **بله**، با رسم شکل می توان بررسی کرد
- برای مثلث های مختلف امتحان کنید. چون نیم سازها بین دو ضلع زاویه می باشند پس درون مثلث بلندتر ارفع می کنند
- ۳- روی نیمساز زاویه O نقطه ای مثل M انتخاب شده است. فاصله نقطه M را از دو ضلع زاویه به دست آورید. ۳ نقطه



دیگر روی نیمساز در نظر بگیرید. فاصله آنها را از دو ضلع به دست آورید، چه نتیجه ای می گیرید؟

هر نقطه روی نیم ساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

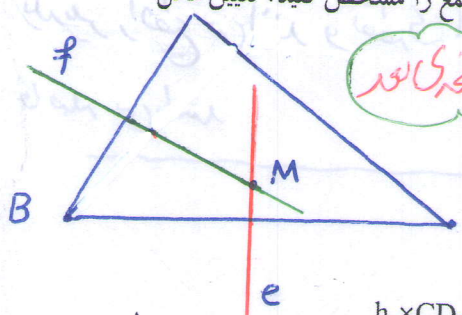
استدلال در صفحه ای بود

بر اساس نتیجه ای که گرفتید تعریفی برای نیمساز زاویه ارائه کنید.

(نیمساز مجموعه نقاطی است که ... زاویه به یک فاصله باشند)

تعریف نیم ساز جدید

- ۴- قرار است یک مجتمع خدماتی شامل مدرسه، درمانگاه و ورزشگاه برای استفاده سه دهکده مشخص شده در نقشه ساخته شود به طوری که فاصله این مجتمع سه دهکده به یک اندازه باشد. محل ساختمان مجتمع را مشخص کنید. تعیین محل



استدلال صفحه ای بود

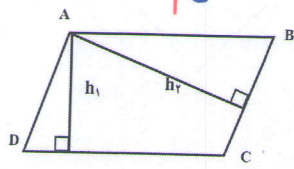
ساخت مجتمع به چه عوامل دیگری بستگی دارد؟

اگر سه روستا را با حروف A، B، C نام گذاری کنیم

عمود منصف اضلاع این مثلث را رسم می کنیم محل برخورد

این عمود منصف ها از سه روستا به یک فاصله است

۵- در شکل متوازی الاضلاع روبرو چرا تساوی درست است؟

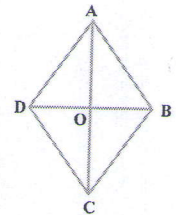


$h_1 \times CD = h_2 \times BC$

$S = h_1 \times CD$
 $S = h_2 \times BC \Rightarrow h_1 \times CD = h_2 \times BC$

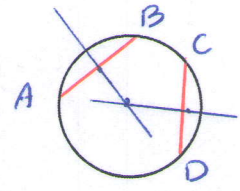
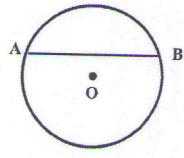
همساحت یک شکل همیشه ثابت است

- ۶- چرا قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند؟
- $AD = AB \Rightarrow$ **روای عمود منصف BD است**
- $CD = CB \Rightarrow$ **روای عمود منصف BD است**
- \Rightarrow **AC عمود منصف BD است**
- به همین ترتیب ثابت می کنیم BD عمود منصف AC می باشد



۷- چرا عمود منصف پاره خط AB از مرکز دایره می گذرد؟

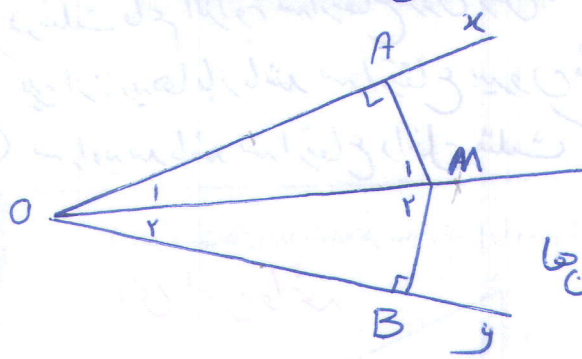
با توجه به سؤال بالا مرکز دایره مقابل را پیدا کنید.



$OA = OB = R \Rightarrow$ **O روی عمود منصف AB است**

عمود منصف دو وتر غیر متوازی دایره را رسم می کنیم محل برخورد آن ها مرکز دایره می باشد

M نقطه‌ی دلخواه روی نیم سازه زاویه‌ی O می باشد. از M بر اضلاع زاویه عمود می کشیم



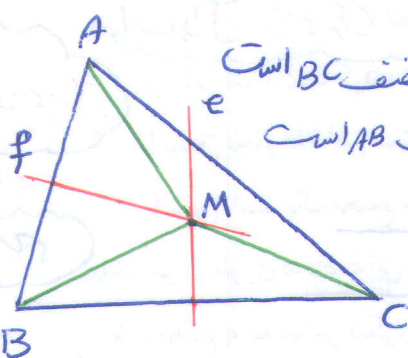
$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (1)$$

مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰ می باشد لذا اگر دوزاویه‌ی آن‌ها

برابر باشند زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر است

$$\left. \begin{array}{l} (1) \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضی ز}} \triangle OAM = \triangle OBM \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} MA = MB$$

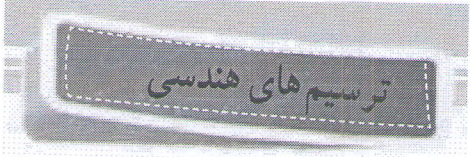
پس هر نقطه‌ی دلخواه روی نیم سازه زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله می باشد



$$\left. \begin{array}{l} M \text{ روی عمود منصف } BC \text{ است} \Rightarrow MB = MC \\ M \text{ روی عمود منصف } AB \text{ است} \Rightarrow MB = MA \end{array} \right\} \Rightarrow MA = MC = MB$$

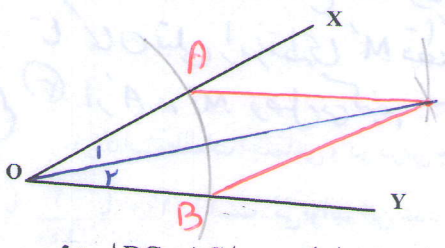
نقطه‌ی M از سه نقطه‌ی A و B و C به یک

فاصله می باشد



روش رسم نیمساز یک زاویه را در دوره دبستان آموخته اید. مراحل زیر را دنبال کنید و به سؤال ها پاسخ دهید تا متوجه شوید چرا با این روش نیمساز زاویه به دست می آید.

