فصل ۶ – بخش ۳ و ۴

تغییر شکل خمشی، کرنش و تنش در تیرها

۶-۲: تغییر شکل خمشی و کرنش

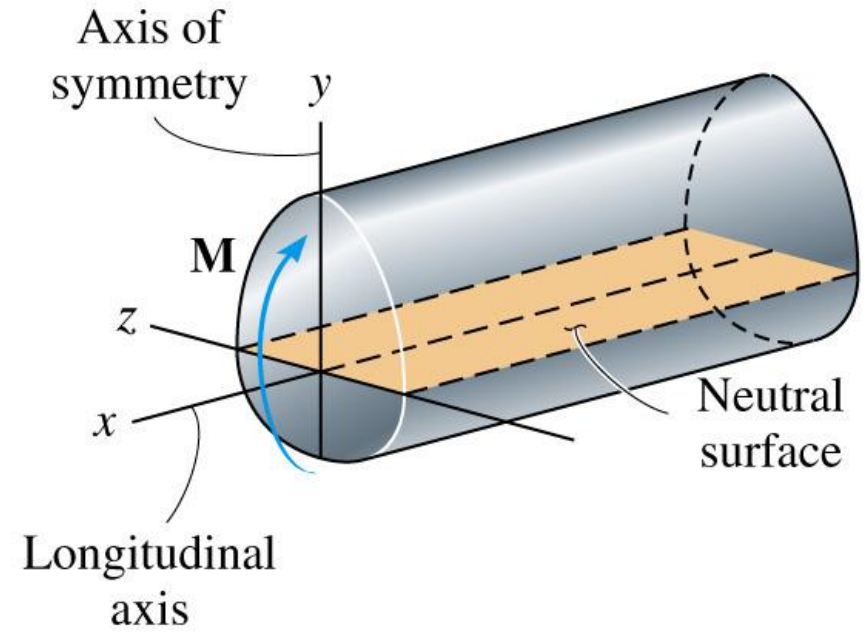
نکات کلیدی:

۱) ممان خمشی باعث تغییر شکل در تیر می شود.

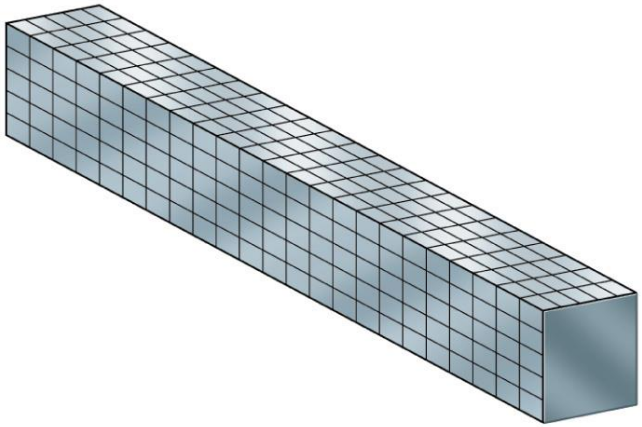
۲) X محور طولی است

۳) Y محور تقارن است.

۴) صفحه خنثی- طول این صفحه بعد از اعمال بار تغییر نمیکند.



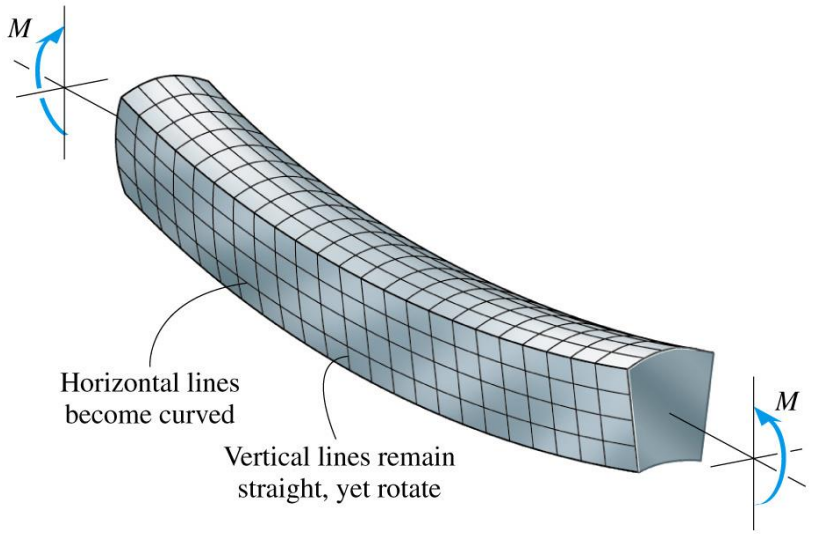
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Before deformation

