بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب معلم
(راهنمای تدریس)

ریاضی

پایۀ نهم

دورۀ اوّل متوسطه

۱۳۹۴

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	**کتاب معلم ریاضی نهم دورهٔ اوّل متوسطه ــ ۸۹**
پدیدآورنده:	**سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی**
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	**دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری**
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	**حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا،اکرم قابل‌رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی) حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، خسرو داودی، کبری دلشاد، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف)**
مدیریت آماده‌سازی هنری:	**ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**
شناسه افزوده آماده‌سازی:	**لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ــ مهدی کریم‌خانی (طراح گرافیک، طراح جلد) ــ مریم نصرتی (صفحه‌آرا) ــ کبری اجابتی، مرضیه اخلاقی، رعنا فرج‌زاده‌دروئی،فرشته ارجمند، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی، احمدرضا امینی (امور آماده‌سازی)**
نشانی سازمان:	**تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)** **تلفن: ۹ــ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹** **وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir**
ناشر:	**شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ــ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ــ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ــ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ــ۳۷۵۱۵**
چاپخانه:	**شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**
سال انتشار و نوبت چاپ:	**چاپ اوّل ۱۳۹۴**

شابک ۸-۲۴۵۵-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ **ISBN 978 -964 - 05 - 2455 - 8**

- انسان عصاره همه موجودات عالم است.
- با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
- اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.

امام‌خمینی(ره)

فهرست

سخنی با معلّم

کتاب ریاضی پایهٔ نهم بر مبنای برنامهٔ درسی ملی و در ادامهٔ تغییر کتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دورهٔ اوّل متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در رویکرد جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوهٔ تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع، مشکلات و دشواری‌های فراوانی روبه‌روست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدّنظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعهٔ آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این جهت به عهدهٔ معلّم است. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلّمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که برای ادای وظیفه نسبت به آموزش معلّمان، ضمن اطلاع‌رسانی به موقع دربارهٔ تألیف، کتاب راهنمای معلّم و نیز فیلم‌های آموزشی را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب درسی از سه بخش فعالیت، کار درکلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه در انجام یک فعالیت به‌طور عمده مدّنظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاوت دربارهٔ یک راه حل و مقایسهٔ راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلّم انجام می‌پذیرد و هرجا که لازم باشد، راهنمایی توسط معلّم ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صدالبته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند. معلّم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائهٔ توضیحاتی بیشتر و تغییراتی فعالیت را ساده‌تر نماید.

هنگام انجام فعالیت، هدایتِ گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائهٔ دیدگاه‌ها و دفاع از ایده‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهدهٔ معلّم است. به‌طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حلّ تمرین به‌عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ امّا ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

دربارهٔ ضرورت آموزش راهبردهای حل مسئله در بین پژوهشگران وآموزشگران تقریباً اتفاق‌نظر وجود دارد. با این حال دربارهٔ چگونگی این کار نظرات متفاوتی هست. در این کتاب آموزش راهبردها از متن درس جدا نشده است. ضمناً اصراری بر ذکر عناوین راهبردها جز موارد مشخص و آشنا نبوده است. بنابراین سعی شده است که از عبارات و واژه‌های نامأنوس اجتناب شود. با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرآیند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این اساساً آموزش راهبردها معمولاً به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی‌تر باشد. ارائهٔ راه‌حل‌ها و روش‌های مختلف برای یک مسئله نیز به صورت هدفمند دنبال شده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان هنگام روبه‌رو شدن با یک مسئله ـ به ویژه وقتی که الگوریتمی مشخص برای حل آن فرانگرفته باشند ـ به روش‌های متفاوتی عمل می‌کنند.

پس از آماده شدن نسخهٔ اولیهٔ کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. علاوه بر این نظرات اعتباربخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مدّنظر قرار گرفت. لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از تمام همکارانی که نسخهٔ اولیهٔ کتاب را مطالعه کرده‌اند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، اعلام کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نویدبخش حضور و مشارکت مؤثرتر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. لازم به ذکر است مشاورانی علمی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی محدود از کتاب را مطالعه و مورد نقد قرار دادند که جا دارد از آنها قدردانی شود. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق سایت واحد[1] دارد. به‌علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق سایت واحد قابل دریافت است. همچنین فیلم‌های روش تدریس فصل‌های مختلف کتاب که توسط مؤلفین ارائه شده و در قالب یک لوح فشرده تحت عنوان «برفراز آسمان» تهیه گردیده و در اختیار معلمین محترم قرار گرفته است. این فیلم‌ها از طریق سایت واحد ریاضی نیز قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال، تنها با تلاش، اراده و همت معلّمان عزیز می‌توان به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار بود.

۱ـ www.mathrde.ir

معلمان محترم و صاحب‌نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران-صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵- گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

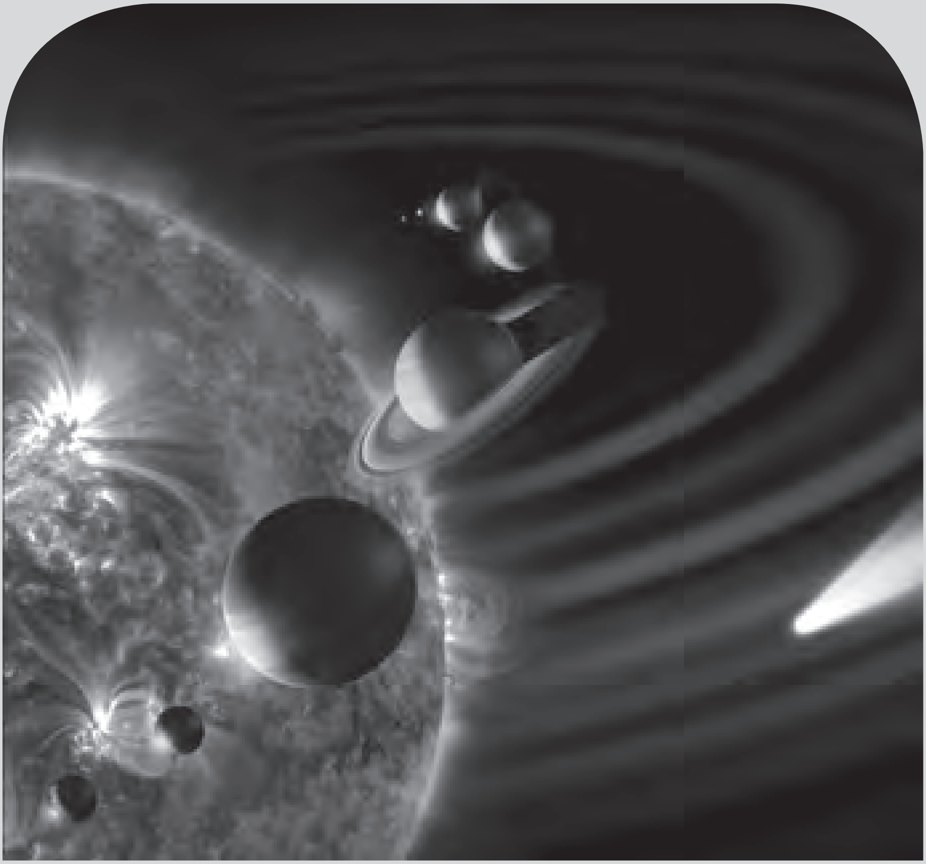
فصل ۱

مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......

او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...

(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)



منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید، ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان در کتاب نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه، اعمال روی مجموعه‌ها و نمایش مجموعه‌ها و کاربردهای آن آشنا می‌شوند.

درس اوّل ازاین فصل به معرفی مجموعه می‌پردازد و واژهٔ مجموعه را که در زبان محاوره‌ای به‌کار می‌رود با اصطلاح مجموعه که در ریاضی به‌کار می‌رود مقایسه و به بیان تفاوت‌های آن می‌پردازد. در این درس به معرفی دو مفهوم بسیار مهم یعنی عضویت و جزئیت (زیر مجموعه) پرداخته شده و همچنین به بیان توصیفی مجموعه‌ها و تبدیل آن به زبان ریاضی و تعریف مجموعهٔ تُهی دراین درس پرداخته می‌شود.

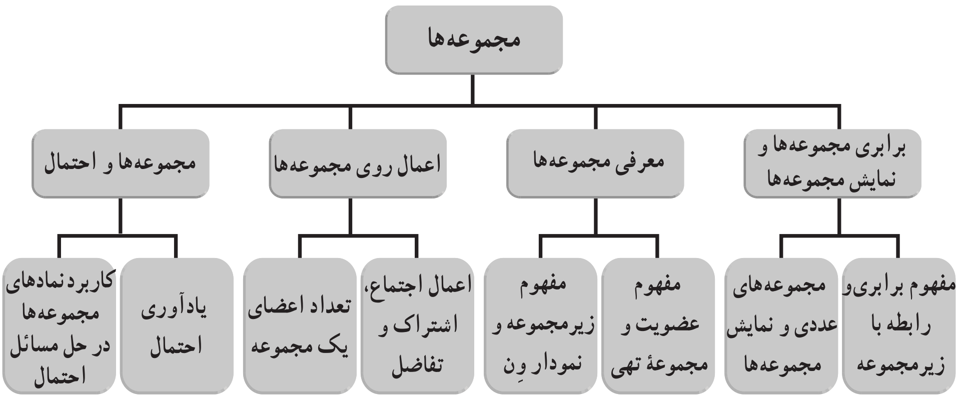
در درس دوم مفهوم برابری بین دو مجموعه معرفی و نمایش مجموعه‌ها در شکل‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در درس سوم به معرفی سه عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها و استفاده از نمودار ون برای نمایش آنها پرداخته شده است.

در درس چهارم ضمن یادآوری مسائل احتمال که دانش‌آموزان در دو کتاب ریاضی هفتم و هشتم مطالعه کرده‌اند به‌کاربردها و استفاده‌های مفهوم مجموعه و نمادهایی که برای مجموعه‌ها و تعداد اعضای یک مجموعه به‌کار برده شده، در احتمال و حل مسائل مربوط به احتمال اشاره شده است.

دانش‌آموزان در کتاب ریاضی دهم مبحث مجموعه‌ها را کامل‌تر فرا خواهند گرفت.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل مجموعه‌ها، علاوه بر اینکه منظومه شمسی به عنوان یک مجموعه معرفی شده است، که در تعبیر ذکر شده برای مجموعه‌ها کاملاً صدق می‌کند، (اعضاء غیر تکراری و کاملاً مشخص) توجه دانش‌آموزان را به عظمت خلقت معطوف داشته و توسط آیه‌ای از آیات قرآن کریم، هدفمند بودنِ این خلقت را متذکر می‌شویم.

دانستنی‌هایی برای معلم

نظریه مجموعه‌ها توسط جرج کانتور در سال ۱۸۷۳ پایه‌ریزی و در ابتدا به صورت شهودی و غیرصوری بیان و گسترش یافت.

امروزه نظریه مجموعه‌ها به عنوان مبانی و یکی از پایه‌ای‌ترین مفاهیم در ریاضیات به‌کار می‌رود. اصلی‌ترین موضوع‌ها در ریاضیات، مانند اعداد و توابع براساس مجموعه‌ها پایه‌ریزی و پیشرفت کرده‌اند.

دو پارادکس معروف در نظریه مجموعه‌ها وجود دارد که یکی متعلق به خود کانتور است و به پارادکس کانتور معروف است و دیگری پارادکس راسل که توسط راسل به‌دست آمده است.

پارادکس کانتور : اگر U مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها فرض شود واضح است که عدد اصلی این مجموعه باید بزرگ‌ترین عدد اصلیِ مجموعه‌های موجود باشد یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد باید همواره $|A|\leq|U|$ اما از طرفی بنابر قضیهٔ کانتور عدد اصلیِ مجموعهٔ توانیِ U (مجموعهٔ شاملِ همهٔ زیر مجموعه‌های U) کوچک‌تر از عدد اصلیِ U است و این تناقض است.

پارادکس راسل : مجموعهٔ $R=\{A:$ عضو خودش نباشد $A\}$ را در نظر می‌گیریم (مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضوی از خود نباشند) آیا $R\in R$ است؟

* اگر $R\in R$ در این صورت بنابر تعریف مجموعهٔ R باید $R\notin R$ که تناقض است!

* اگر $R\notin R$ لذا بنابر تعریف مجموعهٔ R باید $R\in R$ که تناقض است!

منطق فازی (Fuzzy logic) که اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵م و به‌دنبال تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی، پایه‌ریزی و ابداع گردید، امروزه در بسیاری از شاخه‌های ریاضی و علوم غیر ریاضی کاربرد دارد.

منطق فازی از فضای بین دو ارزش «بروم» یا «نروم» ارزش‌های جدید «شاید بروم» یا «می‌روم اگر» یا «احتمال دارد بروم» را استخراج کرده و به کار می‌گیرد. یک چراغ فقط به دو وضعیت «روشن» یا

«خاموش» محدود نیست و مواردی مانند «کم نور» یا «پرنور» نیز برای یک لامپ تعریف می‌شود!

مفهوم مجموعه‌های فازی در مقابل مجموعه‌های قطعی (Crisp sets) قرار دارد در واقع از تعمیم و گسترش مفهوم مجموعه‌های قطعی به مفهوم مجموعه‌های فازی می‌رسیم.

مجموعه‌های قطعی همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در کتاب‌های درسی آنها را مجموعه می‌نامیم. در مجموعه‌های فازی مفهوم عضویت نسبی است و فقط به عضوبودن یا نبودن محدود نمی‌شود!

معرفی منابع برای معلمان

- مبانی ریاضیات گسسته، تألیف حمیدرضا امیری و یدا... ایلخانی‌پور، انتشارات مدرسه
- دانشنامه ریاضی، تألیف گروه نویسندگان، پرویز شهریاری، غلامرضا یاسی پور و... انتشارات کانون فرهنگی آموزش
- نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، تألیف تی. لین، یو - فنگ لین، ترجمه عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ متناظر با هر عبارت یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه یک عبارت بنویسید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و اول

ب) مجموعهٔ مثلث‌هایی که ۴ ضلع دارند.

ج) مجموعهٔ اعداد صحیح منفی و بزرگ‌تر از ۲

د) مجموعهٔ اعداد طبیعی و کوچک‌تر از ۷

هـ) $A=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

و) $B=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) $A=\{۰,\varnothing,\{\varnothing\},\{\,\}\}$ دارای ...... عضو است

ب) عبارت «۵ عددِ اول و کوچک‌تر از ۲۰» مجموعه‌ای مشخص و یکتا را ....

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ مجموعهٔ ...... نامیده می‌شود.

۳ــ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) $A=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ ب) $B=\{۵,۶,۷,...\}$

ج) $C=\{۷\}$ 　　　　　　　　 د) $D=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},...\right\}$

۴ــ هر یک از مجموعه‌های زیر که با نماد ریاضی مشخص شده‌اند را با اعضایشان بنویسید.

الف) $A=\{x|x\in \mathbb{N}, ۵<x<۱۱\}$ 　　　 ب) $B=\{x|x\in \mathbb{Z}, -۷\leq x<۷\}$

ج) $C=\left\{\frac{x}{x+۱}\middle|x\in \mathbb{N}, ۳<x<۹\right\}$ 　　　 د) $E=\{۳K|k=-۱,-۲,-۳\}$

۵ــ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۰,\varnothing,۲\}$ را بنویسید.

۶ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,\{۱\},۴\}$, $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است.