۱- دهانه پرگار را به دلخواه باز کنید. به مرکز O یک کمان (قسمتی از دایره) را رسم کنید تا نیم خط های OX و OY را در A و B قطع کند. چرا $OA=OB$ است؟



چون OA و OB شعاع دایره ای به مرکز O می باشند

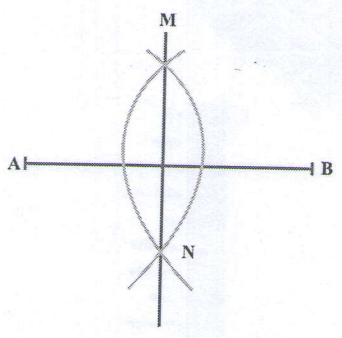
۲- به مرکزهای A و B، به شعاع دلخواه دو کمان مساوی رسم کنید تا یکدیگر را در C قطع کند. چرا $BC=AC$ است؟

چون دهانه های پرگار را تغییر ندادیم

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } OA = OB \\ \text{فرض } AC = BC \\ OC = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضدضی)}} \triangle OAC = \triangle OBC \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$$

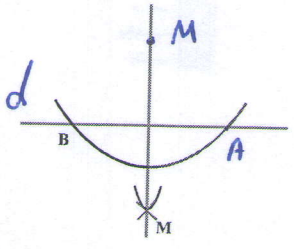
پس OC نیمساز است

مانند فعالیت بالا مراحل ترسیم شکل ها را بنویسید و دلیل بیاورید که چرا با انجام این مراحل شکل مورد نظر رسم می شود.



۱- رسم عمود منصف پاره خط AB
 ۱- به مرکز A و شعاع بیش از نصف AB یک کمان من رسم کنیم
 ۲- به مرکز B و به همان شعاع یک کمان دیگری رسم می کنیم
 ۳- خط MN عمود منصف AB است
 $MA = MB$
 $NA = NB$

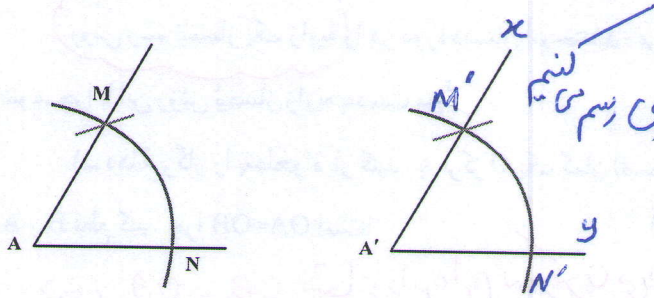
۲- رسم خط عمود از یک نقطه خارج یک خط



۱- از M کمانی را بکشیم تا پاره خط AB بدست آید
 ۲- با همان شعاع از A و B دو کمان من رسم تا نقطه M طرف بدست آید
 ۳- MA عمود منصف AB است پس دایره d عمود است

$$\left. \begin{array}{l} AN = A'N' \\ AM = A'M' \\ MN = M'N' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیة ضلعی}} \triangle AMN = \triangle A'M'N' \Rightarrow \angle A = \angle A'$$

MATH-HOME.IR



۳- رسم زاویه مساوی با یک زاویه دیگر

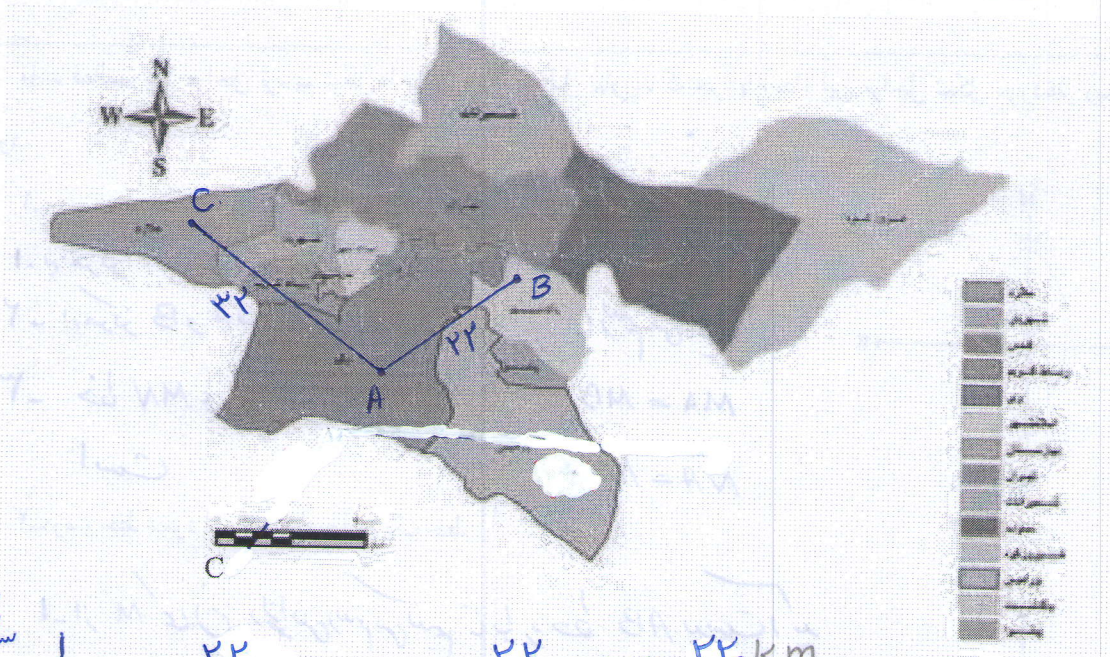
- ① به مرکز A و A' دو کمان با شعاع های مساوی رسم کنید
- ② به مرکز N و N' دو شعاع MN و M'N' بکشید
- ③ از A' به M' وصل کنید زاویه A=A'

پیرامونی شود

در کتاب مطالعات اجتماعی و در درس جغرافی با نقشه و مقیاس آن آشنا شده اید. وقتی می گوئیم مقیاسه نقشه ۱ به ۱۰۰ یا $\frac{1}{100}$ یا ۱:۱۰۰ است، می توانیم این عدد را به صورت های مختلف تفسیر کنیم. برای مثال ۱۰۰ متر واقعی یک متر روی نقشه است، یا ۱۰۰ سانتی متر در واقعیت برای یک سانتی متر روی نقشه است.