(a)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



After deformation

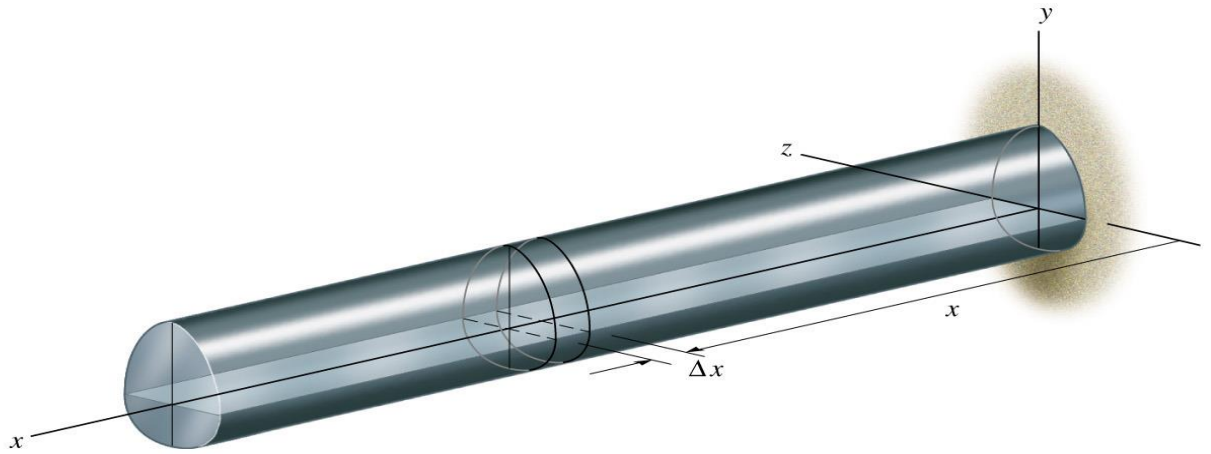
(b)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

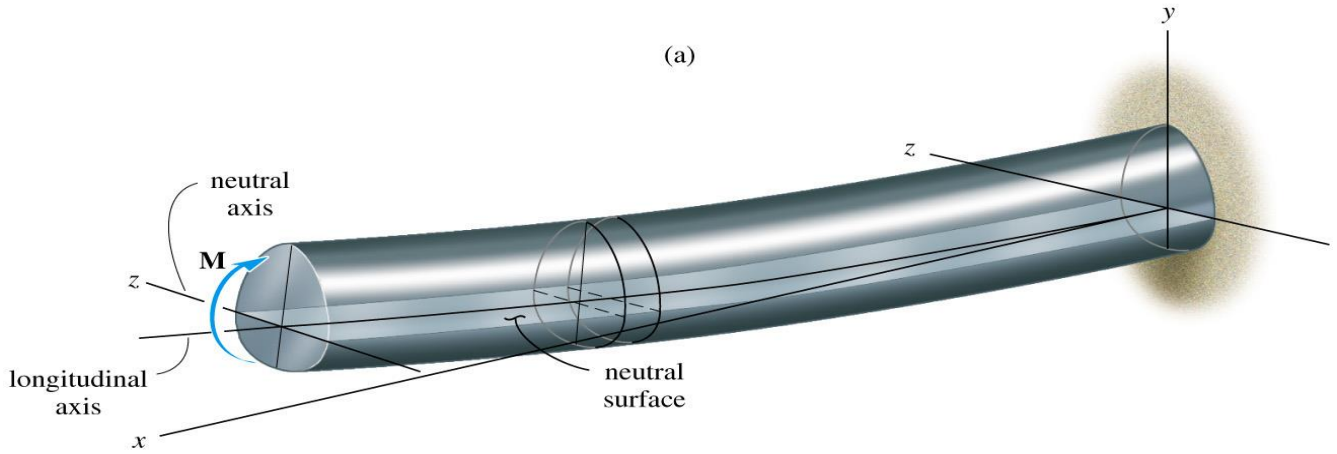
نکات کلیدی:

۱) ممان خمشی داخلی باعث تغییر شکل تیر میشود.