الف) $\{۱\}\in A$ 　　　 ب) $\{۱\}\subseteq A$ 　　　 ج) $\{۲,۳,\{۲\}\}\subseteq A$

د) $\{۴,۵\}\subseteq B$ 　　　 هـ) $A\nsubseteq B$ 　　　 و) $\{۱,\{۱\},۲\}\subseteq A$

ز) $۷\in A$ 　　　 ح) $\{۴\}\subseteq A$ 　　　 ط) $\{۴\}\subseteq B$

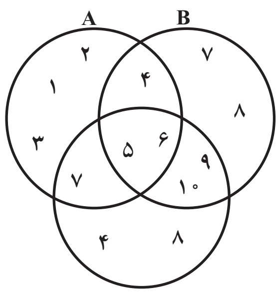
۷ــ سه مجموعهٔ $A=\{۴,۶,۷,۸,۹,۲\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۸\}$ و $C=\{۳و۴و۵و۹و۱۰\}$ را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $(A\cap B)\cap C$ 　　　 ب) $(A\cup B)\cap C$ 　　　 ج) $(A\cup C)-B$

د) $(A-B)\cup(B-C)$ 　　　 هـ) $(A-B)\cup(A-C)$ 　　　 و) $A-(B\cap C)$

ز) $(A\cup C)-B$ 　　　 ح) $(A-B)\cup(C-B)$

۸ ــ با توجه به نمودار زیر حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بنویسید.



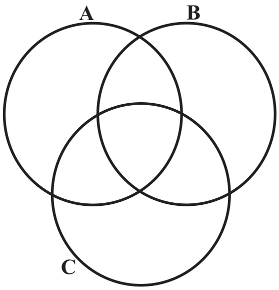
الف) $(A-B)\cup(B-A)$ 　　　 ب) $(A\cup C)-B$ 　　　 ج) $A\cup(B\cup C)$

د) $(A\cup B)\cup C$ 　　　 هـ) $A\cap(B\cup C)$ 　　　 و) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

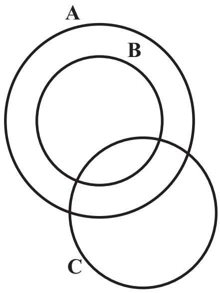
ز) $(A-B)-C$ 　　　 ح) $A-(B-C)$ 　　　 ط) $(A\cap C)-B$

ی) $(A-B)\cap(C-B)$ 　　　 ک) $(A\cap B)\cap C$

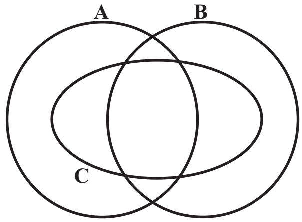
۹ــ در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعهٔ مورد نظر را هاشور بزنید.



(A – B)UC



$(A-B)\cup(B\cap C)$



$(A\cap C)-(C-B)$

اهداف

ــ درک دقیق و شفافی از واژهٔ مجموعه در ریاضیات داشته باشد.

ــ دو ویژگی مهم اعضای یک مجموعه یعنی تکراری نبودن و مشخص بودن را درک کند.

ــ از نمودار وِن برای نمایش مجموعه‌ها استفاده کند.

ــ مفهوم عضویت را درک کند.

ــ مفهوم مجموعهٔ تهی را درک کرده و بتواند برای مجموعهٔ تهی مصداق پیدا کند.

ــ بتواند بیان توصیفی برای یک مجموعه را به مجموعه‌ای با اعضای کاملاً مشخص تبدیل کند و برعکس برای مجموعه‌ها بیان توصیفی شفافی بیاورد.

روش تدریس

هدف فعالیت اوّل این درس لزوم استفاده از مفهوم مجموعه و نماد مجموعه است. اینکه دانش‌آموز احساس نیاز کند که گاهی اوقات لازم است تعدادی از اشیاء را از بقیه جدا کنیم و یا آنها را متمایز کرده و دسته‌بندی کنیم.

در این فعالیت علاوه بر هدف فوق‌الذکر دانش‌آموز یاد می‌گیرد که برای مشخص کردن یک مجموعه از اشیاء، از حروفی چون A , B , C ,... استفاده کرده و این اشیاء را در دو آکلاد قرار داده و به هر کدام از آن اشیاء یک عضو بگوید.

در این فعالیت سعی بر این است تا دانش‌آموز درک کند و به این موضوع پی‌ببرد که اولاً توصیف برای مشخص کردن هر مجموعه باید کاملاً روشن و شفاف بوده و مجموعه‌ای یکتا معرفی کند و دوم اینکه جابه‌جایی اعضای مجموعه، مجموعهٔ جدیدی تولید نمی‌کند به عنوان مثال عبارت «۳ عدد اول و یک رقمی» به صورت‌های مختلفی می‌تواند تعبیر شود : {۲,۳,۵} یا {۲,۵,۷} یا ... لذا این عبارت نمی‌تواند مشخص کنندهٔ یک مجموعه باشد.

در پاراگراف انتهایی این صفحه، تعبیر دقیق ریاضی برای مجموعه بیان شده و دانش‌آموز باید تفاوت آن را با کلمهٔ مجموعه که در زبان محاوره‌ای به‌کار می‌رود درک کند. توجه داشته باشید که در معرفی مجموعه، قید شده است **دسته‌ای از اشیاء مشخص** و هیچ محدودیتی برای این اشیاء بیان نشده است. به عبارت دیگر اینکه اعضای یک مجموعه باید دارای یک ویژگی یا خاصیت مشترک باشند یا

هم‌جنس باشند یا … جزء شرایط تشکیل یک مجموعه نیست بنابراین مجموعهٔ $A=\{a,b,۲,۳,$ خورشید$\}$ یک مجموعهٔ ۵ عضوی به حساب می‌آید که اعضای آن هیچ ویژگی مشترکی ندارند.

در فعالیت‌های صفحهٔ ۳ علاوه بر معرفی مفهوم و نماد عضویت و نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن، روی تکراری نبودن اعضای یک مجموعه و مشخص بودنِ اعضاء تأکید شده است.

توجه داشته باشید که برای استفاده از نمودار وِن هم می‌توانیم از منحنی‌های بسته استفاده کنیم و هم از خط شکسته بسته از قبیل اشکال هندسی شناخته شده مانند دایره، مستطیل و …

در ابتدای صفحهٔ ۴، مجموعهٔ تهی به عنوان مجموعه‌ای که فاقد عضو است معرفی شده و با تذکر این نکته که مجموعهٔ تهی یعنی $\{\ \}$ یا $\varnothing$ با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{\circ\}$ یکی نیست از اشکالات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان جلوگیری شده است.

در کار در کلاس صفحهٔ ۴ سعی می‌شود تا مفاهیم و مطالب قبلی بهتر جا بیفتد و دانش‌آموزان در این کار در کلاس مجموعهٔ تهی را به عنوان یک مجموعه و همچنین مجموعه‌های یک عضوی را به عنوان یک مجموعه شناسایی و خودشان قادر به معرفی چنین مجموعه‌هایی شوند. در کار در کلاس شمارهٔ ۴ تمرین بسیار خوبی برای درک و تعمیق مطالب بیان شده است.

دانش‌آموزان با خواندن عبارت‌ها و مجموعه‌های سمت چپ ابتدا مجموعه را در ذهن خود ساخته و سپس به دنبال آن در ستون سمت راست، می‌گردند. کار در کلاس شمارهٔ پنج مجدداً تأکید بر مشخص بودنِ اعضا دارد.

تمرین صفحهٔ ۵، مطالب این درس را دوره کرده و تأکید بیشتری روی بیان مجموعه‌هایی با عبارات و با نمادهای ریاضی دارد.

تمرین ۳ یک مسئله پاسخ باز است که دانش‌آموزان به آن جواب‌های متفاوتی خواهند داد و با کنترل جواب‌های آنها به نوع نگاه و سطح درک آنها از مجموعه پی‌خواهید برد.

اهداف

ــ دانش‌آموزان مفهوم برابری و مفهوم زیرمجموعه در مجموعه‌ها را درک کرده و تشخیص می‌دهند که در چه صورتی دو مجموعه برابر نیستند و در چه صورتی $A \not\subseteq B$.

ــ دانش‌آموزان ارتباط دوطرفه مفهوم برابری و زیرمجموعه بودن را درک می‌کنند.

ــ زیر مجموعه‌های بدیهی هر مجموعه ($\varnothing$ و خود مجموعه) معرفی می‌شوند.

ــ دانش‌آموزان باید بتوانند تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را تشخیص داده و بنویسند.

ــ نمایش مجموعه‌های اعدادِ معروف و نمادگذاری آنها و همچنین استفاده از نماد ریاضی برای نمایش مجموعه‌ها جزء اهداف آموزشی این درس است.

ــ دانش‌آموزان باید بتوانند مجموعه‌هایی که با اعضا مشخص شده‌اند یا با یک عبارت توصیفی بیان شده‌اند را با استفاده از نمادهای ریاضی مشخص کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۶ دانش‌آموزان دو مجموعهٔ A و B را می‌سازند (تشخیص می‌دهند) که این مجموعه‌ها به دو صورت معرفی شده‌اند و مشاهده می‌کنند که تمام اعضای A درB و تمام اعضای B نیز در A بوده و در واقع $A=B$ است. سپس با معرفی مجموعهٔ A و نوشتن اعضای آن در عبارت‌های تعریف شده در الف، ب و ج به دنبال مجموعه‌ای برابر با A می‌گردند.

و در همین فعالیت با مفهوم نابرابری در مجموعه‌ها نیز آشنا می‌شوند و جلوی این بدفهمی که «اگر A با B برابر نباشد تمام اعضای A نباید در B باشند» گرفته می‌شود.

در کار در کلاس صفحهٔ ۶ دانش‌آموزان با مقایسهٔ عضو به عضو و اضافه کردنِ یک عضو، برابری در دو مجموعه را ایجاد می‌کنند. در سؤال ۲ کار در کلاس یک مسئله باز پاسخ مطرح شده که تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان را در برخواهد داشت که البته بسیاری از این پاسخ‌ها قابل تأمل خواهد بود.

فعالیت صفحهٔ ۷ به مفهوم زیرمجموعه می‌پردازد و نیز به زیرمجموعه‌های بدیهی هر مجموعه مانند A یعنی به معرفی $\varnothing$ و A به عنوان زیرمجموعه‌های A و البته با بیان این مطلب که در چه شرایطی $A \not\subseteq B$ به نوعی زیرمجموعه بودنِ تهی را اثبات می‌کند (نوعی برهان خلف).

ذکر مثال بالای صفحهٔ ۸ و آوردن دلیل برای هر مورد برای تعمیق و تثبیت مفاهیم زیرمجموعه‌ـ بودن و زیرمجموعه نبودن بسیار مفید است. در کار در کلاس صفحهٔ ۸ مفاهیم زیرمجموعه، عضویت و زیرمجموعه نبودن از طریق استفاده از نمودار ون و شهودی کردنِ این مفاهیم و از طریق مجموعه‌های عددی بررسی می‌شود.

بهتر است از دانش‌آموزان خواسته شود تا برای نوشتن زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به ترتیب از مجموعهٔ هیچ عضوی (تُهی) شروع کرده و بعد تمام یک عضوی‌ها و دو عضوی‌ها و ... را بنویسند.

در مطالب صفحهٔ ۹ سعی بر این است تا دانش‌آموزان مجموعه‌های عددی را بتوانند با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسند و برعکس. به عنوان مثال مجموعهٔ $A=\{4,7,10,...\}$ با مجموعهٔ $\{3k+1|k\in \mathbb{N}\}$ برابر است. همچنین مجموعهٔ $B=\{4K-3|-2< k \leq 3\ ,\ k\in \mathbb{Z}\}$ با مجموعهٔ $\{-7,-3,1,5,9,13\}$ برابر است.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ علاوه بر اینکه دانش‌آموز مجموعه‌هایی را که با نماد ریاضی مشخص شده یا با عبارتی بیان شده‌اند را باید با اعضایشان مشخص کند به لزوم استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان مجموعه‌ها پی می‌برد زیرا مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توانیم با همهٔ اعضایش بنویسیم.

در تمرین صفحهٔ ۱۰ همهٔ مفاهیم ذکر شده در این درس مورد سؤال و پرسش قرار می‌گیرد و دوره می‌شود.

اهداف

ــ دانش‌آموزان با ۳ عمل از اعمال بین مجموعه‌ها یعنی عمل اجتماع، عمل اشتراک و عمل تفاضل آشنا می‌شوند.

ــ دانش‌آموزان سه عمل مذکور را به صورت نمادگذاری ریاضی و نمودار ون درک می‌کنند.

ــ دانش‌آموزان با معرفی دو مجموعهٔ A و B (به صورت نمایش همهٔ اعضا یا نمودار ون) باید بتوانند $(A\cup B)$ ، $(A\cap B)$, $(A-B)$, $(B-A)$ را بنویسند.

ــ دانش‌آموزان عدد اصلی مجموعه‌ها یا تعداد اعضای مجموعه‌ها را تشخیص داده و از نماد $n(A)$ برای نمایش تعداد اعضای A استفاده می‌کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۱۱، ابتدا دانش‌آموزان به صورت غیر رسمی و غیر صوری با مفاهیم اشتراک و اجتماع آشنا شده و سپس در دو کادر پایین صفحه این دو مفهوم یا دو عمل بین مجموعه‌ها را به دو صورت استفاده از نمادهای ریاضی و استفاده از نمودار وِن درک می‌کنند.

مثال بالای صفحهٔ ۱۲ به درک بهتر این مطالب می‌پردازد و به صورتی کاملاً عملی دانش‌آموز را درگیر محاسبهٔ اشتراک و اجتماع دو مجموعه می‌کند.

فعالیت صفحهٔ ۱۲ فعالیتی بسیار غنی و خلاقانه است و هدف اصلی از طرح این فعالیت آن است که دانش‌آموز مفهوم اجتماع را با این گزاره که «اگر عضوی حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد در اجتماع آن دو مجموعه است» بهتر درک کند در ادامهٔ این فعالیت از دانش‌آموز خواسته شده تا حالت‌های دیگری برای این دو مجموعه بیابد که تعداد کل حالت‌های ممکن و صحیح برای A و B عبارت از ۸ حالت که دانش‌آموزان باید همهٔ حالت‌ها را بیابند.

در شمارهٔ ۲ فعالیت صفحهٔ ۱۲ به طور مشابه، اول به صورت غیر رسمی با مفهوم عمل تفاضل آشنا شده و سپس در کادر بالای صفحهٔ ۱۳ تعریف ریاضی و نمودار وِن برای عمل تفاضل آورده شده که ذکر یک مثال در پایین کادر دانش‌آموزان را به صورت عملی درگیر محاسبهٔ تفاضل دو مجموعه کرده و در عین حال دانش‌آموز مشاهده می‌کند که $(A-B)$ با $(B-A)$ لزوماً برابر نیست.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳ به تعمیق و تا حدودی به تعمیم مفاهیم ذکر شده پرداخته‌ایم و در پایین صفحه یک نماد یا قرارداد برای نمایش تعداد اعضای یک مجموعه آورده شده است. برای

دست‌ورزی بیشتر و تعمیق مفاهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل می‌توانید از مثال‌های متنوعی مانند مثال زیر کمک بگیرید :

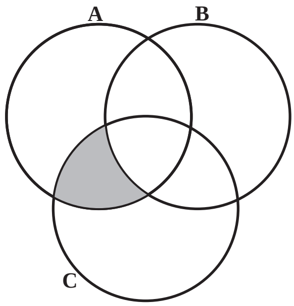
۱ــ اگر $A-B=\{۲,۳,۴\}$ و $B=\{۹,۸,۷\}$ برای A چند حالت وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۲ــ اگر $A-B=\{۵,۶,۲\}$ و $A\cup B=\{۵,۶,۲,۹,۱۱,۱۵\}$ با استفاده از نمودار وِن ۴ حالت برای A و B مشخص کنید.