مقیاس نقشه زیر ۱ به ۱۰۰۰۰۰ است. تفسیر مقیاس را بنویسید. **(اگر مقیاس ۱ به ۱۰۰۰۰۰ باشد جواب منطقی تر است)**

فاصله نقاط A، B و C را از یکدیگر روی نقشه پیدا کنید و بنویسید در اندازه واقعی این فاصله ها چند متر هستند؟



سنتی متر روی نقشه

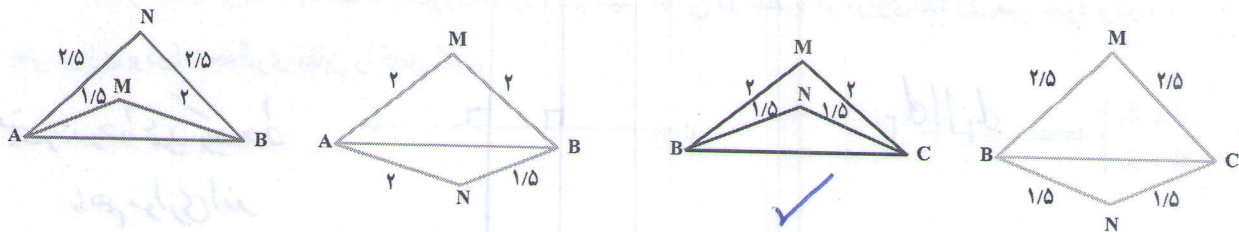
$$\frac{1}{100000} = \frac{22}{x} \Rightarrow x = 220000 = 220 \text{ km}$$

$$\frac{1}{100000} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = 320000 = 320 \text{ km}$$

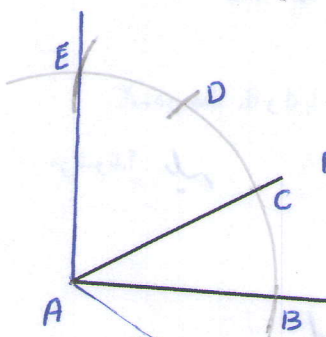
$$\left. \begin{matrix} M_1 = M_2 = 90 \\ BM = CM \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{عمود منصف BC است}$$

MATH-HOME.IR

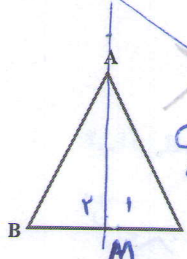
۱- در کدام شکل خط MN عمود منصف پاره خط AB است؟ چرا؟



- ۲- با پرگار، خط کش و نقاله شکل های زیر را رسم کنید.
- الف) پاره خطی به طول ۵ سانتی متر و عمود منصف آن
- ب) یک زاویه ۱۲۰ درجه و نیمساز آن با پرگار
- پ) یک زاویه دلخواه و زاویه دیگری که با آن مساوی باشد.



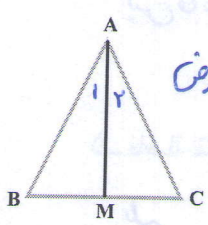
- ۳- یک زاویه رسم کنید و با کمک پرگار آن را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید.
- ۴- زاویه مقابل را سه برابر کنید. ① به مرکز A یک کمان با شعاع دلخواه رسم کنید.
- ② پرگار را به شعاع BC باز کنید و دو کمان متوالی کمان سه زویم
- $\angle BAE = 3 \angle BAC$
- ۵- یک پاره خط رسم کنید و با پرگار آن را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید.



۶- مثلث ABC متساوی الساقین است. چرا اگر عمود منصف BC را رسم کنیم، از رأس A می گذرد؟

میانهای AM را رسم می کنیم

$$\left. \begin{matrix} AM = AM \\ BM = CM \\ AB = AC \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow \left. \begin{matrix} M_1 = M_2 \\ M_1 + M_2 = 180 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{M_1 = M_2 = 90}$$

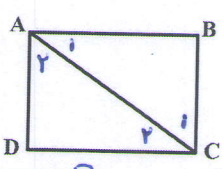


اجزاء متناظر

$$\left. \begin{matrix} AM = AM \\ BM = CM \\ AB = AC \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow A_1 = A_2$$

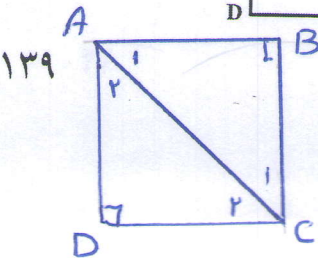
۷- مثلث ABC متساوی الساقین است. میانه AM را رسم کرده ایم. چرا AM نیمساز زاویه A نیز محسوب می شود؟

۸- اگر قطر مربع را رسم کنیم آیا نیمساز زاویه ها هم محسوب می شود؟ چرا؟ بله



آیا در مستطیل هم همین طور است؟ چرا؟ خیر

اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ باشد $AB = AD$ می شود و مستطیلی که طول و عرضش برابر باشد مربع می شود



اجزاء متناظر

$$\left. \begin{matrix} AB = AD \\ BC = DC \\ \hat{D} = \hat{B} = 90 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{فرض فرض}} \triangle BAC = \triangle DAC \Rightarrow \left. \begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{matrix} \right\}$$

پس قطر مربع نیمساز زاویه ها محسوب می شود

اصول توازی

فعالیت

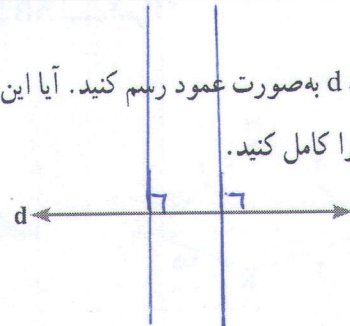
۱- دو خط d_1 و d_2 را به خط d به صورت عمود رسم کنید. آیا این دو خط با هم موازی اند؟ (یعنی عمود بودن و \perp)

بله

یعنی موازی بودن) نتیجه گیری مقابل را کامل کنید.

نتیجه: دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند

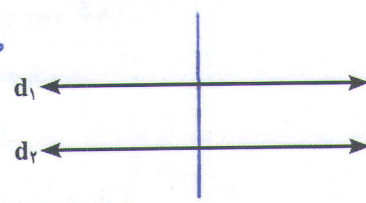
$$\left. \begin{matrix} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



۲- خط های d_1 و d_2 با هم موازی اند. خط d را بر d_1 عمود کنید و امتداد دهید. آیا خط d بر خط d_2 هم عمود می شود؟

نتیجه: خطی که بر یکی از خطوط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است

$$\left. \begin{matrix} d \perp d_1 \\ d_1 \parallel d_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \perp d_2$$




۳- دو خط d_1 و d_2 با هم موازی اند. دو خط d و d' نیز با یکدیگر موازی اند. آیا دو خط d_1 و d_2 خودشان با هم موازی می شوند؟

بله

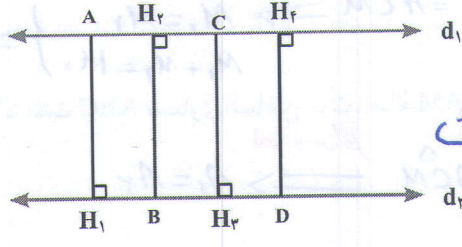
نتیجه: $d \parallel d_1$ و $d' \parallel d_2$ implies $d_1 \parallel d_2$

$$\left. \begin{matrix} d \parallel d_1 \\ d' \parallel d_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