۲) برای حالت نشان داده شده در شکل، لایه های بالایی تحت فشار و لایه های پایینی تحت کشش قرار دارند.



(a)



(b)

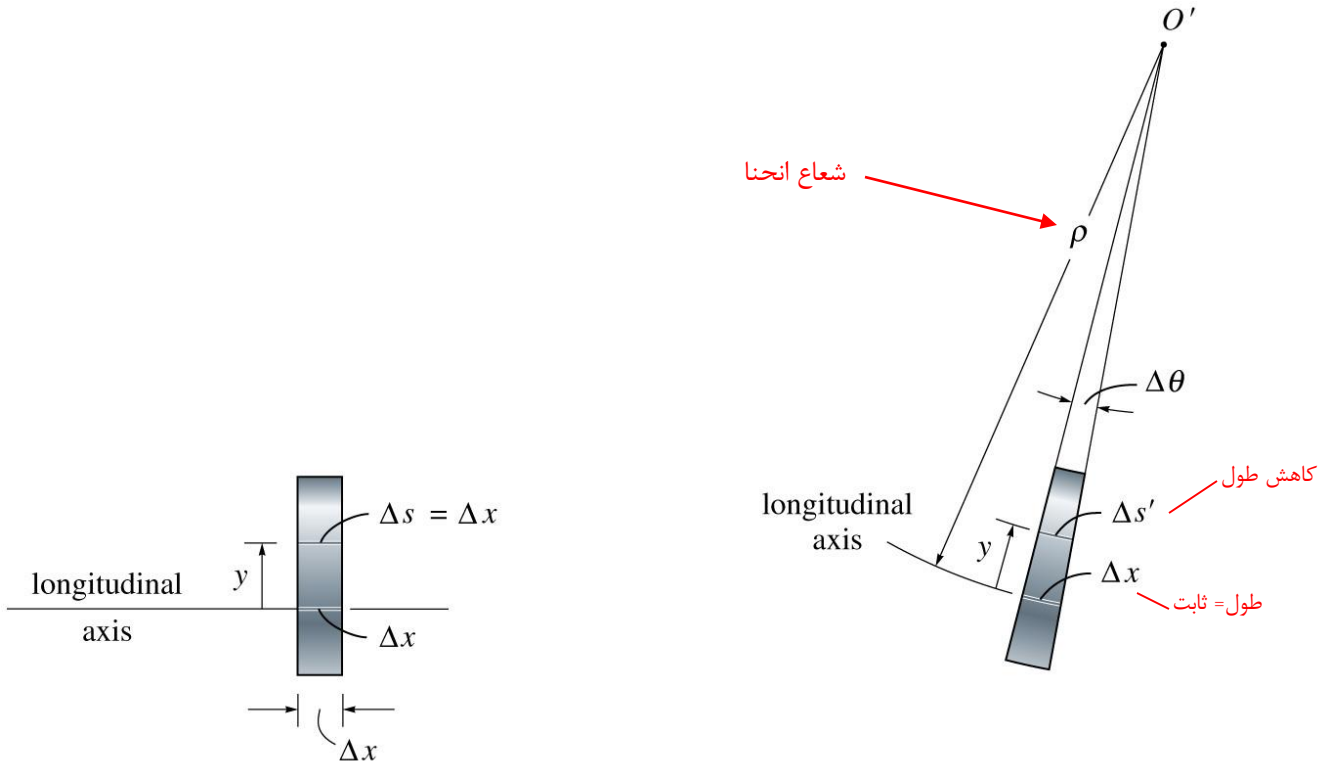
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

نکات کلیدی:

۱) صفحه خنثی- طول آن ثابت است.

۲) همه مقاطع عرضی پس از اعمال بار هم به صورت یک صفحه عمود بر محور طولی باقی می مانند.

۳) از تغییر شکل سطح مقطع جانبی در صفحه خودش چشم پوشی می کنیم.



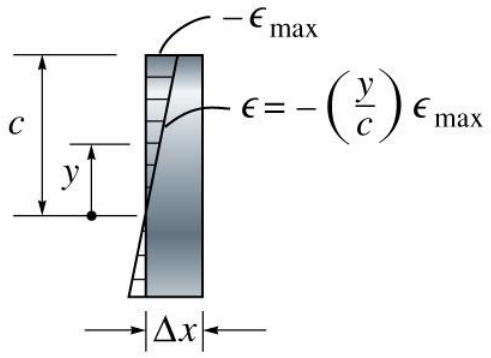
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$

این رابطه می گوید که کرنش نرمال خطی است.