در تمرین‌های صفحهٔ ۱۴ همهٔ مطالب و مفاهیم ذکر شده در این درس را مرور کرده و به تثبیت آنها می‌پردازیم.

در تمرین ۲ قسمت‌های (هـ) و (و) به این نکات پرداخته شده است که لزوماً $A-B$ و $B-A$ ممکن است با هم برابر نبوده و همین‌طور تعداد اعضای آنها که البته در حالت‌هایی می‌توانند برابر هم باشند ولی حکم کلی نبوده و البته اگر $(B-A)=(A-B)$ آنگاه واضح است که $n(B-A)=n(A-B)$ ولی برعکس این مطلب درست نیست یعنی اگر $n(B-A)=n(A-B)$ باشد نمی‌توان همواره نتیجه گرفت که $B-A=A-B$ به عنوان مثال اگر فرض کنید $A=\{۲,۴,۶,۸\}$, $B=\{۶,۸,۳,۵\}$ واضح است که $A-B=\{۲,۴\}$, $B-A=\{۳,۵\}$ که $(A-B)\neq(B-A)$ ولی تعداد اعضای آنها برابر است.

تمرین ۴ الگوهای بسیاری را برای هاشورزدن به دانش‌آموزان معرفی می‌کند. به عنوان مثال :



$(A-B)\cap C$

اهداف

ــ یادآوری مفهوم احتمال و رابطهٔ محاسبهٔ احتمال یک پیشامد تصادفی
ــ استفاده از نمادهای ریاضی برای محاسبهٔ احتمال در مسائل مربوطه
ــ ارتباط بین مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن (فضای نمونه‌ای) و زیر مجموعه‌های آن به عنوان پیشامدهای تصادفی
ــ یادآوری مفهوم پیشامدهای هم‌شانس و غیر هم‌شانس

روش تدریس

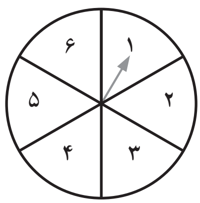
در اولین مثال (صفحهٔ ۱۵) هدف اصلی تشکیل مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و در هر چهار قسمت الف، ب، ج و د تشکیل مجموعه‌های حالت‌های مطلوب است. استفاده از نمادهای ریاضی و فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبهٔ احتمال نیز از اهدافِ حلِ این مثال می‌باشد.

در قسمت (ج) توجه دارید که پیشامد مورد نظر مجموعه‌ای فاقد عضو یعنی $\varnothing$ است و $n(\varphi)=۰$ و بنابراین $p(\varphi)=۰$ است.

در فعالیت صفحهٔ ۱۶ دانش‌آموز باید پس از تشخیص همهٔ حالت‌های ممکن یعنی $S=\{۱,۲,۳\}$ برای هر کدام از زیرمجموعه‌های S یا پیشامدهای تصادفی که به صورت مجموعه‌ای از اعداد تعریف شده است، با بیان توصیفی و مانند نمونه یک پیشامد تعریف کند.

به عنوان یک فعالیت تکمیلی از فعالیت زیر استفاده کنید.

فعالیت



مانند نمونه و با توجه به چرخندهٔ مقابل برای هر یک از مجموعه‌های تعریف شده یک پیشامد با بیان توصیفی تعریف کنید و سپس احتمال آن را به دست آورید.

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ (عقربه روی اعداد کوچک‌تر از ۵ بایستد) $\longrightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

$B=\{۱,۵,۶\} \rightarrow$ (عقربه روی عدد ۱ یا ۵ یا ۶ بایستد) $\rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}$

$C=\{۲,۳,۵\} \rightarrow$ (   ) $\rightarrow P(C)=$

$D=\{۳,۶\} \rightarrow$ (   ) $\rightarrow P(D)=$

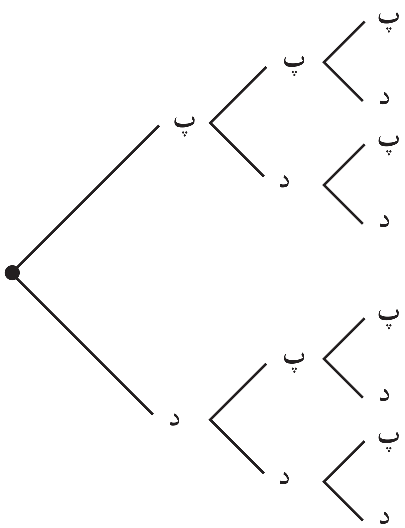
$E=\{۱,۴\} \rightarrow$ (   ) $\rightarrow P(E)=$

توجه داشته باشید که توصیف‌هایی که دانش‌آموزان برای تعریف یک پیشامدِ معین استفاده می‌کنند، ممکن است با هم فرق داشته باشد ولی صحیح باشند.

در فعالیت صفحهٔ ۱۶ موضوع پیشامدهای هم‌شانس نیز مطرح شده که یادآوری از سال‌های قبل است و دانش‌آموز صرفاً از روی عدد حاصل از محاسبهٔ احتمالِ پیشامدها پی می‌برد که هم‌شانس هستند یا غیر هم‌شانس. کار در کلاس صفحهٔ ۱۶ به خوبی همهٔ اهداف و مفاهیم ذکر شده را مرور کرده و باعث تعمیق آنها می‌شود. در این کار در کلاس و در قسمت (ب) یک سؤال باز پاسخ مطرح شده است و دانش‌آموزان در می‌یابند که هر زیرمجموعه از S یا هر پیشامد تصادفی که شاملِ ۴ عضو باشد، می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

در تمرین‌های آخر این فصل (صفحهٔ۱۷) ۲ تمرین شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۴ نیاز به توجه خاص دارد و به طور حتم باید توسط شما بررسی شود و راه‌حل‌های دانش‌آموزان را مشاهده کرده و در صورت نیاز این دو تمرین در کلاس تحلیل شود.

بهتر است برای حل تمرین۲، نمودار درختی رسم شود تا دانش‌آموزان تمامِ ۸ حالتِ ممکن را مشاهده کنند.



(پ , پ , پ)
(د , پ , پ)
(پ , د , پ)
(د , د , پ)
(پ , پ , د)
(د , پ , د)
(پ , د , د)
(د , د , د)

در تمرین ۴ نیز بهتر است همهٔ حالت‌ها را در یک جدول ۶×۶ مشاهده کنند.

		تاس قرمز					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
تاس آبی	۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
	۲	(۲,۱)	(۲,۲)	...	...	...	(۲,۶)
	۳	(۳,۱)	...	...	...	...	(۳,۶)
	۴	(۴,۱)	...	...	(۴,۴)	...	(۴,۶)
	۵	(۵,۱)	...	...	(۵,۴)	...	(۵,۶)
	۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

این توجه داده شود که (۶,۵) با (۵,۶) فرق دارد و دو حالت مجزا هستند. (۶,۵) یعنی تاس آبی ۶ آمده و تاس قرمز ۵ و (۵,۶) یعنی تاس آبی ۵ و تاس قرمز ۶ آمده است.

حل تمرین‌های فصل ۱

تمرین

۱ــ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) مکعب عددهای طبیعی از یک تا پنج $\quad$ A = {۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵} ــ A مجموعه‌ای ۵عضوی است

ب) مجموعه اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ $\quad$ C = {۱۰} ــ مجموعهٔ C، ۱ عضو دارد

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ $\quad$ {۳،۶،۹، ...، ۹۹۹} ــ این مجموعه، ۳۳۳ عضو دارد

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ $\quad$ { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. $\quad$ { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشد. $\quad$ { } ــ این مجموعه، بدون عضو است.

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند .

ب) مجموعهٔ {۲,۳,۴,...,۹} دارای <u>۸</u> عضو است.

ج) مجموعهٔ A = {۰, ∅} دارای <u>۲</u> عضو است.

د) با توجه به مجموعهٔ A = {۳,۵,۷,۹,۱۱} ؛ داریم : ۵، عضو A است یا با نماد ریاضی، <u>۵∈A</u> و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، <u>۱۲∉A</u> .

۳ــ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

C= {۱،۲،۳،...،۹} $\qquad$ B = {۲،۴،۶،۸} $\qquad$ A = {۲ ،۳ ،۵،۷}

تمرین

۱ــ مجموعهٔ $A = \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ C و B

$B = \{x \mid x \in A , x^{۲} \leq ۲\}$ ، $C = \{x \mid x \in A, -۱ \leq x \leq ۱\}$ ، $D = \{x \mid x \in A , x^{۴} = ۱\}$

$B = \{-۱ ،۰،۱\}$ $\quad$ $C = \{-۱،۰،۱\}$ $\quad$ $D = \{-۱ ،۱\}$

۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به‌طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$؟ بله

$A = \{۱ ،۲\}$ $\quad$ $B = \{۱،۲،۳\}$ $\quad$ $C= \{۱،۲،۳،۴\}$

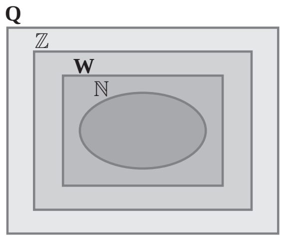
۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, ۲x+۱=۳\}$ $\quad$ ب) $B = \{۲x \mid x = ۰,۲,۳\}$

$A = \{۱\}$ $\quad$ زیرمجموعه‌ها : { } ، {۱}

زیرمجموعه‌ها : {۰،۴،۶} ، {۰،۴} ، {۰،۶} ، {۴،۶} ، {۶} ، {۴} ، {۰} ، { } ،

$B = \{۰،۴،۶\}$



۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های W،Q، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q$

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

$\frac{۲}{۳} \notin W$ الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. × $\quad$ ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. ✓

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. ✓ $\quad$ د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. ✓

تمرین

۱ـ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را درنظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

الف) $A\cup B$ ب) $B\cup C$ ج) $A\cup C$ د) $A\cap B$

هـ) $A-B$ و) $C-B$ ز) $(A-C)\cup(B-C)$ ح) $(A\cup B)-C$

ط) $A\cap A$ ی) $A\cap\varnothing=\varnothing$ ک) $B\cup B$ ل) $C\cup\varnothing$

الف) $A\cup B$ = {۱، ۲، ۳، ...، ۹}

ب) $B\cup C$ = {۱، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱}

ج) $A\cup C$ = {۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱}

د) $A\cap B$ = {۹}

هـ) $A-B$ = {۲، ۴، ۶، ۸}

و) $C-B$ = {۸، ۱۰، ۱۱}

ز) $(A-C)\cup(B-C)$ = {۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۹}

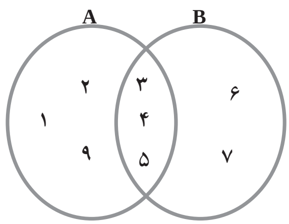
ح) $(A\cup B)-C$ = {۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۹}

ط) $A\cap A$ = {۲، ۴، ۶، ۸، ۹}

ک) $B\cup B$ = {۱، ۵، ۷، ۳، ۹}

ل) $C\cup\varnothing$ = {۱، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱}

۲ـ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید :



✓الف) $B-A=\{۶,۷\}$ ✓ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

×ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$

✓د) $n(A\cup B)=۸$

× هـ) $A-B=B-A$ ✓و) $n(A-B)=n(B-A)$

۳ـ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ ۵) $(A\cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

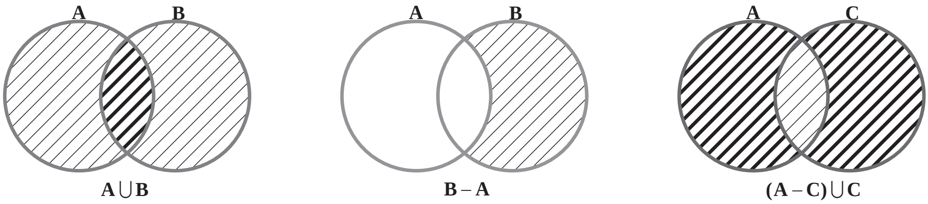
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A\cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعهٔ A و B است.

د) مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B-A)$ و $(A\cap B)$ با مجموعهٔ B مساوی است.

۴ــ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. $\frac{۱}{۶}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

{(د،د،د)، (د،د،پ)، (د،پ، د)، (د، پ،پ)، (پ، د،د)، (پ، د، پ) ، (پ،پ،د)، (پ،پ،پ)}

کل حالت‌ها ۸ حالت است.

$\frac{۳}{۸}$ = احتمال اینکه خانواده دقیقاً دو دختر داشته باشد.

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{۷}{۱۲}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :
(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = ۳۶$)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. $\frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

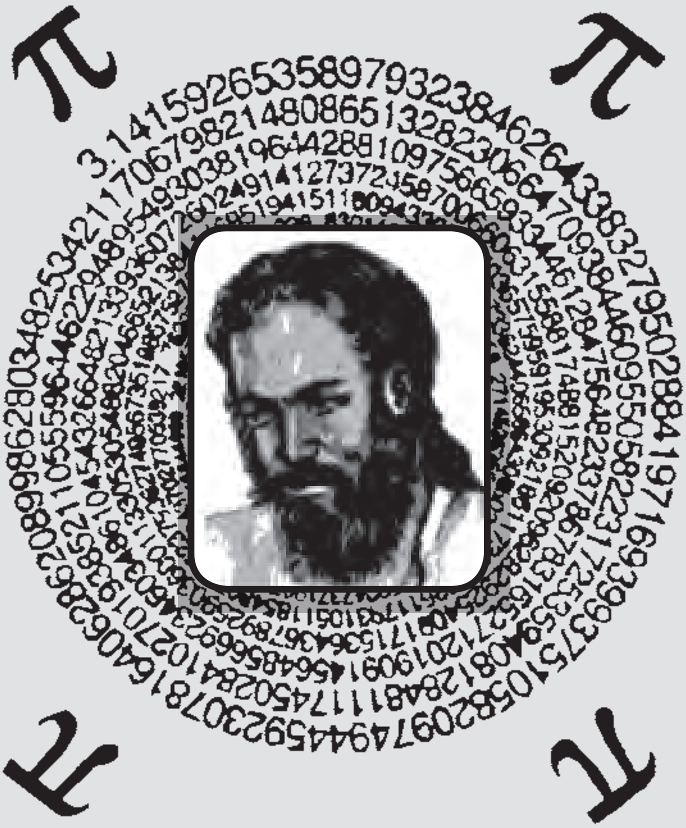
ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $\frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

عددهای حقیقی

فصل ۲

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

نگاه کلی به فصل

در این فصل دانش‌آموزان با اعداد گنگ، اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، نام مجموعه‌های اعداد حقیقی و گنگ و مفهوم قدر مطلق آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در سال گذشته با اعدادی مانند $\sqrt{1}$ و $\sqrt{10}$ آشنا شده‌اند ولی مجموعه‌ای که این اعداد در آن قرار دارند را نام‌گذاری نکرده‌اند. در این فصل با نام این مجموعه که به صورت Q'/ یا Q^C/ می‌باشد و نام مجموعه اعداد حقیقی که به صورت $\mathbb{R}$ می‌باشد آشنا می‌شوند.

با یادآوری مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا پلی برای رسیدن به اعداد گنگ (اصم) و در نهایت مجموعه اعداد حقیقی ایجاد می‌شود و این پل توسط فعالیت‌های صفحه ۱۹ و ۲۱ ساخته شده است. در فعالیت صفحه ۲۱ نمایش اعشاری و تقریب اعشاری اعداد گویا مطرح می‌شود که پل ارتباطی برای رسیدن به اعداد حقیقی است و در فعالیت صفحه ۲۴، عددهای گنگ یا اصم معرفی می‌شوند و در فعالیت بعدی نشان داده می‌شود که با وجود اینکه بین هر دو عدد گویا می‌توان بی‌شمار عدد گویای دیگر به‌دست آورد ولی عددهایی نیز بین هر دو عدد گویا وجود دارند که گویا نیستند پس تمام اعداد گویا را نمی‌توان به صورت یک خط بر روی محور نشان داد.