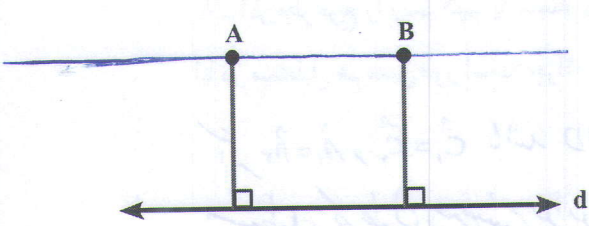
۴- اگر d_1 موازی d_2 باشد، فاصله نقاط را تا خط مقابل آن پیدا کنید. چه نتیجه ای از این فعالیت می گیرید؟

نتیجه: فاصله ها همگی با هم برابرند
پس فاصله ی دو خط موازی همواره ثابت است

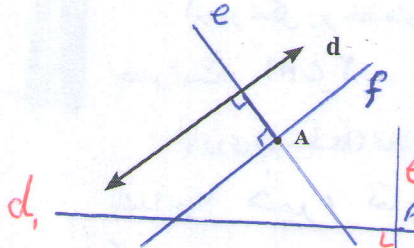


۵- فاصله نقاط A و B از خط d با هم برابر است. آیا خطی که از A و B می گذرد موازی d است؟

بله

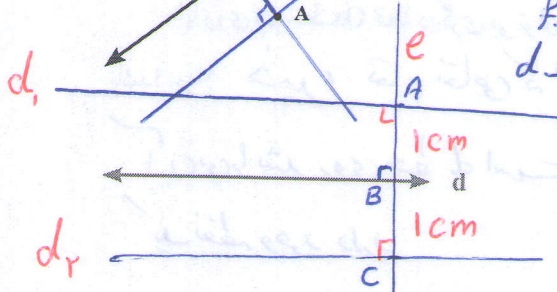


۱- با توجه به فعالیت صفحه قبل از نقطه A خطی به موازات خط d رسم کنید.



خط e را از A بر خط d عمود می‌کنیم (۱) خط f را از A بر خط e عمود می‌کنیم (۲)
 $f \perp e$
 $d \perp e \Rightarrow f \parallel d$
 عمود می‌کنیم

۲- خطی موازی d رسم کنید که فاصله‌اش از آن ۲ سانتی متر باشد.

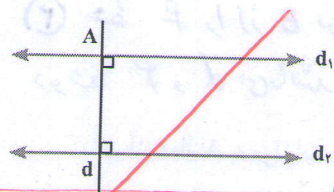


خط e را بر خط d عمود می‌کنیم $BC = AB = 1cm$ خط‌های (۱) d_1 و d_2 را از A و C بر e عمود می‌کنیم. d_1 و d_2 با d موازی و فاصله‌ی آن‌ها از خط d برابر ۱cm است.
 ۳- تمام نقاطی را پیدا کنید که از خط d به فاصله ۲ سانتی متر باشند.

توضیح دهید که چگونه می‌توان دلیل آورد که (۱) خطی بر خط d عمود می‌کنیم این نقاط به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند. (۲) در دو طرف خط d ۲cm جدار می‌کنیم

(۳) ارتفاعات است آمده خطوطی را بر خط عمود بر d عمود می‌کنیم
 (۴) این خطوط با خط d موازی و به فاصله ۲cm از آن می‌باشند

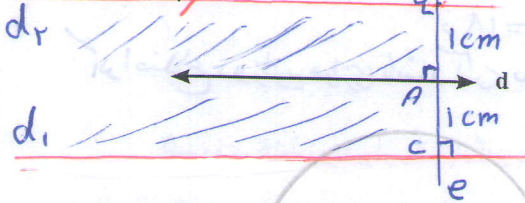
۴- دو خط موازی با خط عمود آنها زاویه‌های برابر می‌سازد. یک خط مورب طوری رسم کنید که دو خط موازی را



قطع کند. آیا این خط نیز با دو خط موازی، زاویه‌های مساوی می‌سازد؟

دست‌ورزی (تمرین ۴ صفحه ۵۵، کتاب ششم)

۴ زاویه‌ی تند مساوی و ۴ زاویه‌ی باز مساوی بوجود می‌آورد



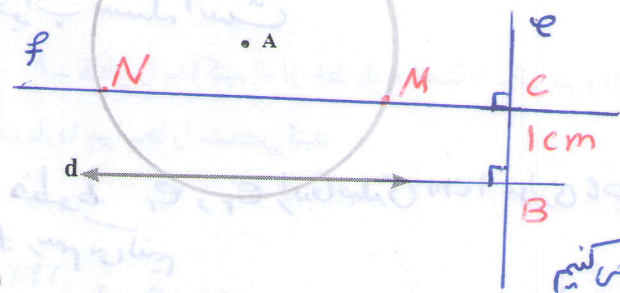
۵- تمام نقاطی را پیدا کنید که از خط d به فاصله کمتر از یک سانتی متر هستند.

(۱) خط e را بر خط d عمود می‌کنیم $AB = AC = 1cm$ جدار می‌کنیم
 (۲) خط‌های d_1 و d_2 از B و C بر خط e عمود می‌کنیم
 (۳) فضای بین این خطوط جواب مسئله است
 ۶- تمام نقاطی را پیدا کنید که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی متر هستند.

دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲cm رسم می‌کنیم

۳ نقاط روی این دایره جواب مسئله می‌باشند

۷- تمام نقاطی را پیدا کنید که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی مترند و از خط d هم به فاصله ۱ سانتی متر قرار دارند.



(۱) خط e را بر خط d عمود می‌کنیم

(۲) $BC = 1cm$ جدار می‌کنیم

(۳) خط f را از C بر خط e عمود می‌کنیم

(۴) به مرکز A و شعاع ۲cm دایره‌ای رسم می‌کنیم

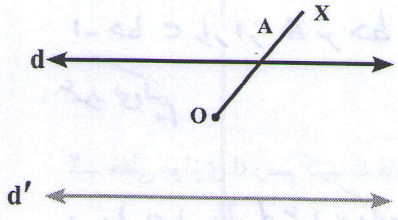
(۵) نقاط M و N جواب مسئله می‌باشند

طول دیوار ۵۰ متر هست و طول دیوار نقشه ۵/۵۵ متر است
 پس ۱۰۰۰۰ سانتی متر با ۵ سانتی متر پیش دره شده است

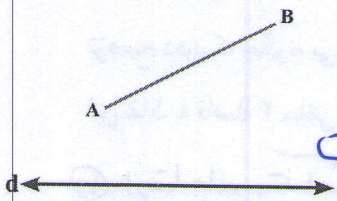
$$\frac{100}{5} = \frac{10000}{55} \text{ دیوار اصلی نقشه}$$

MATH-HOME.IR

۱- در شکل زیر خط‌های d و d' با هم موازی و به فاصله ۲ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. فاصله نقطه A از خط d' چقدر است؟



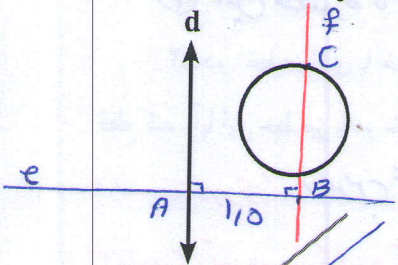
چقدر است؟ 2 cm
 آیا روی نیم خط Ox نقطه دیگری می‌توان یافت که فاصله آن از خط d' ۲ سانتی متر باشد؟ چرا؟
 خیر، تمام نقاطی که به فاصله ۲ سانتی متری از خط d باشند روی خط d' است پس روی خط d فقط یک نقطه وجود دارد



۲- نقاطی از پاره خط AB پیدا کنید که فاصله آنها از خط d برابر ۲ سانتی متر باشد.