بیشترین کرنش نرمال روی سطح خارجی اتفاق می افتد. یعنی جایی که y = c است.



Normal strain distribution

$$\varepsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\varepsilon_{max}$$

۶-۲: تنش خمشی – فرمول خمش

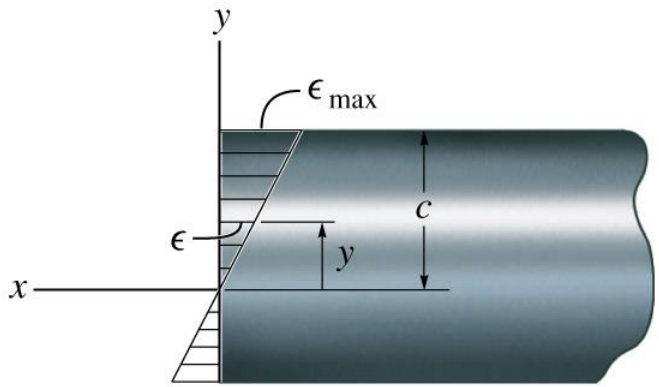
تنش خمشی چگونه تغییر می کند؟؟؟؟؟

یادآوری از بخش ۶-۱:

$$\varepsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\varepsilon_{\max}$$

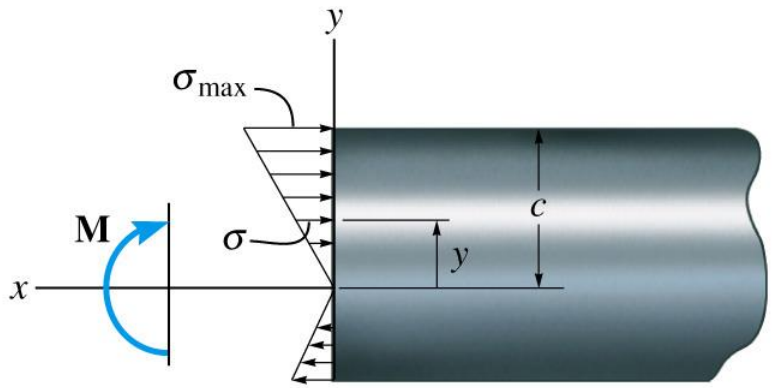
درنتیجه برای تنش خواهیم داشت:

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\max}$$



Normal strain variation
(profile view)

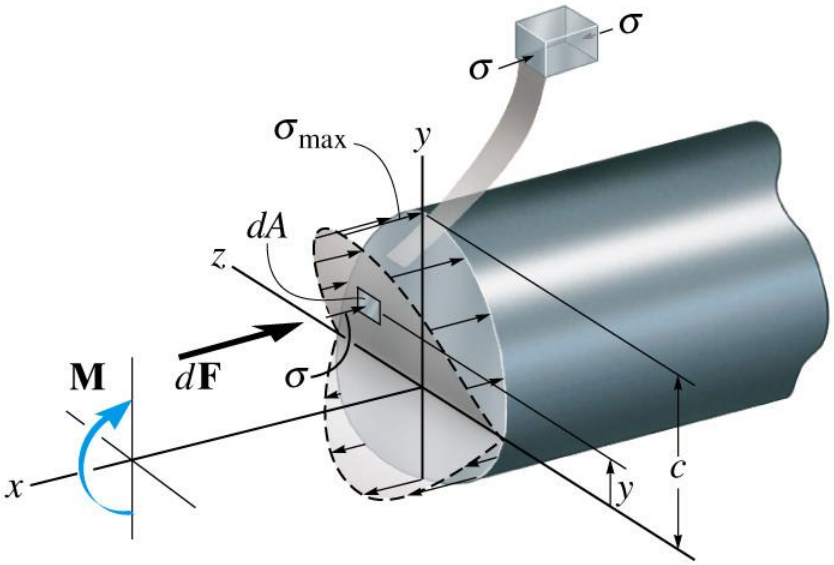
(a)



Bending stress variation
(profile view)

(b)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Bending stress variation

(c)