در واقع هدف اصلی که در این فصل دنبال می‌شود آن است که دانش آموزان به این مفهوم پی‌ببرند که مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح را توانستیم به ترتیب به‌صورت $\{۱,۲,۳,...\}$ و $\{۰,\pm۱,\pm۲,...\}$ یعنی به صورت اعضا نمایش دهیم.

ولی با توجه به اینکه بین هر دو عدد گویا، عدد گویای دیگری وجود دارد نمی‌توانیم مجموعه Q را به صورت اعضا نشان دهیم پس به صورت $Q=\left\{\frac{a}{b}|a,b,\in z, b\neq ۰\right\}$ نشان می‌دهیم. مجموعه اعداد حقیقی را نمی‌توانیم به صورت نمادین یا بیان ریاضی نشان دهیم پس ناچاریم آن را روی محور و به صورت یک خط نمایش دهیم و از طرفی زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ معمولاً به صورت پاره خط یا نیم‌خطی روی محور خواهند بود.

در این فصل محاسبات اعداد گویا کامل می‌شود و دانش‌آموزان با تقریب اعشاری و نمایش اعشاری اعداد گویا آشنا می‌شوند و از آن برای مرتب کردن اعداد گویا استفاده خواهند کرد.

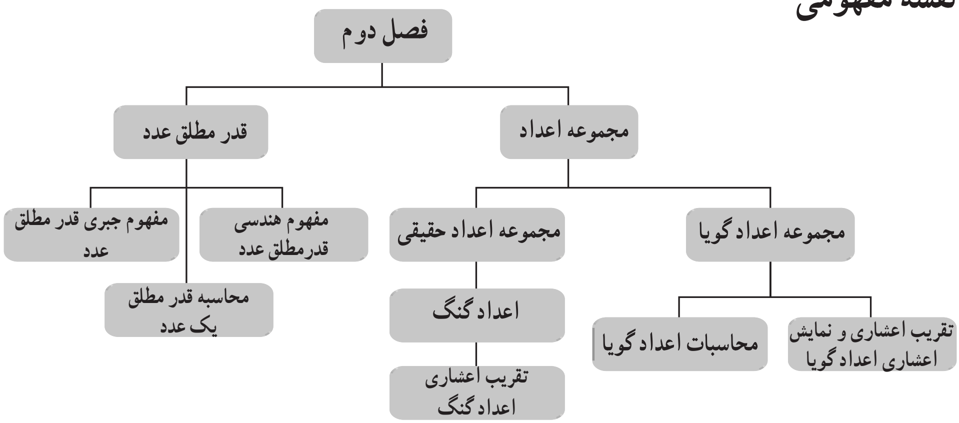
آشنایی با مفهوم هندسی قدر مطلق و تعریف جبری آن از اهداف دیگر این فصل می‌باشد. همان‌طور که می‌دانید معرفی این نماد به ما کمک می‌کند تا بتوانیم بعضی از مفاهیم را به درستی انتقال دهیم.

برای مثال برای اینکه برای دانش‌آموزان توضیح دهیم چرا علامت حاصل $-۴+۲=-۲$ منفی

می‌شود خواهیم گفت : عدد ۲ را از ۴ کم می‌کنیم و علامت عددی که قدر مطلق آن بزرگ‌تر است را می‌گذاریم.

در کل در این فصل مانند فصول دیگر سعی می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند عبارات فارسی را به زبان ریاضی و برعکس بنویسند و بیان کنند.

نقشه مفهومی

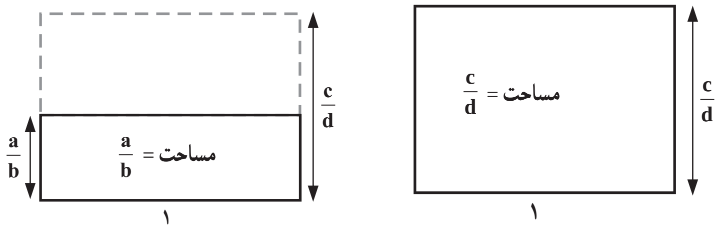


تصویر عنوانی

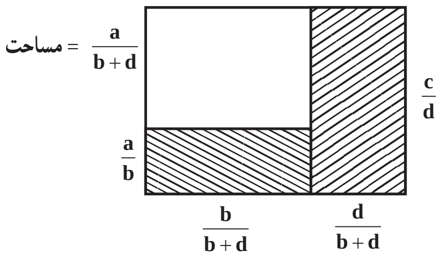
عدد π یک عدد حقیقی است که در محاسبه محیط و مساحت دایره به‌کار می‌رود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی تا ۱۶ رقم بعد از اعشار عدد π را به‌دست آورد. تاکنون تا بیش از یک میلیون رقم بعد از اعشار عدد π به کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری به‌دست آمده است. البته برای محاسبات روزمره و محاسبه محیط و مساحت دایره تا دو رقم بعد از اعشار عدد π کافی است.

دانستنی‌هایی برای معلم

۱ــ اگر d,c,b,a اعداد حقیقی مثبت باشد و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ قرار دارد.



اکنون طول مستطیل شمارهٔ (۱) را به دو قسمت $\frac{b}{b+d}$ و $\frac{d}{b+d}$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $1=\frac{d}{b+d}+\frac{b}{b+d}$) در نتیجه به شکل زیر خواهیم رسید.



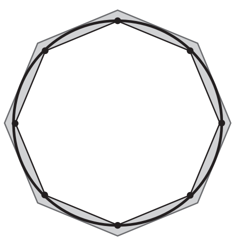
می‌دانیم مساحت شکل (۳) از مساحت شکل (۱) بیشتر و از مساحت شکل ۲ کمتر است.

درنتیجه می‌توان نوشت $\frac{a}{b}<\frac{a}{b+d}+\frac{c}{b+d}<\frac{c}{d}$ پس $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

۲ــ عدد پی (π) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. π یکی از حروف یونانی است. اولین محاسبه عدد π توسط ارشمیدس و با کمک چندضلعی‌ها انجام شد او با ۹۶ ضلعی منتظم عدد π را بین دو کسر $3\frac{10}{70}$ و $3\frac{10}{71}$ به‌دست آورد. لودلف وان‌کولن آلمانی در قرن هفدهم به کمک ۳۲۲۱۲۲۵۴۷۲۰ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۳۲ رقم بعد از اعشار محاسبه کرد. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب رساله محیطیه π را تا ۱۶ رقم پس از اعشار حساب کرده است.

ساده‌ترین راه حل محاسبه π از تقسیم محیط دایره به قطر دایره محاسبه می‌شود یعنی $\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$ شما می‌توانید به کمک دایره به شعاع واحد و رسم ۸ ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره مقدار عددی π را تقریب بزنید.

$3<\pi<3/4641$



اگر به جای ۸ ضلعی منتظم از ۱۲ ضلعی منتظم محیطی و محاطی استفاده کنیم. $۳/۲۱۵ > \pi > ۳/۱۰۵۸$ به جدول زیر توجه کنید.

شعاع دایره‌ها $R=۱$ می‌باشد.

n	محیط n ضعلی منتظم محاطی	محیط n ضلعی منتظم محیطی
۶	۳	۳/۴۶۴۱
۱۲	۳/۱۰۵۸	۳/۲۱۵۴
۲۴	۳/۱۳۲۶	۳/۱۵۹۶
۴۸	۳/۱۳۹۳	۳/۱۴۶۰
۹۶	۳/۱۴۱۴	۳/۱۴۱۶

از کسرهای زیر نیز می‌توان مقدار تقریبی عدد π را محاسبه کرد.

$$\pi = ۳ + \frac{۸}{۶۰} + \frac{۲۹}{۶۰^{۳}} + \frac{۴۹}{۶۰^{۲}} = ۳/۱۴۱۶۱۵۶$$

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times\cdots}{۱\times۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times\cdots}$$

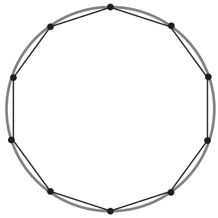
$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots$$

روز ۱۴ مارس روز جهانی عدد π نام‌گذاری شده است زیرا مارس سومین ماه میلادی است.

سرچشمه عددهای حقیقی

از میان همهٔ دانش ریاضی که به فیثاغورث نسبت داده می‌شود، مهم‌ترین آن این است که از قضیه فیثاغورث چنین برمی‌آید که همه مقادیر را نمی‌توان با عدد صحیح بیان کرد. طول قطر مربع و مستطیل، ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، اضلاع مثلث قائم الزاویه نمونه‌هایی هستند که در اکثر مواقع عددی غیر صحیح خواهند بود. مثلاً اگر مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم طول قطر آن $\sqrt{۸}$ خواهد شد. اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱/۵}$ و... را عدد گنگ (اصم) می‌نامیم و مجموعه اعداد حقیقی از اجتماع اعداد اصم و اعداد گویا به‌دست می‌آید یعنی $\mathbb{R}=Q\cup Q'$

مسیرهایی برای توسعه



۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید روش‌هایی برای محاسبه عدد π به‌دست آورند. مثلاً آنها می‌توانند یک دایره رسم کنند و توسط سوزن ته‌گرد داخل آن یک چند ضلعی محاط کنند در واقع نخ‌ها را دور سوزن‌ها بچرخانند. سپس به کمک محیط چند ضلعی که به راحتی قابل اندازه‌گیری است و تقسیم این محیط بر قطر دایره مقداری تقریبی برای عدد π به‌دست آورند. $\pi=\frac{2\pi R}{2R}$ بدیهی است که هر چه تعداد ضلع‌های چند ضلعی بیشتر باشد محیط چند ضلعی به محیط دایره نزدیک خواهد بود و تقریب بهتری از π به دست خواهد آمد.

۲ــ اگر $a,b,c,d>0$ و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد نشان دهند که $\frac{c}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ می‌باشد. از دانش‌آموزان بخواهید اثباتی برای این نامساوی ارائه دهند.

۳ــ از دانش‌آموزان بپرسید چرا ۱۴ مارس را روز جهانی عدد π نامیده‌اند؟

استفاده از ابزار فناورانه

۱ــ دانش‌آموزان می‌توانند از ماشین حساب برای نمایش اعشاری اعداد گویا و تقریب اعشاری جذر عددها استفاده کنند.

۲ــ شما می‌توانید از سایت www.teamboard.com با توجه به مسیر
www.teamboard.com /software /Team board–draw 60 نرم‌افزار Teamboard
(را با توجه به windows set up کامپیوترتان) را نصب کنید و از آن در کلاس استفاده نمایید.

معرفی منابع برای معلمان

• بحث ریاضی با دانش‌آموز، مؤلف سرژلانگ، مترجم نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، صفحه ۷ تا ۳۶.

• اثبات بدون کلام، تألیف راجرب. نلسِن، مترجم سپیده چمن‌آوا، انتشارات مدرسه، صفحه ۵۲.

• عدد، نوشته آیزاک آسیموف، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی.

• کسرهای مسلسل، نوشته کارل د. اولدز، ترجمه محمد جلوداری ممقانی، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.

- دانستنی‌های اعداد بزرگ، نوشته فیلیپ ج. دیویس، ترجمه علی عمیدی، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- اعداد : گویا و گنگ، نوشته ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- نا مساوی‌ها، نوشته پاول پترویچ کارولین، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات خوارزمی.
- گزیده‌هایی از نظریه اعداد، نوشته لویستن اور، ترجمه منوچهر وصال، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- سیری در عددهای طبیعی، تألیف جلیل الله قراگزلو، انتشارات فاطمی.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ نمایش اعشاری اعداد $\frac{۷}{۱۰}$ و $\frac{۷}{۲۲}$ و $-\frac{۱۰}{۹}$ را به دست آورید.

۲ــ چه تفاوتی بین نمایش اعشاری عدد $\frac{۷}{۲۲}$ و تقریب اعشاری $\sqrt{۳}$ وجود دارد؟

۳ــ سه کسر بین $\frac{۱۳}{۱۲}$ و $\frac{۱۵}{۱۴}$ به‌دست آورید.

۴ــ ۵ عدد گنگ بین ۲ و ۳ به‌دست آورید.

۵ــ با چند مثال نشان دهید که اگر $0<a<1$ باشد $a>a^2>a^3>a^4>\ldots$ و اگر $a>1$ باشد $a<a^2<a^3\ldots$

۶ــ کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۲\frac{۱}{۵} \text{ و } \frac{۸}{۱۱} \text{ و } -\frac{۴}{۹} \text{ و } ۲ \text{ و } -\frac{۳}{۵} \text{ و } \frac{۷}{۹}$$

۷ــ اگر $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۳}{۴}$ و $c=-۲\frac{۱}{۸}$ باشد حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $|۲a-b+c|$ ۲) $|a+b|-|b-c|+|a+c|$

۸ ــ حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

۱) $|۲-\sqrt{۷}|$ ۲) $|-۶-\sqrt{۳}|$ ۳) $|\sqrt{۳}-۳\sqrt{۵}|$

۹ــ اگر $a<0$ و $b>0$ و $c>0$ باشد حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

۱) $|a+b|+|ac|$ ۲) $|ab|+|ac|$

۱۰ــ عبارات زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{(-۲۵۹)^{۲}}$ ۲) $\sqrt{۱۸۹^{۲}}$ ۳) $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^{۲}}$ ۴) $\sqrt{(۷-\sqrt{۲})^{۲}}$

۱۱ــ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $(۲\frac{۱}{۵}+۳\frac{۱}{۲})\div(۱-\frac{۱}{۴})$ ۲) $\dfrac{۱+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۴}}\div\dfrac{-۱-\frac{۳}{۴}}{-۱+\frac{۳}{۴}}$ ۳) $\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}$

۱۲ــ آیا جمع دو عدد گنگ حتماً گنگ است؟

۱۳ــ زیر اعداد گویا خط بکشید؟

$$-۰/۵,\ ۰/\overline{۱۲۳}\ ,\ ۰/۴۰۴۰۰۴۰۰۰۴,\ldots$$

۱۴ــ عدد $\sqrt{۷}+۲$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۵ــ عدد $-۴+\sqrt{۲}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۶ــ در $|-۷-۲|\le|-۷|+\square$ چه اعدادی می‌توان در مربع قرار داد تا نامساوی درست باشد. سه عدد مثال بزنید.

۱۷ــ در تساوی $|-۴\times۳|=\square\times\square$ چه اعدادی می‌توان در مربع قرار داد تا تساوی درست باشد؟ سه جفت عدد مثال بزنید.

۱۸ــ بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ ، چهار عدد گویا بنویسید.

۱۹ــ حاصل کسر زیر را به‌دست آورید.

$$-۱۰\frac{۷}{۸}+۲۰\frac{۳}{۴}-۱۲۰\frac{۱}{۶}$$

۲۰ــ آیا $-۴\frac{۱}{۵}$ مساوی $-۴+\frac{۱}{۵}$ است؟ چرا؟

۲۱ــ آیا $-۲\frac{۱}{۳}$ مساوی $-۲-\frac{۱}{۳}$ است؟ چرا؟

اهداف

ــ یادآوری و مرور این مطلب که بین دو عدد گویا همیشه می‌توان بی‌شمار عدد گویا به‌دست آورد.

ــ ایجاد پل ارتباطی بین اعداد گویا و اعداد حقیقی و لزوم به وجود آمدن اعداد حقیقی

ــ توجه به دانش‌آموزانی که یادگیری آنها به صورت تصویری است تا آنها نیز بتوانند زیر ساخت شناختی خویش را کامل کنند.