- ① خطوطی به فاصله ۲ سانتی متر در دو طرف خط d رسم می‌کنیم
- ② خط AB در دو نقطه این خطوط را قطع می‌کند این دو نقطه جواب مسئله است

۳- نقاطی از دایره را پیدا کنید که فاصله آنها تا خط d کمتر از $1/5$ سانتی متر باشد. کدام نقاط دایره فاصله‌ای برابر با



- ① $AB = 1/5 \text{ cm}$ روی خط عمود بر خط d جدا می‌کنیم
- ② خط f را از B بر خط e عمود می‌کنیم
- ③ C م نقاطی از دایره که بین دو خط f و e باشد

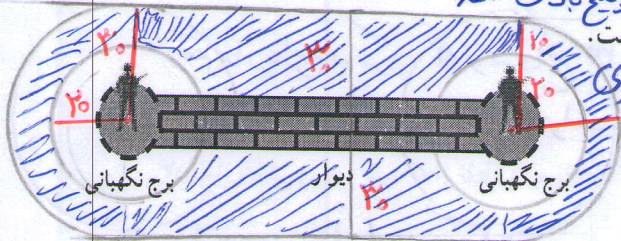
۴- از نقطه A به موازات ضلع‌های زاویه خطی رسم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

$$A_1 = B, A_2 + B = 180$$

اگر اضلاع دوزاویه موازی باشند آن دوزاویه یا مساوی اند یا مکمل

۵- روی نقشه زیر دیوار یک پادگان به طول ۱۰۰ متر و دو برج نگهبانی در دو طرف دیوار دیده می‌شود. دو نگهبان تا

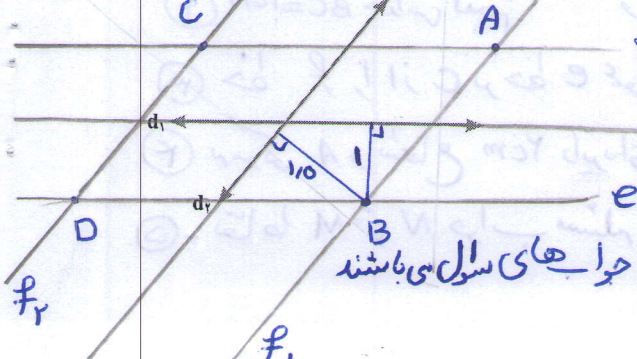
فاصله ۲۰ متری را به خوبی می‌بینند اگر قرار باشد از دو طرف دیوار به فاصله ۳۰ متر را تحت نظر داشته باشند، کدام قسمت از



زمین اطراف دیوار کمترین دید را خواهد داشت؟ مقیاس نقشه ۵ به ۱۰۰۰۰ است.

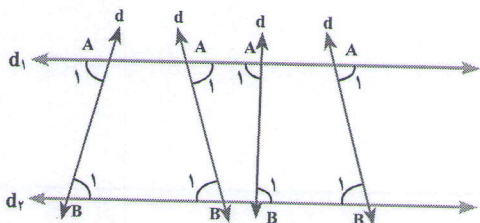
- ① دوازده به شعاع r اس رسم می‌کنیم
- ② دو خط موازی به فاصله ۵۰ را اس رسم می‌کنیم
- ③ فضای هاستور خورده جواب مسئله است

۶- نقاطی را پیدا کنید که از خط d_1 به فاصله ۱ سانتی متر و از خط d_2 به فاصله $1/5$ سانتی متر باشند. این مسئله چند



- جواب دارد؟ جواب‌ها را مشخص کنید.
- ① خطوط e_1, e_2 (به فاصله ۱ cm موازی با خط d_1 رسم می‌کنیم
 - ② خطوط f_1, f_2 (به فاصله ۱/۵ موازی با e_2 رسم می‌کنیم
 - ③ نقاط A, B, C, D جواب‌های سوالی باشند

۱- در شکل زیر خط‌های d_1 و d_2 با هم موازی‌اند. خط مورب d در چهار حالت این دو خط را قطع کرده است در هر

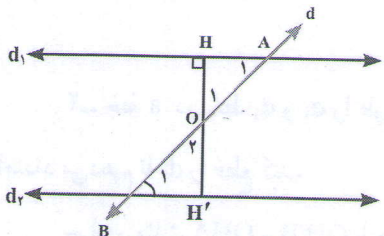


$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

حالت زاویه‌های A_1 و B_1 را اندازه بگیرید. **با اندازه گیری**

۲- در شکل زیر دو خط d_1 و d_2 با هم موازی‌اند و خط d آنها را در A و B قطع کرده است. با پاسخ دادن به سؤال‌های

زیر دلیل بیاورید که چرا $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ از نقطه O بر خط d_1 عمود کردیم و امتداد دادیم تا خط d_2 را قطع کند چرا OH' نیز بر d_2



عمود است؟

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ HH' \perp d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow HH' \perp d_2 \Rightarrow \hat{H}' = 90^\circ$$

می‌دانیم در هر مثلث مجموع زاویه‌ها 180° است. نتیجه‌گیری مقابل را کامل کنید.

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{O}_1 + \hat{H} &= 180^\circ \\ \hat{B}_1 + \hat{O}_2 + \hat{H}' &= 180^\circ \\ \hat{H} &= \hat{H}' = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

این استدلال کاملاً نادرست است

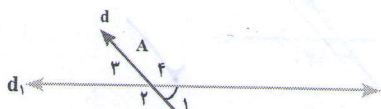
زیرا مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر با 180° را با

متقابل به راس

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

استفاده از این قضیه اثبات می‌کنیم پس این اثبات نادرست می‌باشد

۳- در شکل زیر $d_1 \parallel d_2$ و d آنها را قطع کرده است.



$$\hat{B}_1 = \hat{B}_3 = \hat{A}_1 = \hat{A}_3 \quad \text{چرا}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4$$

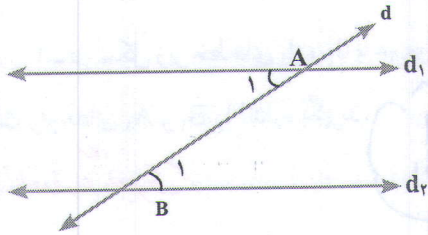
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_3 \text{ متقابل به راس} \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_3 \text{ متقابل به راس} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_3 = \hat{A}_1 = \hat{A}_3$$