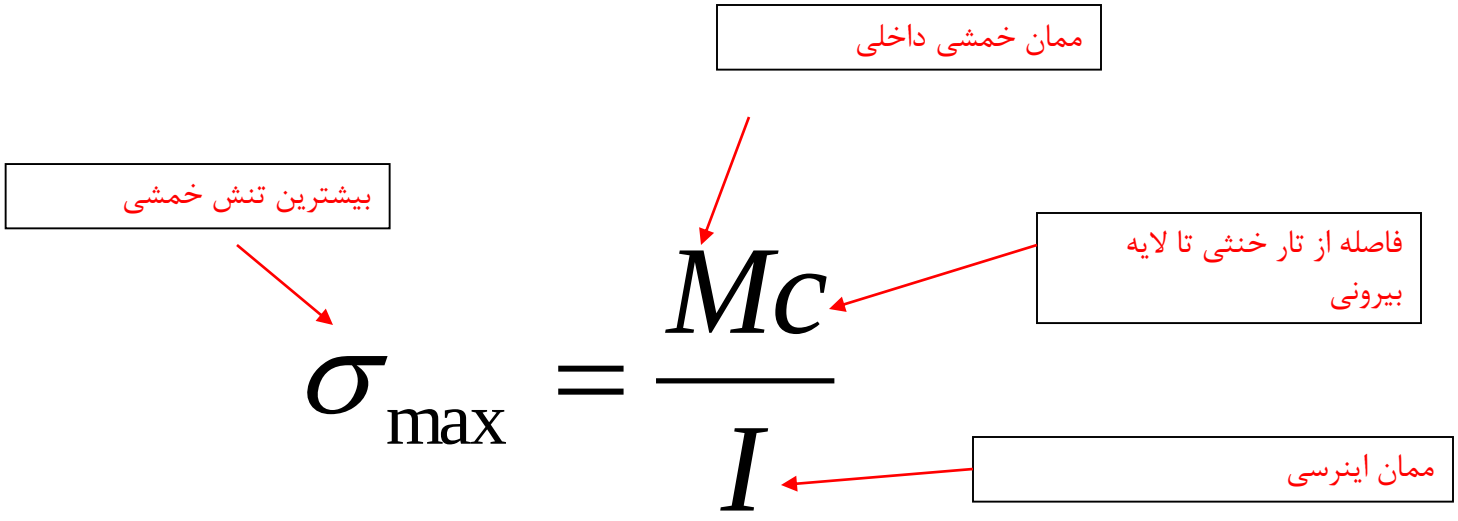
برآیند ممان ها حول تار خنثی مقطع برش:

$$M = \int_A y dF = \int_A y(\sigma dA) = \int_A y\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\max} dA$$

$$M = \frac{\sigma_{\max}}{c}\int_A y^2 dA$$

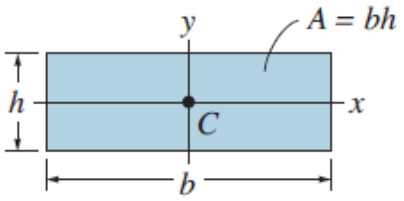
این ترم ممان اینرسی است.

فرمول خمش



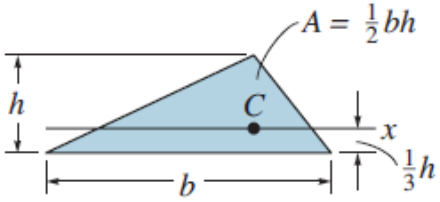
Or in general: $\sigma = \frac{My}{I}$

جدول استخراج ممان اینرسی



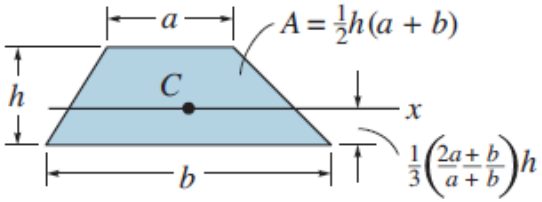
Rectangular area

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{12} hb^3$$

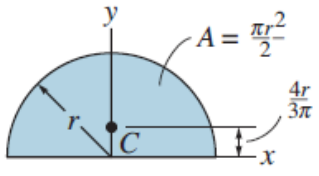


Triangular area

$$I_x = \frac{1}{36} bh^3$$

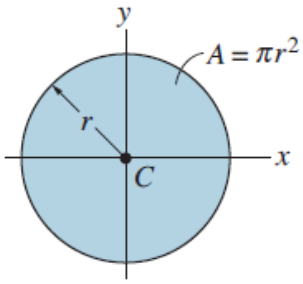


Trapezoidal area



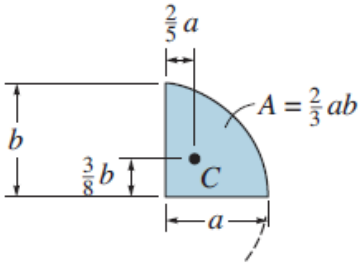
Semicircular area

$$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$$
$$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$$