ــ استفاده از نمایش اعشاری اعداد برای مرتب کردن آنها از کوچک به بزرگ یا برعکس

ــ آشنایی با مفهوم عدد اعشاری مختوم و متناوب

ــ توجه دانش‌آموزان به تخمین عدد اعشاری توسط ماشین حساب در ماشین حساب‌های مختلف

ــ کامل کردن محاسبات با اعداد گویا

ابزار مورد نیاز :

۱ــ محور اعداد

۲ــ ماشین حساب

۳ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

شما می‌توانید مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد حسابی و مجموعه اعداد صحیح را روی تخته بنویسید و از دانش‌آموزان بخواهید مثلاً بگویند ۴- متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا عدد ۷ متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا از دانش‌آموزان بخواهید عددی مثال بزنند که متعلق به هر سه مجموعه باشد و یا فقط در Z باشد.

سپس قسمت (۱) فعالیت صفحه ۱۹ را از دانش‌آموزان بخواهید که انجام دهند.

در این فعالیت به نامساوی $x \geq ۳$ توجه شده است که دانش‌آموزان با قراردادن اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ درستی یا نادرستی عبارت را تحقیق می‌کنند.

درست $۵ \geq ۴$ درست $۳ \geq ۳$ نادرست $۲ \geq ۳$ نادرست $۱ > ۳$

در این فعالیت عبارت بر روی نابرابری $3 \geq 3$ تأکید شده است که :

نامساوی درستی است. دانش‌آموزان درستی این عبارت را از ردیف (۱) جدول مربوط به این فعالیت می‌توانند متوجه شوند.

در قسمت (۲) این فعالیت دانش‌آموزان به روش جبری و به روش هندسی، به این مفهوم پی می‌برند که بین هر دو عدد گویا می‌توان اعداد گویای بی‌شماری به‌دست آورد. پس با توجه به این واقعیت نمی‌توان مجموعه اعداد گویا را به صورت اعضا مانند $\mathbb{N}$ W/ $\mathbb{Z}$ نمایش داد پس به روش $\left\{\frac{a}{b}\middle| a, b \in z, b \neq 0\right\}$ نمایش می‌دهیم. (در واقع در فعالیت‌های بعدی دانش‌آموزان به این درک خواهند رسید که $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) را به روش اعداد گویا هم نمی‌توان نمایش داد پس آن را روی محور نمایش می‌دهیم.

در فعالیت صفحه ۲۰ دانش‌آموزان می‌خواهند تعدادی اعداد گویا را از کوچک به بزرگ و یا برعکس مرتب کنند. روش محور روش خوبی است امّا چون مخرج کسرها با هم متفاوت است اگر تعداد این اعداد زیاد شوند بسیار وقت‌گیر و گاهی غیر ممکن می‌شود. پس برای دو کسر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ که روی محور نشان داده شده‌اند مشخص است که $\frac{۳}{۵}$ از $\frac{۵}{۶}$ کوچک‌تر است امّا در روش مجید بقیه کسرها را با تقسیم صورت به مخرج تبدیل به یک عدد اعشاری می‌کنیم و در روش مرتضی مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم. در هر دو روش می‌توانیم کسرها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

وقتی دانش‌آموزان صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنند، بعضی از این اعداد مانند $\frac{۱}{۳}$ به صورت ۰/۳۳۳۳۳۳ خواهند بود که با نمایش مثلاً $\frac{۲}{۵} = ۰/۴$ متفاوت است. در اینجا دانش‌آموزان با این اعداد، آشنا می‌شوند.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ از آنجا که بعضی از دانش‌آموزان یادگیری بصری دارند به آنها فرصت دهید از روی محور عدد بین دو عدد گویا را به‌دست آورند.

۲ــ برای تدریس این قسمت دانش‌آموزان نیاز به ماشین حساب دارند پس آوردن ماشین‌حساب را در جلسه قبل یادآوری کنید.

۳ــ روی درست بودن عبارت $2 \leq 2$ و $4 \geq 4$ به اندازه کافی تأکید کنید.

۴ــ دانش‌آموزان باید بدانند چگونه واحدهای روی محور را به دو قسمت، سه قسمت و … تقسیم کنند. پس لازم است قبل از شروع فعالیت این مطلب یادآوری شود.

۵ــ توجه دانش‌آموزان را به این مطلب جلب کنید که چگونه W از روی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ از روی W ساخته شده است.

۶ــ اجازه دهید دانش‌آموزان درباره روش‌های مختلف گفته شده در فعالیت با هم بحث کنند، دنبال بهترین راه حل نباشید.

اشتباهات رایج

۱ــ دانش‌آموزان نامساوی $۳ \leq ۳$ را غلط فرض می‌کنند در صورتی که درست است.

۲ــ دانش‌آموزان ۲/۸۷۵ را از ۲/۹ بزرگ‌تر می‌بینند.

۳ــ دانش‌آموزان در محاسبه $-۱+\frac{۲}{۳}$ را مساوی $-۱\frac{۲}{۳}$ می‌گیرند در صورتی که $-۱\frac{۲}{۳}=-۱-\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

۴ــ دانش‌آموزان در محاسبه $-\frac{۲}{۳}+\frac{۷}{۵}\div\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۱}{۳}+۲$ ابتدا ضرب را انجام می‌دهند و بعضی از آنها ابتدا $-\frac{۲}{۳}+\frac{۷}{۵}$ را محاسبه می‌کنند.

۵ــ دانش‌آموزان $-\frac{۲}{۳}$ را بزرگ‌تر از $-\frac{۱}{۳}$ می‌گیرند. در اینجا لازم است تأکید شود که هر چه عدد سمت راست محور باشد بزرگ‌تر است.

۶ــ دانش‌آموزان وقتی می‌خواهند واحد را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنند با گذاشتن ۵ نقطه در واقع آن را به ۶ قسمت تقسیم می‌کنند.

اهداف

ــ پیدا کردن مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$, $\sqrt{۳}$, $\sqrt{۵}$, ... به کمک ماشین حساب و توجه به اینکه ماشین حساب‌های مختلف به دلیل اینکه بعضی ۸ خانه، بعضی ۹ خانه و... برای نمایش عدد دارند ممکن است در رقم آخر نمایش اعشاری با هم تفاوت داشته باشند (به دلیل گرد کردن)

ــشناختن اعدادی مانند $\sqrt{۲}$, $\sqrt{۱۰}$, $\sqrt{۱/۵}$ به عنوان عدد اصم

ــ نام‌گذاری اعداد اصم به صورت Q' و یا Q^C

ــ اعدادی مانند ۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰ با داشتن نظم، مشخص امّا گویا نیستند بلکه اصم هستند.

ــ عدد π اصم است.

ــ مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم و $\mathbb{R}=Q\cup Q'$

ــ اینکه بین هر دو عدد اصم بی‌شمار عدد اصم وجود دارد.

ــ آشنایی با بعضی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی به عنوان مثال $\{x|x<۵\}$

ــ دانش‌آموزان تفاوت دو مجموعه $\{x\in N|x<۵\}$ و $\{x\in R|x<۵\}$ را بدانند.

ابزار مورد نیاز :

۱ــ ماشین‌حساب

۲ــ محور اعداد

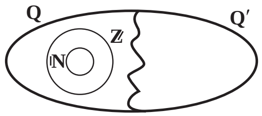
۳ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

هدف کلی این درس شناخت اعداد اصم و در نتیجه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. برای این منظور در فعالیت صفحه **۲۴** دانش‌آموزان عددی مانند $\sqrt{۲}$ را به کمک ماشین‌حساب تقریب می‌زنند و با توجه به قسمت اعشاری این عدد، تفاوت آن را با نمایش اعشاری اعدادی مانند $\frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{۷}{۶}$ متوجه می‌شوند. در ضمن ممکن است در هنگام استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری $\sqrt{۲}$ با این موضوع روبه‌رو شوند که رقم آخری که ماشین‌حساب نشان می‌دهد برای دانش‌آموزان مختلف در کلاس یکسان نباشد در اینجا دانش‌آموزان کشف می‌کنند رقم آخر با توجه به

قانون گرد کردن اعداد نوشته می‌شود. مثلاً در ماشین‌حساب ۸ رقمی، رقم آخر مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ با رقم مشابه در ماشین‌حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد زیرا در واقع در عدد ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۶۲ به دلیل وجود ۶ که از ۵ بزرگ‌تر است عدد ۵ به ۶ تبدیل شده است.

در این فعالیت اعداد گنگ معرفی می‌شود و مجموعه‌ای که این اعداد در آن قرار دارند را Q' و یا Q^C می‌نامیم. در این فعالیت عدد π نیز به عنوان عدد گنگ معرفی می‌شود.



نمایش سمبولیک برای مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و Q' ارائه شده است و جمع‌بندی مناسبی از این مجموعه در ذهن دانش‌آموزان شکل خواهد گرفت.

با انجام فعالیت صفحه ۲۵ طبق مراحل ذکر شده، دانش‌آموزان به طور انتزاعی پاره‌خطی را در ذهن می‌آورند که داخل آن سوراخ‌هایی قرار دارند که نمی‌گذارند پاره‌خط مورد نظر شکل واقعی خود را بیابد و این اعدادی که مانع از تشکیل این پاره خط هستند اعداد گنگ یا اصم هستند.

با انجام این فعالیت باید این روند در ذهن دانش‌آموزان شکل بگیرد که ما به کمک مجموعه $\mathbb{N}$، مجموعه $\mathbb{Z}$ را و به کمک مجموعه Z ، Q را ساختیم ولی اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$، ... وجود دارند که در Q نیستند و مجموعه جدیدی را تشکیل می‌دهند که باعث خلق مجموعه $\mathbb{R}$ می‌شود.

با انجام کار در کلاس صفحه ۲۶، دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که بین هر دو عدد گنگ نیز می‌توان بی‌شمار عدد گنگ به‌دست آورد و بین هر دو عدد گویا نیز بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. برای مثال :

$$۱)\ \sqrt{۵} < \sqrt{۵/۲} < \sqrt{۶} < \sqrt{۷/۸} < \sqrt{۸} < \cdots < \sqrt{۱۰}$$

$$۲)\ ۲ = \sqrt{۴}, ۳ = \sqrt{۹} \Rightarrow \sqrt{۴} < \sqrt{۴/۸} < \sqrt{۵} < \cdots < \sqrt{۹}$$

در تمرین ۳ کار در کلاس روی این موضوع تأکید می‌شود که اعداد گویا که در رابطهٔ $۲ \le x \le ۳$ صدق می‌کنند یک پاره خط را نمایش نمی‌دهد چون اعداد گنگ بین آنها این اجازه را نخواهند داد که این پاره‌خط تشکیل شود.

در فعالیت شماره ۳ صفحه ۲۷ بعضی از زیر مجموعه‌های مجموعه R به صورت $\{x \in R | x < ۳\}$ یا $\{x \in x | -۱ < x \le ۴\}$ روی محور نمایش داده شده‌اند.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۲۷، به یک بدفهمی دانش‌آموزان توجه شده است که آنها

مجموعه $\{x \in R | x > -۲\}$ فقط اعداد ۱– و ۰ و ۱ و ۲ و ... در نظر نگیرند.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ برای تدریس این درس دانش‌آموزان به ماشین حساب نیاز دارند. در جلسه قبل به آنها یادآوری کنید با خود ماشین‌حسابی را بیاورند که بتواند جذر اعداد را محاسبه کنند.

۲ــ قبل از شروع درس رابطه فیثاغورث و نمایش اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ ، ... را روی محور یادآوری کنید.

۳ــ از دانش‌آموزان به طور شفاهی بخواهید عددی بزرگ‌تر از مثلاً ۵ بگویند آیا پاسخ خواهند داد ۶ و ۷ و ... قانع نشوید از آنها بخواهید غیر از این مدل عددها، عددهای دیگر را معرفی کنند. مثلاً ۵/۲ و ۵/۰۰۱ و ...

۴ــ از دانش‌آموزان بخواهید به طور ذهنی مقدار تقریبی مثلاً $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۵}$ و $\sqrt{۷۰}$ را بگویند مثلاً بگویند $\sqrt{۷}$ می‌شود ۲ و خرده‌ای.

۵ــ بعد از فعالیت فوق از آنها بخواهید به طور ذهنی عددهایی مانند $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۵}$ و... را بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهند. دانش‌آموزان را در انجام این فعالیت درگیر کنید.

۶ــ در پایان فعالیت به کمک بچه‌ها، عددی را بگویید و از آنها بخواهید بگویند این عدد به کدام‌یک از مجموعه‌های خوانده شده تعلق دارد مثلاً ۶– متعلق به Z و Q و R می‌باشد.

۷ــ وقتی فعالیت‌های کتاب را انجام دادید در پایان یک‌بار روند به‌وجود آمدن $\mathbb{R}$ را در کلاس مرور کنید.

۸ ــ به دانش‌آموزان فرصت دهید آموخته‌های خود را سازماندهی کنند.

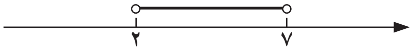
اشتباهات رایج

۱ــ وقتی می‌گوییم اعداد بین مثلاً ۵ و ۱۰، دانش‌آموزان فقط به اعداد طبیعی ۶ و۷و۸ و۹ اشاره می‌کنند. باید در فواصل درس تأکید کنیم مثلاً ۵/۲ و ۷/۹ و ۵/۰۰۰۱ نیز اعدادی بین دو عدد ۵ و ۱۰ می‌باشند.

۲ــ دانش‌آموزان نظم در اعدادی مانند ۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰ را به معنای وجود تناوب می‌گیرند در صورتی که این عدد گنگ است و گویا نیست.

۳ـ $\frac{5}{0}$ عدد حقیقی نیست و در واقع $\frac{5}{0}$ کلاً عدد نیست.

۴ـ $\frac{0}{5}$ همان صفر است.

۵ـ دانش‌آموزان $\{x|2<x<7\}$ را مساوی {۶و۵و۴و۳} می‌گیرند. تأکید کنیم مجموعه $\{x|2<x<7\}$ را می‌توان روی محور به صورت  نمایش داد و توسط اعضا نمی‌توانیم آن را نمایش دهیم.

درس سوم: قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

اهداف

ــ شناخت علامت قدرمطلق

ــ تغییر هندسی قدرمطلق

ــ بیان مفهوم جبری قدرمطلق

ــ محاسبه قدرمطلق یک عدد

ــ کاربرد قدرمطلق در محاسبه عباراتی مانند $|A|$ $\sqrt{A}$

ــ دانش‌آموزان بتوانند عبارات فارسی را به ریاضی و برعکس بنویسند.

ابزار مورد نیاز :

۱ــ محور اعداد

۲ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۲۹، دانش‌آموزان فاصله دو نقطه A و B که نسبت به مبدأ مختصات قرینه هستند را مساوی ۲ به‌دست می‌آورند و برعکس دو نقطه به‌دست می‌آورند که فاصله آنها تا مبدأ مساوی مثلاً ۲ واحد می‌باشد. پس دانش‌آموز می‌تواند عبارت |۲| را به دو صورت بخواند، قدرمطلق ۲ و یا فاصله ۲ از مبدأ و عبارت |۲−| را نیز می‌تواند به دو صورت بخواند قدر مطلق ۲− و یا فاصله ۲− از مبدأ را که در هر دو حالت داریم ۲ = |۲−| = |۲|. با چند مثال نشان می‌دهیم که ۵ = |۵| و ۵ = |۵−| چیزی که مهم است آن است که برای به‌دست آوردن جواب |۵−| گفته نشود که علامت ۵− حذف می‌شود بلکه گفته شود که (۵−) را قرینه می‌کنیم. و این به بیان جبری قدر مطلق کمک کرد. با تمرین کافی در این قسمت به دانش‌آموزان فرصت دهیم که خود به بیان جبری قدرمطلق پی ببرند.

