به‌نام خدا

تمرین عید ۹۵ جبر:

۱. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d ثابت کنید

$$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}{abcd} \geq 64$$

۲. با فرض مثبت بودن اعداد حقیقی a, b, c ، مقدار کمینه عبارت زیر را بیابید

$$\frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{a+c} + \frac{5c}{a+b}$$

۳.برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, x, y, z می‌دانیم $ax + by + cz = xyz$. ثابت کنید

$$x + y + z \geq \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$$

۴. برای اعداد حقیقی a, b, c, d می‌دانیم $ad - bc = 1$. ثابت کنید

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}$$

۵. a, b, c اعداد حقیقی مثبتند و داریم $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 11$ مقدار کمینه عبارت زیر را بیابید

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

۶. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c با شرط $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ثابت کنید

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq 3$$

۷. فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی و نامنفی باشند بطوری که $a + b + c = 3$ ثابت کنید

$$\frac{5 - 3bc}{1+a} + \frac{5 - 3ac}{1+b} + \frac{5 - 3ab}{1+c} \geq ab + ac + bc$$

۸. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c نشان دهید

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ac + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}} \geq 2$$

۹. برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)} \geq \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

۱۰. تمام توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید بطوری که برای هر x, y حقیقی داشته باشیم

$$f(f(x)+y) = f(x+y) + xf(y) - xy - x + 1$$

۱۱. تمام توابع $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را بیابید بطوری به ازای تمام اعداد گویای x, y داشته باشیم

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

۱۲. تمام $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را بیابید بطوری که به ازای هر m, n صحیح داشته باشیم

$$f(n+m^2) = f(n^2+m)$$

۱۳. تمام توابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و صعودی اکید را بیابید بطوری که برای تمام m, n طبیعی داشته باشیم

$$f\big(mf(n)\big) = nf(2m)$$

۱۴. تمام توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید بطوری که داشته باشیم

اولا $f(1) = 1$

دوما به ازای تمام x, y های حقیقی داریم $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$

سوما به ازای تمام اعداد حقیقی و ناصفر x داریم $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$

۱۵. تمام توابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ بیابید بطوری که داشته باشیم

$$f^{(19)}(n) + 97f(n) = 98n + 232$$

که در آن $f^{(k)}(n) = f\big(f(\dots f(n)\dots)\big)$ که در آن، تابع k بار با خود ترکیب شده است.

۱۶. آیا تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای تمام اعداد طبیعی m, n داشته باشیم

$$f\big(mf(n)\big) = n + f(2015m)$$

۱۷. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید بطوری که برای هر x,y,z حقیقی داشته باشیم

$$f(x+x^2+z^3)=f(x)+f(y)^2+f(z)^3$$

۱۸. تمام توابع $f:\mathbb{Q}^+\longrightarrow\mathbb{Q}^+$ را بیابید بطوری که به ازای تمام اعداد گویا و مثبت x,y داریم

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)}$$

۱۹. مجموع تمام اعداد طبیعی $1\le k\le 99$ را بیابید بطوری که اعداد طبیعی a,b وجود داشته باشند بطوری که برای تمام اعداد حقیقی x داشته باشیم

$$x^{100}-ax^k+b=(x^2-2x+1)P(x)$$

که در آن $P(x)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد.

۲۰. تمام چندجمله‌ای های $P(x)\in\mathbb{R}[X]$ را بیابید بطوری که به ازای هر عدد حقیقی و مثبت x داشته باشیم

$$P(x)-10=\sqrt{P(x^2+3)-13}$$

و همچنین داشته باشیم $P(2015)=2025$

۲۱. ثابت کنید اگر برای چندجمله‌ای $P(x)\in\mathbb{C}[X]$ داشته باشیم

$$\forall z\in\mathbb{C},\ |z|=1\ \Rightarrow P(z)\in\mathbb{R}$$

ثابت کنید چندجمله‌ای $P(x)$ ثابت است.

۲۲. کمترین مقدار طبیعی n را بیابید بطوری که چندجمله‌ای $P(x)\in\mathbb{R}[X]$ به فرم زیر وجود داشته باشد

$$P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

که اولا به ازای هر $i\in\{1,2,\dots,2n-1,2n\}$ داشته باشیم $2014\le a_i\le 2015$

و ثانیا عدد حقیقی مانند α وجود داشته باشد بطوری که $P(\alpha)=0$

۲۳. تمام چندجمله‌ای های $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ را بیابید بطوری که برای تمام سه‌تایی های حقیقی مانند a, b, c با شرط $ab + ac + bc = 0$ داشته باشیم

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

۲۴. دستگاه زیر را در اعداد حقیقی و نامنفی حل کنید

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 5 \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 - \min(x, y, z) = 6 \end{cases}$$

موفق باشید

سال نو مبارک

محمد احمدی