Circular area

$$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$$
$$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$

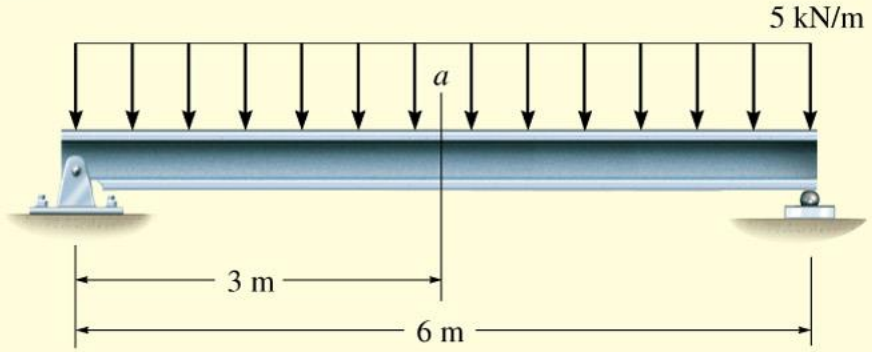


مثال ها

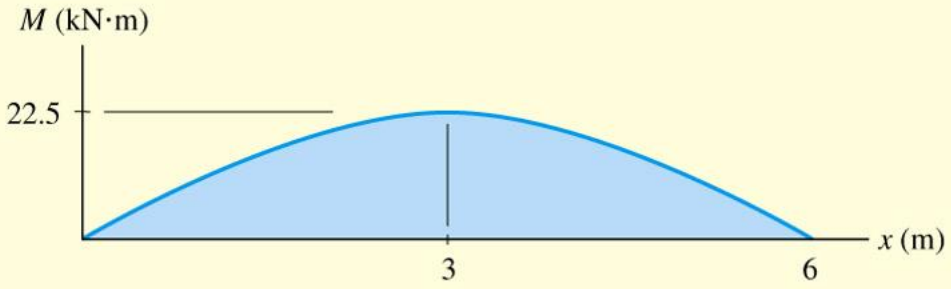
- بیشترین ممان را بیابید.
- خصوصیات سطح (I و c) را پیدا کنید.
- تنش را محاسبه کنید.

EXAMPLE 6.15

The simply supported beam in Fig. 6–28*a* has the cross-sectional area shown in Fig. 6–28*b*. Determine the absolute maximum bending stress in the beam and draw the stress distribution over the cross section at this location.



(a)



(c)

Fig. 6–28

بیشترین تنش خمشی کجاست؟؟؟؟؟؟؟؟؟

پاسخ:

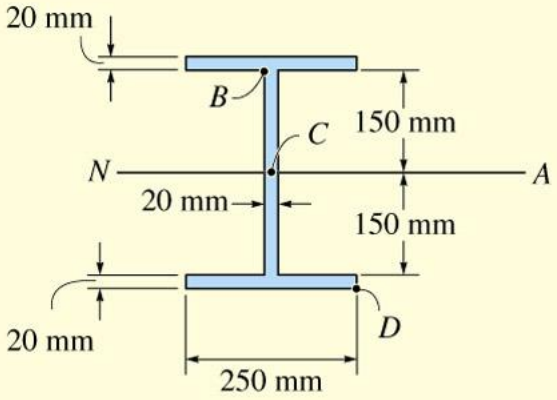
- روی سطح (لایه) بیرونی که همان دورترین فاصله از تار خنثی است.
- در فاصله X در امتداد طولی جایی که ممان ماکزیمم است.

Solution

Maximum Internal Moment. The maximum internal moment in the beam, $M = 22.5\ \text{kN} \cdot \text{m}$, occurs at the center as shown on the bending moment diagram, Fig. 6–28*c*. See Example 6.3.