$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

$a > 0 \Rightarrow |a| = a$ خود عدد

$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$ قرینه عدد

تأکید می‌کنیم که در واقع $-a$ عددی مثبت است چون a منفی است.

در کار در کلاس صفحه ۳۰ تمرین ۱، دانش‌آموزان جملات فارسی را به مفهوم معادل آن به زبان ریاضی وصل می کنند یعنی (۱) به د، (۲) به الف، (۳) به ب، (۴) به ج و (۵) به هـ وصل خواهد شد.

در تمرین ۲ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲،ب به ۳ و ج به ۱ وصل می‌شود.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲، ب به ۳، ج به ۱ و د به ۴ وصل می‌شود.

در تمرین ۴ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ دانش‌آموزان می‌توانند مثال‌های زیر را مطرح کنند.

۱) $|ab| = |a|\,|b|$

$|-۳ \times ۷| = |-۲۱| = ۲۱$

$|-۳ \times ۷| = |-۳| \times |۷| = ۳ \times ۷ = ۲۱$

۲) $|a + b| \leq |a| + |b|$

$|-۴ + ۹| \not\geq |-۴| + |۹|$

$۵ \not\geq ۴ + ۹$

با توجه به مقدار تقریبی این اعداد دانش‌آموزان راجع به مثبت یا منفی‌بودن مقدار داخل رادیکال قضاوت خواهند کرد و با توجه به تعریف جبری قدرمطلق حاصل عبارت را بدون استفاده از نماد قدرمطلق خواهند نوشت.

در فعالیت صفحه ۳۱، بعد از انجام فعالیت دانش‌آموزان به این نکته توجه خواهند کرد که حاصل عبارت $\sqrt{A^{۲}} = |A|$ خواهد شد و همیشه نمی‌توانند $\sqrt{A^{۲}} = A$ را استفاده کنند.

در شروع فعالیت اعداد کوچک هستند و دانش‌آموزان آن را به توان ۲ می‌رسانند ولی در ادامه فعالیت از اعداد بزرگ استفاده شده است که به توان ۲ رساندن آنها برای دانش‌آموزان سخت است و آنها دنبال راه چاره گشته، متوجه می‌شوند که این اعداد باید به صورت مثبت از زیر رادیکال خارج شوند، که همان مفهوم قدر مطلق است. پس :

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}} = |\overbrace{۱-\sqrt{۳}}^{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۳}) = -۱+\sqrt{۳}$$

در کار در کلاس صفحه ۳۲، چون $۰/۲^{۵}$ از $۰/۲^{۶}$ بزرگ‌تر است پس حاصل $۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}$ مثبت است. پس :

$$|۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}| = ۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}$$

و $۷^{۴}$ از $۷^{۳}$ بزرگ‌تر است و

$$|۷^{۳} - ۷^{۴}| = -(۷^{۳} - ۷^{۴}) = ۷^{۴} - ۷^{۳}$$

در تمرین ۳ به‌جای $\square$ می‌توان اعدادی مانند ۸− و ۲ و ۰ و ۵ و ۲− و ... را قرار داد.

و یا

$$|۵ - ۱۲| > ۱ + \square$$

$$۷ > ۱ + \square$$

در تمرین ۵ اگر به‌جای a اعداد منفی قرار دهیم به یک عبارت نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sqrt{(-۸)^{۲}} \neq -۸$$

توصیه‌های آموزشی

۱ـ برای محاسبه حاصل $|-۴|$ به هیچ وجه نگویید علامت منفی حذف می‌شود بلکه بگویید قرینه ۴- می‌شود ۴ یعنی : $۴=(-۴)- = |-۴|$ و یا از مفهوم فاصله استفاده کنید.

۲ـ برای محاسبه عبارتی مانند $|\sqrt{۵}-۱|$ و یا $|-۱+\sqrt{۲}|$ از دانش‌آموزان بخواهید با ذکر دلیل توضیح دهند حاصل این عبارت چه خواهد شد.

۳ـ از گسترش مفهوم قدر مطلق به مطالب سخت‌تر خودداری کنید زیرا این مفهوم برای دانش‌آموزان بسیار جدید و انتزاعی است.

اشتباهات رایج

۱ـ دانش‌آموزان $\sqrt{a^{۲}}=a$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند $\sqrt{a^{۲}}=|a|$

۲ـ دانش‌آموزان $\sqrt{(-۳۰۰)^{۲}}=-۳۰۰$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند

$$\sqrt{(-۳۰۰)^{۲}}=۳۰۰$$

۳ـ اگر برای محاسبه مقدار $|-۵|$ گفته شود علامت منفی را حذف می‌کنیم دانش‌آموزان در محاسبه حاصل $|\sqrt{۷}-۱|$ علامت منفی را حذف می‌کنند و می‌نویسند $\sqrt{۷}+۱$

۴ـ دانش‌آموزان می‌نویسند $|a|=\pm a$ که غلط است زیرا جواب $|a|$ فقط یک عدد است اگر $a\geq ۰$ باشد $|a|=a$ و اگر $a<۰$ باشد $|a|=-a$.

حل تمرین‌های فصل ۲

تمرین

۱ـ پس از محاسبهٔ هر قسمت، کسر حاصل را تا حد امکان ساده کنید :

$$\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۸}=\frac{۲۰-۳}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴} \qquad -۱+\frac{۳}{۴}=-\frac{۱}{۴} \qquad ۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\frac{۵}{۶}\div ۲\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۶}\div\frac{۵}{۲}=\frac{۵}{۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}}\div ۵\frac{۱}{۳}=\frac{\frac{۴-۲+۳}{۴}}{\frac{۱۰-۱۵-۱۰}{۲۰}}\div\frac{۱۶}{۳}$$

$$=\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{-۱۵}{۲۰}}\times\frac{۳}{۱۶}=-\frac{۵}{۳}\times\frac{۳}{۱۶}=-\frac{۵}{۱۶}$$

$$(-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲})\div(-۱-\frac{۱}{۹})$$

$$=(\frac{-۱۷}{۶}+\frac{۷}{۲})\div(\frac{-۹-۱}{۹})$$

$$=(\frac{-۱۷+۲۱}{۶})\div(-\frac{۱۰}{۹})=\frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}}{\underset{۲}{\cancel{۶}}}\times(-\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}}{\underset{۵}{\cancel{۱۰}}})=-\frac{۳}{۵}$$

$$-۲\frac{۱}{۲}-۳\frac{۱}{۳}+۴\frac{۷}{۱۲}=-\frac{۵}{۲}-\frac{۱۰}{۳}+\frac{۵۵}{۱۲}$$

$$=\frac{-۳۰-۴۰+۵۵}{۱۲}=\frac{-۱۵}{۱۲}=-\frac{۵}{۴}=-۱\frac{۱}{۴}$$

$$-\frac{۱}{۲}+\frac{-۵}{۶}\div\frac{۷}{۳}\times\frac{۷}{۵}+\frac{۲}{۳}$$

$$=-\frac{۱}{۲}+\frac{\overset{-۱}{\cancel{-۵}}}{\underset{۲}{\cancel{۶}}}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\cancel{۷}}\times\frac{\cancel{۷}}{\cancel{۵}}+\frac{۲}{۳}=-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}$$

$$=\frac{-۳-۳+۴}{۶}=-\frac{۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(۲\div\frac{-۶}{۵})$$

$$=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{۱}\times-\frac{۵}{\underset{۳}{\cancel{۶}}})=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(-\frac{۵}{۳})$$

$$=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\times\frac{-۳}{۵}=\frac{۵}{۶}+\frac{۲۱}{۴۰}=\frac{۱۰۰+۶۳}{۱۲۰}=\frac{۱۶۳}{۱۲۰}$$

$$\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}}=\frac{۱}{-۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}}=-۴$$

۳ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف) $\frac{۷}{۸}\,,\,-\frac{۲}{۳}\,,\,\frac{۳}{۴}\,,\,۲\,,\,-۳\frac{۵}{۶}$

$$-۳\frac{۵}{۶}<-\frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۸}<۲$$

ب) $\frac{۱۶}{۷}\,,\,-\frac{۳}{۴}\,,\,۲/۷۵\,,\,-\frac{۵}{۶}\,,\,۴\frac{۳}{۵}\,,\,\frac{۵۶}{۱۳}$

$$-\frac{۵}{۶}<-\frac{۳}{۴}<\frac{۱۶}{۷}<۲/۷۵<\frac{۵۶}{۱۳}<۴\frac{۳}{۵}$$

۴ــ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{۱۰}{۱۱}\,,\,\frac{۱۲}{۱۳}$

$$\frac{۱۰}{۱۱}<\ ?\ <\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\frac{۱۳۰}{۱۴۳}<\ ?\ <\frac{۱۳۲}{۱۴۳}\rightarrow\frac{۲۶۰}{۲۸۶}<?<\frac{۲۶۴}{۲۸۶}$$

$$\frac{۲۶۱}{۲۸۶},\frac{۲۶۲}{۲۸۶},\frac{۲۶۳}{۲۸۶}$$

ب) $۰\,,\,-\frac{۱}{۳}\ \rightarrow\ -\frac{۱}{۳}<?<\frac{۰}{۳}$

$$-\frac{۴}{۱۲}<?<\frac{۰}{۱۲}$$

$$\rightarrow-\frac{۳}{۱۲},-\frac{۲}{۱۲},-\frac{۱}{۱۲}$$

تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید :

مجموعهٔ اعداد	$\frac{۶}{۲}$	-۱۰	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۹....	$-\frac{۳}{۴}$	π	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳/۲}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	✓	×	×	×	×	×	×	×
W حسابی	✓	×	×	×	×	✓	×	×
$\mathbb{Z}$ صحیح	✓	✓	×	×	×	✓	×	×
Q گویا	✓	✓	×	✓	×	✓	✓	×
Q' گنگ	×	×	✓	×	✓	×	×	✓
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱/۵ < x < ۵\}$, $B = \{x \in Q \mid ۱/۵ < x < ۵\}$

مجموعه A شامل تمام اعداد حقیقی بین ۱/۵ و ۵ است درحالی که مجموعه B شامل تمام اعداد گویا بین ۱/۵ و ۵ است.

ب) $C = \{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۹\}$

مجموعه C اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است درحالی که مجموعه D تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است.

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - Q' = Q$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{R} \cap Q' = Q'$

۴ــ عدد $\sqrt{۵}$ +۱ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ ۳ و ۴

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

الف) ۵ و ۲− ب) ۷ و ۶ ج) $\sqrt{۳}, ۶$ د) $\sqrt{۲}, \sqrt{۴/۱}$

$۵ = \sqrt{۲۵}$ $۶ = \sqrt{۳۶}$ $\sqrt{۵}, \sqrt{۶}, \sqrt{۷}, \sqrt{۸}$ $\sqrt{۲,۱}, \sqrt{۲,۵}, \sqrt{۳}, \sqrt{۳,۵}$

$-۲ = ۰\sqrt{۴}$ $۷ = \sqrt{۴۹}$

$\sqrt{۲۱}, \sqrt{۱۷}$ $\sqrt{۳۷}, \sqrt{۳۸}$

$\sqrt{۵}, -\sqrt{۳}$ $\sqrt{۳۹}, \sqrt{۴۰}$

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☑ ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. $\frac{۶}{۲}$

☑ ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

☑ ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{۲}$

☑ ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. ۳

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

$\sqrt{۱۰}$ به دلیل نداشتن دوره تناوب گنگ بوده ولی $\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۰۰$

$\frac{۳}{۱۱}$ متناوب بوده و عددی گویا است $\frac{۳}{۱۱} = ۰/\overline{۲۷}$

تمرین

۱ــ اگر $a=۰/۲۵$, $b=-\frac{۱}{۴}$, $c=۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$|a+b| + ۲|a-b-c|$

$|۰/۲۵+(-۰/۲۵)|+۲|۰/۲۵-(-۰/۲۵)-۲/۵| = ۲|۰/۵-۲/۵| = ۲|-۲| = ۲\times۲ = ۴$

۲ــ حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

الف) $|-۳\sqrt{۵}|$ ب) $|۷-۵\sqrt{۳}|$ ج) $|۰+\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$

$= -(-۳\sqrt{۵})$ $= -(۷-۵\sqrt{۳})$

$= ۳\sqrt{۵}$ $= -۷+۵\sqrt{۳}$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

هر عدد کوچک‌تر از ۶ صحیح است.

۷

$|۵-\cancel{۱۲}| > ۱ + \boxed{۵}$

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید

عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل |a|+a منفی باشد؟   خیر

$a=-۲\rightarrow|a|+a=|-۲|+(-۲)=۰$

$a=۰\rightarrow|a|+a=|۰|+۰=۰$

$a=۲\rightarrow|a|+a=|۲|+۲=۴$

۵ــ با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^۲}=a$ را نشان دهید.

$\sqrt{(-۷)^۲}=|-۷|=+۷\neq-۷$

۶ــ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید : $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲}$ $\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$

$\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\left|\sqrt{۲}-۱\right|=\sqrt{۲}-۱$

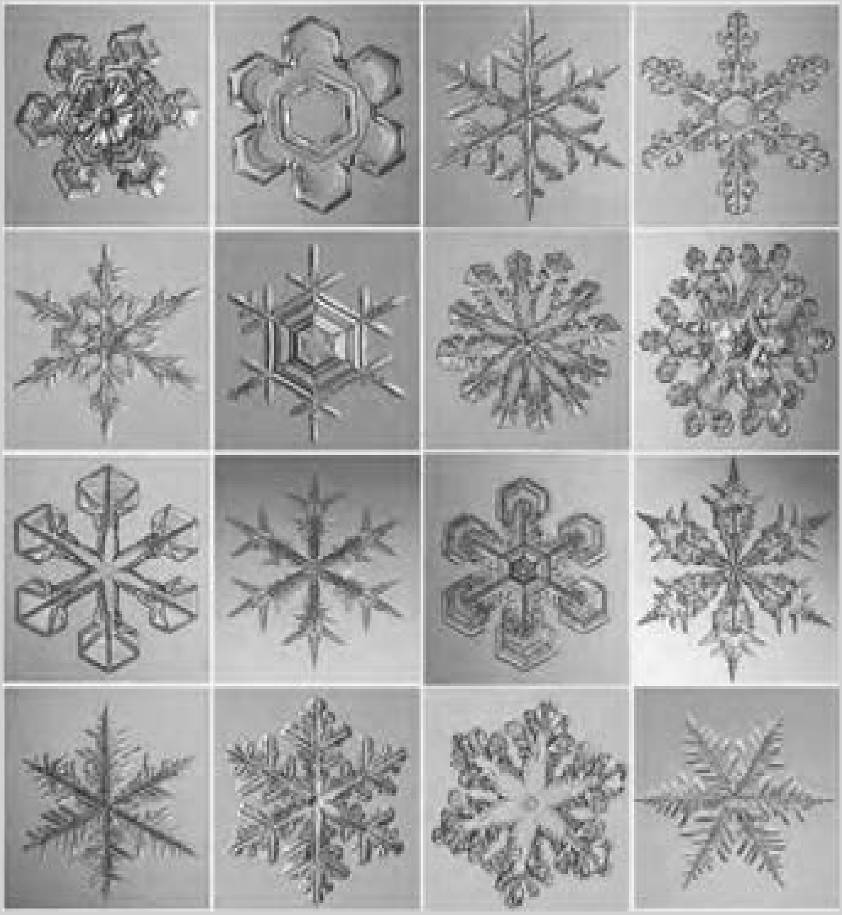
$\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲}=\left|۱-\sqrt{۱۰}\right|=-(۱-\sqrt{۱۰})=-۱+\sqrt{۱۰}$