$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4 \quad \text{به همین ترتیب داریم}$$

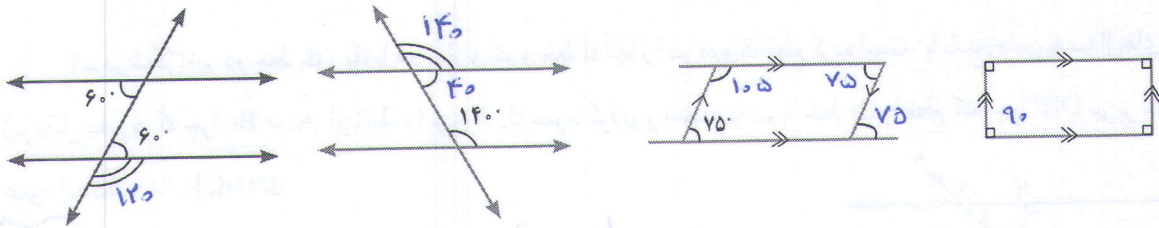
در شکل زیر خطوط موازی و مورب دیده می‌شوند. هنگام حل مسائل به صورت زیر استدلال خود را می‌نویسیم.

$$(d_1 \parallel d_2 \text{ و } d \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1$$



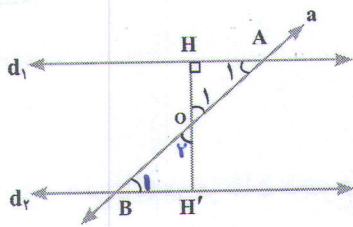
کار در کلاس

۱- با توجه به خطوط موازی و مورب رسم شده اندازه زاویه‌های مشخص شده را در شکل‌های زیر بنویسید.



۲- خط a دو خط d_1 و d_2 را طوری قطع کرده است که $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ است. از نقطه O وسط AB بر d_1 عمود می‌کشیم و

امتداد می‌دهیم تا d_2 را قطع کند.



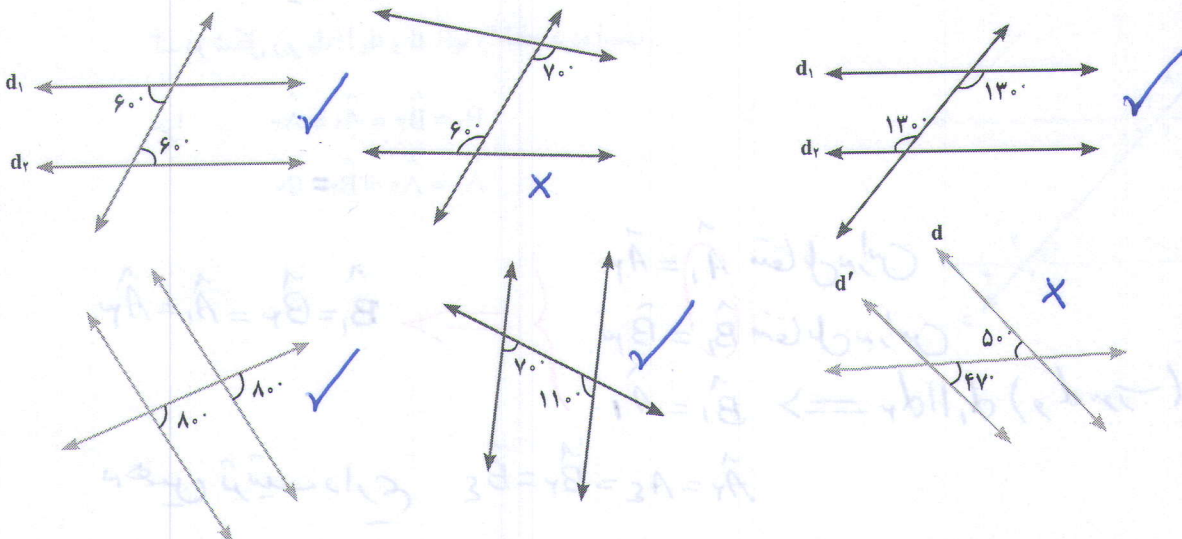
چرا دو مثلث OHA و $OH'B$ با هم برابرند؟ چرا $\hat{H}' = 90^\circ$ ؟

اگر HH' بر دو خط d_1 و d_2 عمود باشند، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل براس} \\ \text{فرض } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \text{فرض } OA = OB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ازض ز}} \triangle OAH = \triangle OBH' \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} HH' \perp d_1 \\ HH' \perp d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

۳- در کدام یک از شکل‌های زیر خط‌ها موازی‌اند؟



$$\left. \begin{aligned} A_1 + \hat{A}_r + \hat{A}_p &= 180 \\ (d \parallel BC, AB \text{ بر } d) &\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B} \\ (d \parallel BC, AC \text{ بر } d) &\Rightarrow \hat{A}_p = \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180$$

MATH-HOME.IR

۱- دو خط با زاویه‌های برابر خط d را قطع می‌کنند. آیا همیشه این دو خط با هم موازی می‌شوند؟ چرا؟

بله $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

۲- با توجه به شکل زیر استدلال کنید که مجموع زاویه‌های یک مثلث 180° است. (خط d موازی BC است.)

$A_1 + A_2 + A_3 = 180$

۳- با توجه به شکل مقابل توضیح دهید چرا $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$ ؟

نتیجه هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش است

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 &= 180 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_1$$

زاویه خارجی

۴- با توجه به شکل زیر خطوط d_1, d_2, d_3 موازی اند و خط d آنها را قطع کرده است. زاویه‌های مساوی را در شکل نشان دهید و نام ببرید.

۵- در شکل زیر دو خط d_1, d_2 با هم موازی اند خطوط AB و AC نیمساز دو زاویه اند. زاویه A چند درجه است؟

$$\left. \begin{aligned} d_1 \parallel d_2 &\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 \\ \hat{B}_1 + \hat{C}_1 &= 90 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90 \\ \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{A} &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = 90$$

۶- مجموع زاویه‌های یک ۵ ضلعی چند درجه است؟
 ۷- مجموع زاویه‌های یک ۷ ضلعی چند درجه است؟

۸- چهارضلعی مقابل متوازی الاضلاع است.

$$\left. \begin{aligned} (AD \parallel BC) &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} \\ (AB \parallel DC) &\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180$$

چرا $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ ؟
 چرا \hat{D} و \hat{C} مکمل هستند؟ بهمان حالت $\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{D} = 180$

۹- نیمساز زاویه A را رسم کنید (AD) . از نقطه D به موازات ضلع AB رسم کنید تا AC را در E قطع کند (DE) .