Section Property. By reasons of symmetry, the centroid C and thus the neutral axis pass through the midheight of the beam, Fig. 6–28*b*. The area is subdivided into the three parts shown, and the moment of inertia of each part is computed about the neutral axis using the parallel-axis theorem. (See Eq. A–5 of Appendix A.) Choosing to work in meters, we have

$$\begin{aligned} I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\ &= 2\left[\frac{1}{12}(0.25\ \text{m})(0.020\ \text{m})^3 + (0.25\ \text{m})(0.020\ \text{m})(0.160\ \text{m})^2\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}(0.020\ \text{m})(0.300\ \text{m})^3\right] \\ &= 301.3(10^{-6})\ \text{m}^4 \end{aligned}$$



(b)

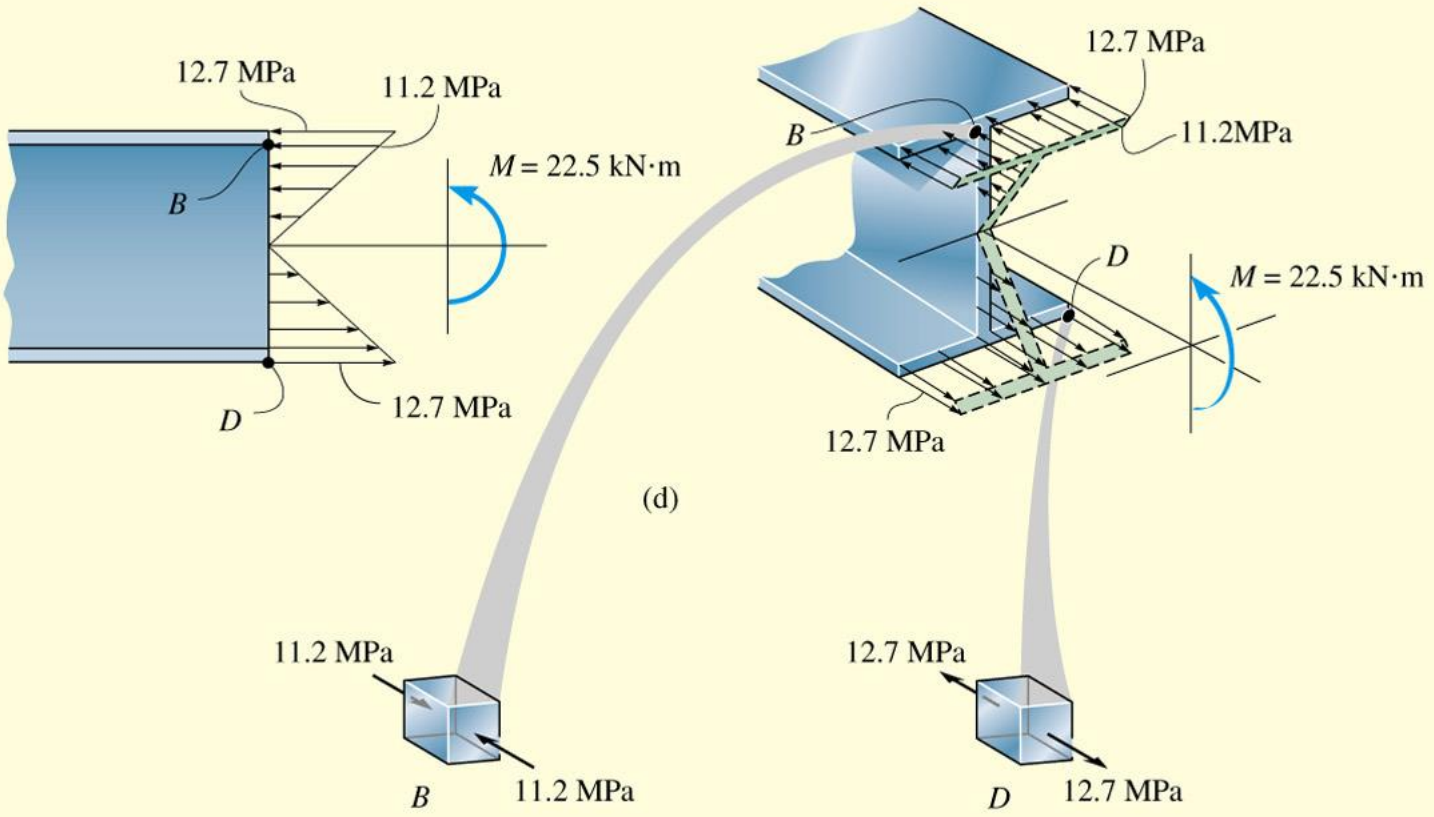
Bending Stress. Applying the flexure formula, with $c = 170\text{ mm}$, the absolute maximum bending stress is