فصل ۲

استدلال و اثبات در هندسه

اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

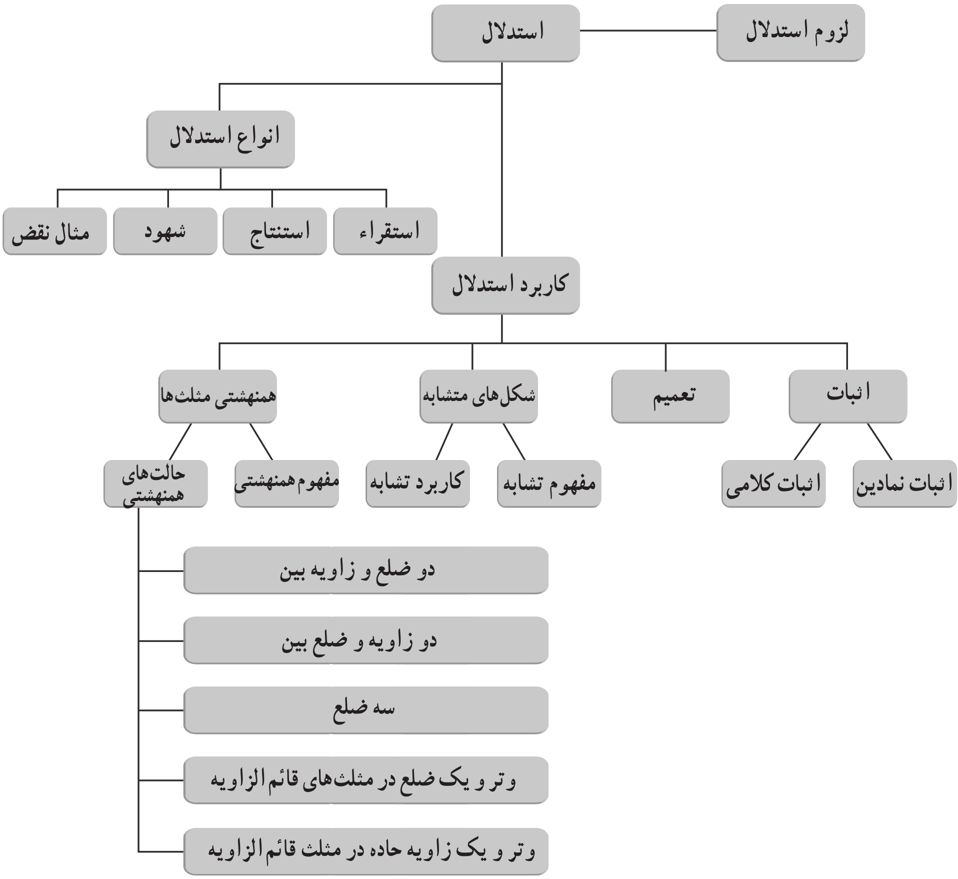


بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

نگاه کلی به فصل

ــ تفکر ریاضی با به کارگیری مهارت‌های غنی ریاضی برای درک ایده‌ها، کشف روابط میان ایده‌ها، به دست آوردن یا حمایت از نتایج دربارهٔ ایده‌ها و روابط‌شان و حل مسائلی که با ایده‌ها سروکار دارند، شکل می‌گیرد. استدلال ریاضی بخشی از فرایند ریاضی است. این فصل شامل پنج درس می‌باشد که در دو درس اول، دانش‌آموز با استدلال، اثبات و نیز برخی مفاهیم مانند تعمیم که در استدلال‌ها به‌کار می‌روند آشنا می‌شود. در درس‌های سوم و چهارم، همنهشتی مثلث‌ها و تسلط نسبی بر حل مسائل آن و نوشتن منظم برخی اثبات‌ها با نمادهای ریاضی مدنظر می‌باشد و نیز با برخی مطالب که در حل مسائل او را یاری می‌نماید آشنا خواهد شد و در درس آخر این فصل با مفهوم تشابه آشنا می‌شود.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

استدلال ریاضی قسمتی از تفکر ریاضی است که با تشکیل تعمیم‌ها و به دست آوردن نتایج معتبر دربارهٔ ایده‌ها و چگونگی ارتباط آنها درگیر است. دو نوع مهم استدلال ریاضی، استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی است.

بینش پولیا : یک اثبات ریاضی، استدلالی مدلّل (استنتاجی) است در صورتی که شواهد استقرایی یک فیزیکدان، شواهد محیطی (مربوط به موقعیت) یک وکیل دادگستری، شواهد آماری یک اقتصاددان، متعلق به استدلال محتمل را دارا باشد. استدلال استقرایی حالت خاصی ازاستدلال محتمل است.

با وجود اینکه پولیا استدلال تمثیلی و استدلال استقرایی را به عنوان حالت‌های خاص استدلال محتمل و استدلال نسبی (نسبی، مشابهتی) را به عنوان یک حالت از استدلال تمثیلی محسوب می‌کند، ما به‌طور مقدماتی و ابتدایی با استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی سروکار خواهیم داشت.

استدلال استقرایی : یک فرایند استدلال ریاضی است که اطلاعات دربارهٔ بعضی از اعضای یک مجموعه را به‌کار می‌گیرد تا یک تعمیم در مورد اعضای دیگر یا همهٔ اعضای آن مجموعه بسازد.

استدلال استنتاجی : یک فرایند استدلال ریاضی است که الگوهای استنتاج به کار رفته برای به‌دست آوردن نتایج از مقدمات را معتبر می‌سازد.

توجه کنید که استدلال شرطی به‌کارگیری یک اگر ـ آن‌گاه یا گزاره‌های شرطی در فرایند استدلال استنتاجی است. الگوهای اساسی استنتاج معتبر و نامعتبر مورد استفاده در استدلال شرطی در زیر مرور شده است.

درک و فهم ریاضی

جنبه‌های گوناگون درک و فهم ریاضی نیز وابسته به شهود ریاضی است. درک و فهم ریاضی از مواردی است که به‌صورت دقیق تعریف نشده است و شاید نتوان آن را با «دقت ریاضی» تعریف کرد. فرویدنتال نه تنها پیچیدگی دانش و فهم ریاضی، بلکه تفاوت حساس بین درک و فهمی که یک معلم باید جویای آن باشد و می‌خواهیم دانش‌آموزان فراگیرند، این‌طور جمع‌بندی می‌کند : «فهمیدن در ریاضیات گونه‌های بسیار دارد. شما ممکن است هر لحظه فکر کنید به فهم نهایی فلان مطلب رسیده‌اید، چنان که دیگر چیزی نمی توان از آن دریافت. اما در ریاضیات فهم نهایی وجود ندارد. هر مسئله‌ای را می‌توان در بافتی هر دم گسترده‌تر و از نقطه نظری بالاتر فهمید آنچه پایین‌ترین می‌نماید،

شاید بالاترین باشد و در آخر اینکه می‌توان آن را از چشم‌انداز یادگیرنده فهمید.»

با این حال باید با جوانب مختلف درک و فهم ریاضی آشنا بود. دسته‌بندی زیر می‌تواند تسهیل کننده باشد.

۱ــ درک معنا شناختی یعنی شناخت اطلاعات مندرج در مفاهیم و قضایا.

۲ــ درک منطقی یعنی شناخت پیوندها و رابطه‌های منطقی قضایایی که به‌صورت حقایق پذیرفته شده شخصی درآمده‌اند.

۳ــ درک شهودی یعنی قانع شدن واقعی به درستی یک قضیه و توانایی به‌کارگیری صحیح مفاهیم، بدون توسل به تعاریف رسمی و وارسی مکانیکی.

۴ــ درک ریاضی یعنی آگاهی از مقاصد درونی ابزارهای ریاضی، مثلاً ساده کردن یک عبارت گویا برای تسهیل محاسبه مقدار عددی آن به‌ازای مقادیر مختلف متغیرها، یا توسل به فرض‌های غیربدیهی به عنوان اصل پذیرفته شده، برای ساده کردن یک موقعیت

۵ــ درک ریاضی یعنی آگاهی از کاربردپذیری بیرونی بالقوه ریاضیات.

مشکلات مهم دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی کدامند؟

روشن است که دانش‌آموزان مشکلات قابل‌توجهی در مورد استفاده از الگوهای استنتاجی معتبر دارند.

- بسیاری از دانش‌آموزان مشکل به‌کارگیری استدلال صوری برای کشف نتایج الزامی در الگوهای استنتاجی درگیر با عبارت‌های اگر ــ آنگاه (غیر از قیاس استثنایی) دارند.
- غالباً دانش‌آموزان عبارت «اگر ــ آنگاه» را مثل «اگر و تنها اگر» تعبیر می‌کند. بسیاری از آنها ارزشمندی الگوی استنتاجی قیاس استثنایی منفی (نقیض انتزاع) را نمی‌شناسند.
- بسیاری از دانش‌آموزان الگوهای استدلالی نامعتبر وارونه و معکوس را نمی‌شناسند.
- مشکل بسیاری از آنها به عبارت‌های شرطی منفی مربوط است.

دلایل اصلی خطاهای استدلال استنتاجی چیست؟

پژوهش واسون و یوهانسون ــ لیارد شواهد مؤثری برای موردی که خطاهای حساب منطق تنها مربوط به قسمتی از خطاهای استدلال استنتاجی است، ارائه می‌کند. همچنین می‌توانند نتیجهٔ دشواری حفظ اثر اطلاعات و نبودن نشانه‌های معنایی (معنی‌شناسی) که به یک تفسیر معین علامت

می‌فرستند، باشند. یونز، هنگامی که خطاهای به‌وجود آمده در استدلال استنتاجی را تفسیر می‌کرد، یک آزمون قوی به‌وجود آورد به‌طوری که نه تنها موضوعات منطق صوری، بلکه عملیات ذهنی موردنیاز برای انجام تکالیف را مورد بررسی قرار می‌داد.

دلایل اشتباهات در استدلال استنتاجی برگرفته از چندین مطالعه در زیر جمع‌بندی شده است.

● خطاها در استدلال استنتاجی به وسیلهٔ افزودن، جرح و تعدیل یا چشم پوشیدن مواردی از مقدمات به‌وجود می‌آیند.

● اشتباهات به وسیلهٔ پذیرفتن محتوای واقعی به‌جای الگوی استنتاجی به‌وجود آمده‌اند. الگوهای سنتی سخنرانی (مباحثه) روزمره اغلب منطق را باطل می‌کند.

● دلایل دیگر اشتباهات، مشکلات زبانی هستند. تعداد و مکان منفی‌ها، طول کلمه و جمله و سرریز شدن شناختی از آن جمله هستند.

● ناتوانی در پذیرش فرضیه، گونه‌ای دیگر از علت‌های این خطاها می‌باشد.

آیا توانایی‌های استدلال استنتاجی از راه آموزش بهبود می‌یابد؟

برخی از مطالعات آشکار کرد که آموزش با استفاده از مواد و وسایل دست‌ورزی انتخاب شده، تأثیر مثبت روی توسعهٔ توانایی استدلال منطقی کودکان سال دوم و سوم دارد. سویز و باینفورد گزارش کردند که چارک بالای دانش‌آموزان سال پنجم و ششم می‌توانند مقدمات اصلی منطق را درسطح ۸۵ درصد از آنچه که در مطالعهٔ یکسان دانشجویان دانشگاه به آن دست می‌یابند، به‌کار بگیرند و در یک فاصله زمانی بلند آن را گسترش می‌دهند. انیس و پائولوس نشان دادند که منطق کلاسی می‌تواند با موفقیت برای دانش‌آموزان ۱۱ و ۱۲ ساله آموزش داده شود اما این آموزش به دانش‌آموزان کمک نمی‌کند تا الگوهای نامعتبر را کشف و شناسایی کنند. شیپمن این را یافت که معلّم معمولی که از زبان و ایده‌های شرطی در کلاس درس استفاده می‌کند، به‌نظر می‌رسد که تأثیر مثبتی بر رشد توانایی استدلالی دانش‌آموزان دارد.

● دورهٔ قبل از بلوغ کودکان (۹ تا ۱۲ سالگی) می‌تواند برای توسعهٔ بعضی از انواع توانایی‌ها، استدلال استنتاجی به وسیلهٔ تجربیات به‌طور دقیق طرح شده، به‌کار رود.

● استدلال کلاسی را می‌توان در اوایل دورهٔ بلوغ آموزش داد اما موفقیت آموزشی مهم در بهبود و اصلاح توانایی‌های قبل از ۱۶ سالگی دورهٔ بلوغ برای شناخت روش‌های استنتاجی نامعتبر گزارش نشده است.

● جایی که یک معلّم اغلب به‌طور طبیعی ایده‌ها و زبان استدلالی اگر ــ آن‌گاه را به‌کار می‌برد، همبستگی مثبت بین رشد توانایی استدلال و به عمل درآمدن در کلاس درس وجود دارد.

مشکلات اصلی دانش‌آموزان با اثبات‌ها چیست؟

سنک یک نمونه ۱۵۲۰تایی از دانش‌آموزان درس هندسه را انتخاب کرد و در مورد مشکلات دانش‌آموزان با اثبات‌های هندسی گزارش ارائه کرد. در زیر یافته‌های اصلی سنک و ارنست بیان شده است.

● دانش‌آموزان مشکلات زبانی و منطقی با اثبات‌ها دارند و این مشکل برای به‌وجود آوردن یک اثبات سدّ راه می‌شود. آنها اغلب قضیه‌ای که باید ثابت شود را به عنوان دلیل در اثبات خودش و صور استنتاجی نامعتبر را مورد استفاده قرار می‌دهند.

● اثبات با نمودارهایی که شامل چند مجموعه از مثال‌های محاط شده یا خطوط کمکی موردنیاز می‌باشند، از جمله مشکل‌ترین‌ها بودند. اثبات‌های تشابه بیشتر از اثبات‌های همنهشتی که همان تعداد استنتاج نیاز دارد، دشوار هستند.

● دانش‌آموزان با پیچیدگی اصل استقرای ریاضی مشکل دارند.

● عدم تفاوت مربوط به جنسیت در اثبات‌نویسیِ موفقیت‌آمیز مشهود است.

نگاهی به نقش اثبات در کلاس درس

نقش اثبات در کلاس درس همانند نقش آن در پژوهش ریاضی نیست. در تحقیقات ریاضی اثبات برای متقاعد کردن و رسمیت بخشیدن یک ایده است. در صورتی که در کلاس درس اثبات برای توضیح دادن، روشن کردن یک مفهوم یا یک حکم، مورد نیاز است؛ توضیح برای اینکه چرا قضیه‌ای درست است، در کلاس اثبات به مفهوم منطق صوری نیست. در کلاس اثبات‌های غیررسمی، غیرصوری یا نیمه‌صوری با زبان طبیعی (معمولی) ارائه می‌شود و می‌توانند در درون خود، زیر اثبات‌های صوری یا محاسبات را به‌کار گیرند.

بعضی از معلمین خیال می‌کنند که : «اگر کلاس ریاضی است، باید ثابت کرد. اگر چیزی ثابت نمی‌شود، آن ریاضی نیست!» این تصور و باور یک پیامد مستقیم در تدریس دارد. زیرا اگر اثبات، ریاضی است و ریاضی، اثبات است، آن‌گاه مأموریت معلم در کلاس، اثبات کردن است. در این صورت، بیشتر وقت کلاس به اثبات می‌گذرد؛ اثبات‌های راستین و دقیق تا احساس کنند کلاس واقعاً وجود دارد!

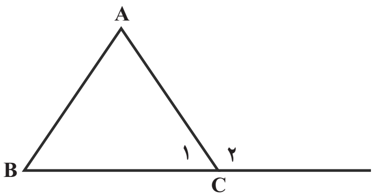
دراین دیدگاه ارائه اثبات به دانش‌آموز انگیزشی است ناخردمندانه و ناآگاهانه! اگر معلم دلیلی بهتر از اینکه «ریاضی یعنی این» ارائه ندهد، دانش‌آموز می‌داند که تنها یک اثبات دیده است، اما نه چرایی آن.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ استدلال‌های زیر را به‌ترتیب میزان اعتبارشان مشخص کنید.