چرا مثلث ABE متساوی الساقین است؟

$$(AB \parallel DE, AD \text{ بر } d) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$$

فرض $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1$

$\hat{A}_2 = \hat{D}_1 \Rightarrow AE = DE$

می‌دانیم اگر دو زاویه بی‌مثلث برابر باشند، مثلث متساوی الساقین است

اصلاح سو

۱۰ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آن را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

عمود منصف □ ارتفاع □ نیمساز □ میانه □ مقیاس □ اصل □

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

خاصیت مثلث متساوی الساقین □ خاصیت عمود منصف □

ویژگی اجزای یک مثلث □

توجیه و استدلال کردن برای روش‌های ترسیم‌های هندسی □

مقیاس نقشه □

اصل‌های متوازی □

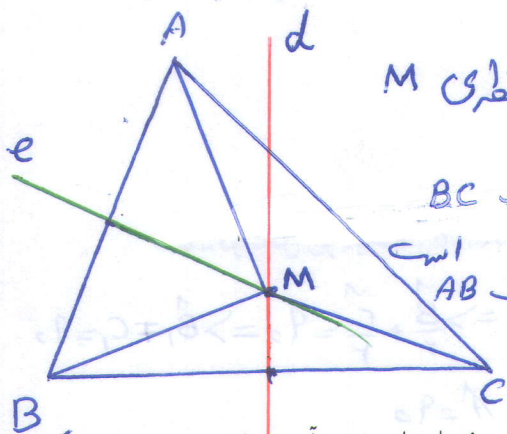
رسم دو خط موازی □

رسم دو خط موازی از نقطه داده شده □

قضیه موازی و مورب □

عکس قضیه موازی و مورب □

عمود منصف‌های AB و BC هم‌بزرگ در نقطه M



قطع می‌کنند
 M روی عمود منصف $BC \Rightarrow MB = MC$
 M روی عمود منصف $AB \Rightarrow MB = MA$
 $\Rightarrow MA = MC$

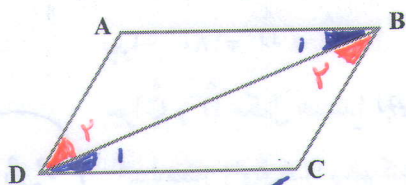
پس M روی عمود منصف AC قرار دارد

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن باشید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- چرا ۳ عمود منصف یک مثلث در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند؟ پس سه عمود منصف در یک نقطه تلاقی می‌کنند

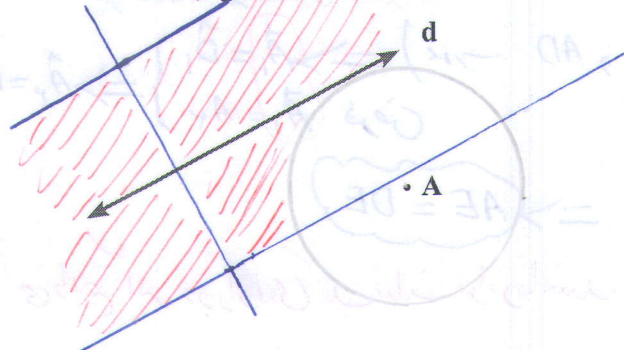
۲- شکل زیر متوازی الاضلاع است (فقط می‌دانیم چه ضلع‌های موازی یکدیگرند) چرا دو مثلث ABD و BCD با



$(AB \parallel DC, BD \text{ مشترک}) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$
 $(AD \parallel BC, BD \text{ مشترک}) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$
 $BD = BD$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$ (هم برابری از ز)

$\Rightarrow AB = DC$
 $AD = BC$

۳- مجموعه‌ای از نقاط را پیدا کنید که از خط d به فاصله کمتر از ۲ سانتی‌متر و از نقطه A به فاصله بیشتر از ۱/۵

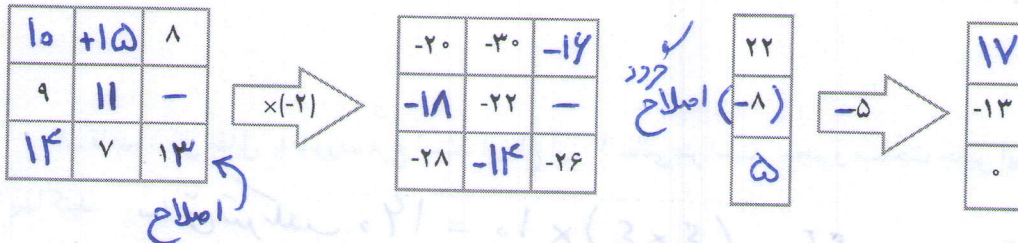


سانتی‌متر باشند.

MATH-HOME.IR

۵ تمرین های دوره ای

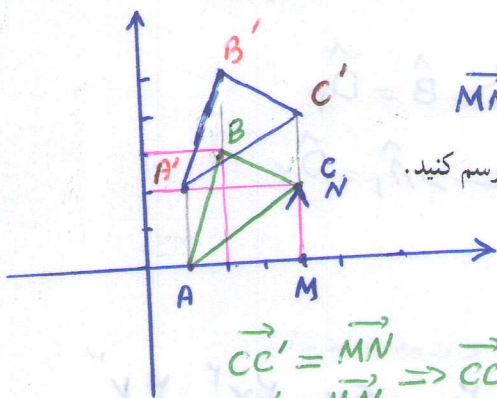
۱- نمودارها را کامل کنید.



۲- از عددی ۲ بار جذر گرفتیم. حاصل آن عدد آن عدد ۴ شد. عدد مورد نظر را پیدا کنید.
 $۲۵۶ \xrightarrow{\text{جذور}} ۱۶ \xrightarrow{\text{جذور}} ۴$

۳- علی یک جعبه مکعب شکل را با کاغذ رنگی به طور کامل پوشاند (کاغذها روی هم قرار نگرفتند) اگر ۶۶۰

سانتی متر مربع کاغذ مصرف شده باشد. اندازه ضلع مکعب چقدر است؟
 $S = 6a^2 = 660 \Rightarrow a^2 = 110 \Rightarrow a = \sqrt{110}$ و $a = -\sqrt{110}$



۴- نقطه M به مختصات $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و نقطه N به مختصات $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

(۱) بردار MN را مشخص کنید و مختصات آن را بنویسید.

(۲) مثلث ABC را به مختصات $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ در صفحه رسم کنید.

(۳) مثلث ABC را با بردار MN انتقال دهید تا مثلث A'B'C' به دست آید.