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{\max} = \frac{22.5\text{ kN}\cdot\text{m}(0.170\text{ m})}{301.3(10^{-6})\text{ m}^4} = 12.7\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

Two-and-three-dimensional views of the stress distribution are shown in Fig. 6–28*d*. Notice how the stress at each point on the cross section develops a force that contributes a moment $d\mathbf{M}$ about the neutral axis such that it has the same direction as $\mathbf{M}$. Specifically, at point B, $y_B = 150\text{ mm}$, and so

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = \frac{22.5\text{ kN}\cdot\text{m}(0.150\text{ m})}{301.3(10^{-6})\text{ m}^4} = 11.2\text{ MPa}$$

The normal stress acting on elements of material located at points B and D is shown in Fig. 6–28*e*.

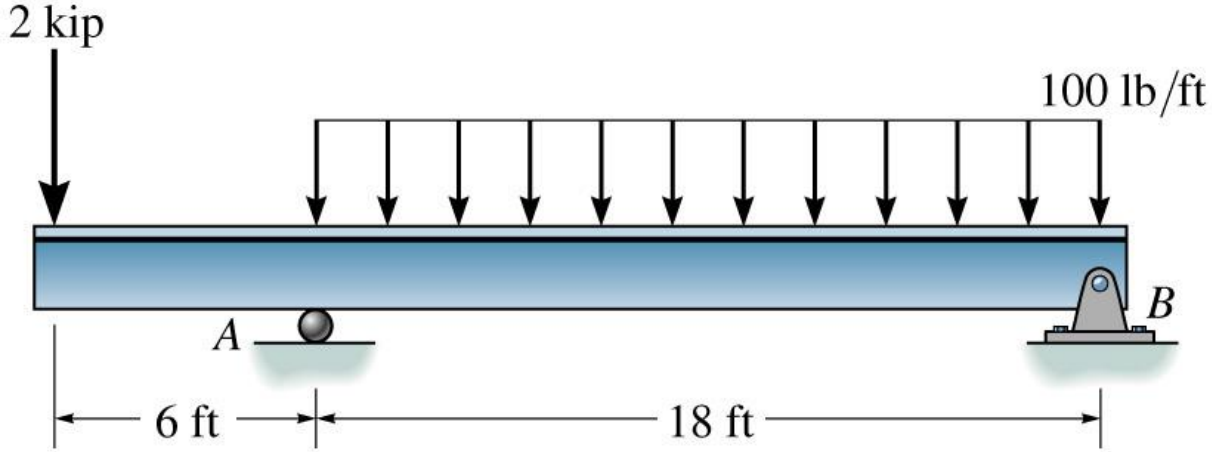

12.7 MPa
11.2 MPa
B
M = 22.5 kN·m
D
12.7 MPa
(d)
11.2 MPa
B
11.2 MPa
12.7 MPa
B
11.2MPa
D
M = 22.5 kN·m
12.7 MPa
12.7 MPa
D
12.7 MPa
(e)

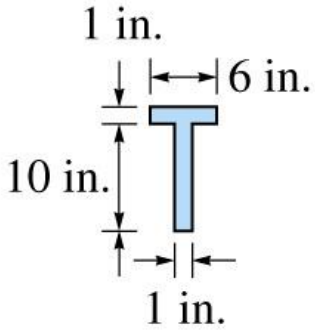
تمرین: تیر T شکل در معرض بارگذاری زیر قرار گرفته است

۱) دیاگرام نیروی برشی و ممان خمشی را ترسیم کنید. موقعیت و مقدار Mmax را تعیین کنید

۲) موقعیت و مقدار تنش خمشی ماکزیمم را محاسبه کرده و پروفیل تنش را ترسیم کنید. اگر تیر از جنس آلومنیم با استحکام تسلیم $\sigma_y = 15$ ksi ساخته شود آیا این تیر ایمن است؟

۳) بیشترین مقدار ممان داخلی تیر را به گونه ای بیابید که $\sigma_{allow} = 2$ ksi باشد.





Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.