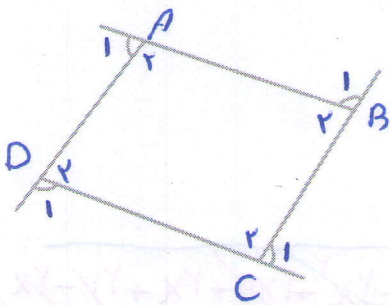
(۴) آیا اضلاع این دو مثلث با هم برابرند؟ چرا؟ *بله*
 $\vec{CC'} = \vec{MN} \Rightarrow \vec{CC'} = \vec{MN}$
 $\vec{AA'} = \vec{MN}$

(۵) آیا اضلاع این دو مثلث با هم موازی اند؟ چرا؟ *بله*
 $\Rightarrow CC' \parallel MN \Rightarrow$ موازی اضلاع AA'C'C است

(۶) آیا مساحت این دو مثلث با هم برابرند؟ چرا؟ *بله*

$$\left. \begin{matrix} AC = A'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

۵- در شکل مقابل مجموع زاویه های مشخص را پیدا کنید. $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'B'C'}$



$$(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) + (C_1 + C_2) + (D_1 + D_2) = 4 \times 180 = 720$$

$$\Rightarrow (A_1 + B_1 + C_1 + D_1) + (A_2 + B_2 + C_2 + D_2) = 720$$

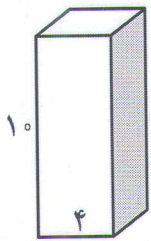
$$\Rightarrow A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 360$$

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	...	n
مجموع زوایاها	۱۸۰	۳۶۰	۵۴۰		
رابطه	1×180	2×180	3×180		$(n-2) \times 180$

۶- مجموع زاویه‌های یک n ضلعی را به دست آورید و با یک عبارت جبری نشان دهید. در حل این مسئله از چه راهبردی استفاده کردید؟ **آلوسازی، آلوریایی**

$$(n-2) \times 180$$

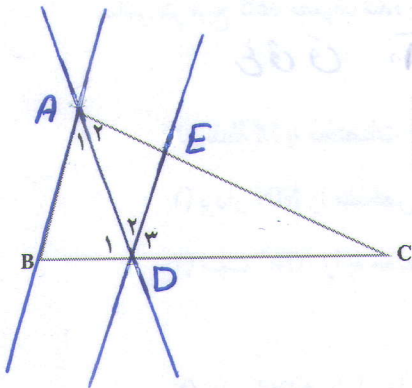
۷- قاعده شکل مقابل به صورت مربع است. ارتفاع آن 10° سانتی متر است. حجم و مساحت جانبی این شکل را پیدا کنید.



صانعی مترمربع $V = (4 \times 4) \times 10 = 160$

صانعی مترمربع $S' = (4 \times 4) \times 10 = 160$

۸- در شکل مقابل DE موازی AB است. کدام زاویه‌ها با هم برابرند؟



$$(AB \parallel DE, BD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_3$$

$$(AB \parallel DE, AD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_2$$

۹- عبارت جبری زیر را ساده کنید، سپس مقدار آن را به ازای $x=2$ و $y=-2$ پیدا کنید.

اصلاح عبارات

$$-2(x-y-1) + 2(1-x+2y) + 2x^2 - 4y^2 = -2x + 2y + 2 + 2 - 2x + 4y + 2x^2 - 4y^2$$

$$= -4x + 6y + 2x^2 - 4y^2 + 4$$

$$= -4 \times 2 + 6 \times (-2) + 2 \times 2^2 - 4 \times (-2)^2 + 4$$

$$= -8 + (-12) + 8 - 16 + 4 = -24$$

$$-2x(x-y-1) + 2y(1-x+2y) + 2x^2 - 4y^2 = -2x^2 + 2xy + 2x + 2y - 2xy + 2y^2 + 2x^2 - 4y^2$$

$$+ 4y^2 + 2x^2 - 4y^2 = 2x + 2y = 4 - 4 = 0$$

۱۰- عبارت‌های توان‌دار را تا حد امکان ساده کنید.

$$2^3 \times 5^2 \times 10^5 \times 50^2 = 10^8 \times 5^2$$

$$(1/5)^2 \times (-\frac{3}{4})^2 \times (1/\frac{1}{4})^{10} = 1,5^{17}$$

$$(-2)^4 \times 2^5 = 2^4 \times 2^5 = 2^9$$

$$-8^2 \times 8^2 \times 8 = -(8^2 \times 8^2 \times 8) = -8^5$$

(پ، ر، ر)، (ر، ر، ر)
(پ، پ، پ)، (ر، پ، پ)

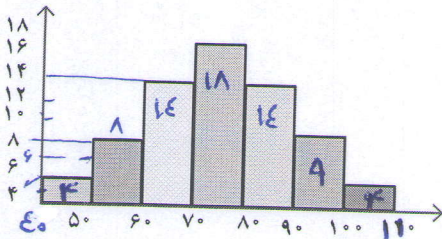
۱۱- احتمال اینکه اگر دو سکه را بن‌دازیم و هر دو رو بیاید، چقدر است؟

$$\frac{1}{4}$$

۱۲- احتمال اینکه یک تاس ۱۲ وجهی را که عددهای ۱ تا ۱۲ روی آن نوشته شده، بیندازیم و مضرب ۵ بیاید، چقدر است؟

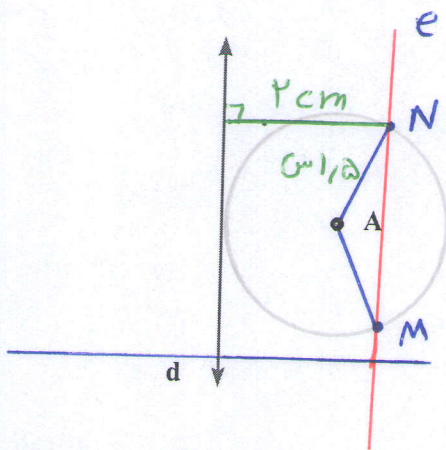
$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۱۳- با توجه به نمودار زیر جدول فراوانی را رسم کرده و میانگین داده‌ها را پیدا کنید.



دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	متوسط × فراوانی
$40 \leq x < 50$	۴	۴۵	4×45
$50 \leq x < 60$	۸	۵۵	8×55
$60 \leq x < 70$	۱۴	۶۵	14×65

۱۴- مجموعه نقاطی را پیدا کنید که فاصله آن از خط d ۲ سانتی‌متر و از نقطه A به اندازه $1/5$ سانتی‌متر باشد.



این مسئله در حالت‌های مختلف چند جواب دارد؟

در چه صورت جواب ندارد؟

بیشترین تعداد نقطه با این شرایط چند تا است؟

- ۱) خط e دایره را در دو نقطه قطع کند (دو جواب)
- ۲) خط e دایره را در یک نقطه قطع کند (یک جواب)
- ۳) خط e دایره را قطع نکند (جواب ندارد)

$$\bar{x} = \frac{(4 \times 45) + (8 \times 55) + (14 \times 65) + (18 \times 75) + (14 \times 85) + (9 \times 95) + (4 \times 105)}{(4 + 8 + 14 + 18 + 14 + 9 + 4)}$$

۱۴۹

$$\bar{x} = \frac{5345}{71} \approx 75,28$$