الف) فردی ده مثلث مختلف را بررسی کرد و دید که در همهٔ آنها هر سه میانه در یک نقطه به‌هم می‌رسند و از این موضوع نتیجه گرفت در همهٔ مثلث‌ها، میانه‌ها در یک نقطه به هم می‌رسند.

ب) استدلال زیر نشان می‌دهد هر زاویهٔ خارجی یک مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است فرض کنیم $\hat{C}_۲$ مانند شکل زیر زاویهٔ خارجی مثلث دلخواهی مانند ABC است داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_۱=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}_۲$$

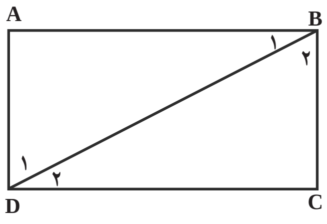
پس زاویهٔ $\hat{C}_۲$ برابر مجموع دو زاویهٔ B و A است پس از هرکدام آنها بزرگ‌تر است.

۲ــ یک نمونه از استدلال‌های درست و یک نمونه از استدلال‌های غلطی را که شنیده‌اید بنویسید.

۳ــ مسئلهٔ زیر را به همراه حل آن در نظر بگیرید. فرض، حکم و پیش دانسته‌ای که در استدلالِ حلِ آن مورد استفاده قرار گرفته‌اند بنویسید.

مسئله : مجموع زوایای یک مستطیل برابر ۳۶۰° است.

حل : مستطیلی دلخواه مانند شکل صفحهٔ بعد را درنظر می‌گیریم و یکی از قطرهای آن را (مثلاً BD) رسم می‌کنیم.



داریم : $\hat{B}=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲$ و $\hat{D}=\hat{D}_۱+\hat{D}_۲$ پس :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{C}+\hat{D}_۱+\hat{D}_۲$$

$$=(\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{D}_۱)+(\hat{C}+\hat{B}_۲+\hat{D}_۲)=۱۸۰^\circ+۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

۴ــ فرض و حکم مسئله زیر را بنویسید.

ــ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر.

۵ــ مسئله‌ای طرح کنید که در آن حکم کلی غلطی آورده شده است و با یک مثال نقض، درستی آن را رد کنید.

۶ــ «همهٔ شکل‌های هندسی دارای حداقل یک زاویه می‌باشند».

حکم بالا درست است یا غلط؟ چگونه ادعای خود را ثابت می‌کنید؟

۷ــ استفاده از شهود چه کاربردهایی در ریاضیات دارد؟

۸ــ الف) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که غلط بوده است بنویسید.

ب) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که درست بوده است بنویسید.

۹ــ درستی یا نادرستی هریک از استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

احمد می‌داند که هر وقت باران ببارد حیاط خانه آنها خیس می‌شود.

الف) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس شده است و نتیجه گرفت که حتماً باران باریده است.

ب) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس نیست و نتیجه گرفت باران نباریده است.

۱۰ــ هر وقت دوچرخهٔ علی پنچر شود او دیر به مدرسه می‌رسد. علی دیر به مدرسه رسیده است پس حتماً دوچرخه‌اش پنچر شده است.

کدام استدلال زیر مشابه استدلال بالاست.

هر وقت معلم ریاضی به کلاس A می‌رود بچه‌های کلاس A خوشحال می‌شوند.

الف) بچه‌های کلاس A خوشحال نیستند پس معلم ریاضی به کلاس آنها نرفته است.

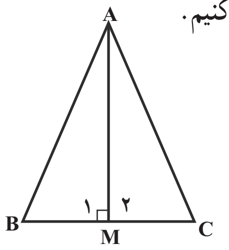
ب) بچه‌های کلاس A خوشحال‌اند پس معلم ریاضی به کلاس آنها رفته است.

ــ کدام یک ازاستدلال‌های الف و ب درست و کدام نادرست است؟

۱۱ــ آیا استدلال آورده شده برای مسئلهٔ داده شده در زیر درست است؟ علت درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

مسئله : مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{ABC}$ داده شده است. نشان دهید زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باهم برابرند.

استدلال : مانند شکل مقابل از رأس A به وسط ضلع BC عمود می‌کنیم.

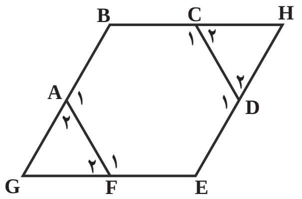


بنابراین داریم : $BM = CM$ و $\hat{M}_{۱} = \hat{M}_{۲} = ۹۰^\circ$

حال داریم :

$$\begin{cases} AM = AM \quad \text{مشترک} \\ \hat{M}_{۱} = \hat{M}_{۲} \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

(ض ز ض)



۱۲ـ یک شش‌ضلعی منتظم و دو مثلث ساخته شده برروی دو ضلع آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. در زیر اثباتی آورده شده که نشان می‌دهد دو مثلث موردنظر همنهشت هستند. آیا این اثبات درست است؟ آیا می‌توان این مسئله را تعمیم داده و گفت مثلث‌هایی که به این طریق بر اضلاع یک چندضلعی منتظم ساخته می‌شوند با هم همنهشت هستند؟ چرا؟

فرض : ABCDEF یک شش‌ضلعی منتظم است

حکم : $\overset{\Delta}{GAF} \cong \overset{\Delta}{HCD}$

اثبات : می‌دانیم اگر دو زاویه برابر باشند، مکمل‌های آنها نیز باهم برابرند لذا :

$$\hat{A}_{۱} = \hat{C}_{۱} \Rightarrow \hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۲}$$

$$\hat{F}_{۱} = \hat{D}_{۱} \Rightarrow \hat{F}_{۲} = \hat{D}_{۲}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۲} \\ \hat{F}_{۲} = \hat{D}_{۲} \\ AF = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{GAF} \cong \overset{\Delta}{HCD}$$

(ز ض ز)

۱۳ــ فرض کنید مدیر یک مدرسه شرط گذاشته است که هریک از کلاس‌های آن مدرسه به شرطی به اردو برده می‌شوند که مجموع نمره‌های انضباط هر دو دانش‌آموزِ آن کلاس، ۳۴ یا بیشتر از ۳۴ شود. درکدام یک از حالت‌های زیر دانش‌آموزان یک کلاس به اردو برده می‌شوند و در کدام یک برده نمی‌شوند و در کدام یک نمی‌توان تشخیص داد برده می‌شوند یا نه؟

الف) کمترین نمره انضباط آن کلاس ۱۶ و بیشترین نمره ۲۰ بوده است.

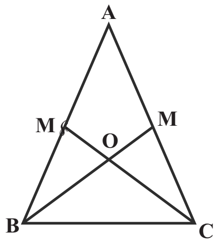
ب) کمترین نمره مربوط به فردی بوده که ۱۶ گرفته است و بقیهٔ دانش‌آموزان کلاس حداقل ۲نمره از او بیشتر گرفته‌اند.

ج) به‌جز یک دانش‌آموز بقیهٔ کلاس نمرهٔ انضباطشان ۲۰ بوده است.

د) میانگین نمره‌های انضباط کلاس ۱۹ می‌باشد.

هـ) مجموع نمره‌های انضباطِ دو نفر که هیچ کدام کمترین نمره را نگرفته‌اند ۳۴ بوده است.

۱۴ــ مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و پاره‌خط‌های BM و CM′ میانه‌اند.

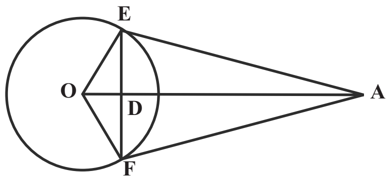


الف) ثابت کنید $\overset{\Delta}{CBM'} \cong \overset{\Delta}{BCM}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ب) ثابت کنید $\overset{\Delta}{ACM'} \cong \overset{\Delta}{ABM}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ج) ثابت کنید $\overset{\Delta}{BOM'} \cong \overset{\Delta}{COM}$

۱۵ــ در شکل مقابل پاره‌خط‌های AE و AF بر دایره در نقاط E و F مماسند.



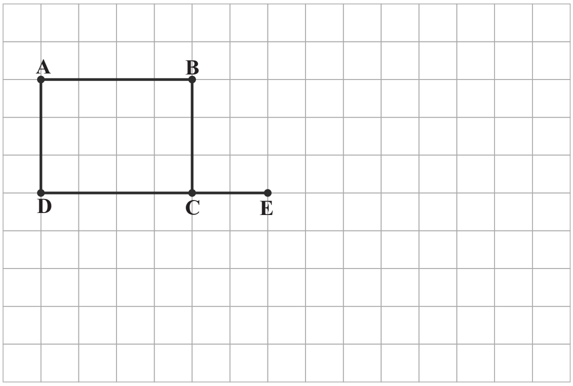
الف) ثابت کنید $\overset{\Delta}{AOE} \cong \overset{\Delta}{AOF}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ب) ثابت کنید $\overset{\Delta}{OED} \cong \overset{\Delta}{OFD}$

۱۶ــ دانش‌آموزی قصد دارد یک نقاشی از یک تصویر بزرگ به ابعاد ۵ ×۴ متر را در یک برگه به‌گونه‌ای بکشد که با تصویر واقعی متشابه باشد و عرض آن برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد. طول تصویر چقدر باید باشد؟

۱۷ــ در سؤال قبل فرض کنید دانش‌آموز موردنظر بخواهد نقاشی همان تصویر را، متشابه با آن، در برگه‌ای به ابعاد ۲۰×۱۵ بکشد. بزرگ‌ترین ابعاد ممکن از تصویر چند در چند است؟

۱۸ــ در تـصویـر مـقـابـل، مستطیلی رسم کنید که یک ضلع آن پاره‌خط CE باشد و متشابه با مستطیل ABCD باشد. مستطیل حاصل چه ابعادی می‌تواند داشته باشد؟



اهداف

ــ آشنایی با مفهوم استدلال و اثبات

ــ درک لزوم استدلال

ــ آشنایی با تفاوت‌های انواعی از استدلال‌ها و تشخیص نحوهٔ استفاده از استدلال‌های مختلف در مسائل گوناگون

ــ تشخیص آنچه در استدلال‌ها و اثبات‌ها می‌تواند استفاده کند و آنچه در ارائهٔ حدس‌ها و تشخیص راه حل‌ها می‌تواند استفاده کند.

ابزار مورد نیاز :

ــ گونیا و خط‌کش

ــ کاغذ شفاف

روش تدریس

دادن فرصت به دانش‌آموز جهت تفکر در مورد ساختار استدلال‌های ارائه شده و تفاوت آنها، که باعث تفاوت میزان اعتبار آنها نیز می‌باشد، دارای اهمیت است. یکی از اهداف این است که دانش‌آموز توجه کند در ریاضیات نیز مانند سایر زمینه‌های علمی هر موضوع مورد ادعایی که قبلاً درستی‌اش ثابت نشده است نیازمند استدلال و اثبات می‌باشد. در کار در کلاس اول سعی شده دانش‌آموز در تشخیص استدلال‌های مشابه توانمندتر شود. گرچه نام‌های «استدلال استقرایی» (استدلالی که در آن درستی یک حکم که در چند حالت مشاهده شده به حالت کلی تعمیم داده می‌شود. مانند استدلال ۱ در فعالیت اول) و «استدلال استنتاجی» (که در آن با استفاده از حقایقی که از قبل می‌دانیم و با استفاده از نتیجه‌گیری‌های منطقی درستی موضوع موردنظر را نشان می‌دهیم. مانند استدلال ۲ در فعالیت اول) مطرح نشده است اما یکی از اهداف تشخیص استدلال‌های مشابه و نیز مقایسهٔ میزان اعتبار هرکدام در اثبات‌های گوناگون می‌باشد.

مثال نقض در این قسمت در حالتی کاربردی مطرح شده است و دانش‌آموز با آن آشنا می‌شود. از اهداف دیگر این درس بالا بردن آگاهی دانش‌آموز در این موضوع است که چه نوع تشخیصی در هندسه چه اهمیتی دارد. مثلاً بداند که تشخیص شهودی و یا تشخیص براساس اندازه‌گیری، می‌تواند در ارائهٔ حدس‌ها و تشخیص راه حل‌ها یاری‌رسان فردی باشد که با مسائل ریاضی سروکار دارد اما به عنوان اثبات در ریاضیات مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

حل تمرین‌ها

۱ــ خیر. از مشاهدهٔ برقراری موضوعی در چند حالت نمی‌توان بدون هیچ دلیلی آن را در حالت کلی درست دانست.

کافی است مثلثی مثال بیاوریم که محل برخورد عمود منصف‌هایش درون آن نباشد.

۲ــ گرچه هیچ کدام از استدلال‌ها نمی‌تواند به عنوان یک اثبات درست، درستی ادعای موردنظر را ثابت کنید، اما استدلال نیما به دلیل مقایسهٔ منطقی که بین تمرینات وزنه‌بردار در دو هفته و نتیجه‌های حاصل، انجام داده است، قابل اعتمادتر از استدلال پژمان است که نتیجهٔ وزنه‌برداری را به موضوعی کاملاً نامرتبط ربط داده است.

۳ــ استدلال قسمت (ج) مانند استدلال مطرح شده می‌باشد زیرا در هر دوی آنها نتیجه‌ای را که در گذشته همواره برقرار بوده است، به آینده تعمیم داده‌اند.

۴ــ استدلال اول براساس تجربه‌های یک فرد و برداشت‌های شخصی او انجام شده است اما در استدلال دوم از مقایسه، منطق و نتیجه‌گیری استفاده شده و استدلال استنتاجی درستی ارائه شده است.

سن علی $>$ سن حسن $\Rightarrow$ سن علی $>$ سن حسین $>$ سن حسن

توصیه‌های آموزشی

ــ هدف کلی این درس آشنایی و درک لزوم استدلال و تشخیص استدلال قابل قبول در مسائل هندسی می‌باشد در این راستا می‌توانید بسته به شرایط کلاس خود از مثال‌های گوناگون استفاده کنید و به مثال‌های ارائه شده در کتاب بسنده نکنید.

ــ می‌توان دانش‌آموزان را به این مطلب توجه داد که در علوم مختلف میزان اعتبار استدلال‌ها متفاوت است. مثلاً میزان اعتبار استدلال استقرایی در علوم مختلف بسیار متفاوت می‌باشد و در برخی شاخه‌های علوم انسانی و همچنین برخی تحقیقات در علوم پزشکی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اهداف

ــ تشخیص فرض و حکم مسئله و بیان برخی فرض‌ها و حکم‌ها به زبان ریاضی
ــ آشنایی با برخی استدلال‌های هندسی و نوشتن منظم آنها
ــ توانایی درنظر گرفتن کلیت برخی اثبات‌های هندسی داده شده،تأمل به اجزا و نتیجه‌گیری‌های موجود در دل آن، و تشخیص نواقص احتمالی موجود در اثبات (در اثبات‌هایی که کاملاً درست نمی‌باشند)
ــ آشنایی با مفهوم تعمیم و شرایط استفاده از آن در برخی مسائل هندسی و توانایی به‌کارگیری آن در برخی مسائل
ــ تشخیص تفاوت میزان اعتبار برخی استدلال‌های هندسی
ــ آشنایی با برخی نتیجه‌گیری‌های منطقی مورداستفاده در استدلال‌های هندسی

روش تدریس

تشخیص فرض و حکم از دل مسئله و بازنویسی آنها به‌طور منظم و نیز درنظر گرفتن واقعیات مرتبط با مسئله که از قبل درستی آنها پذیرفته شده است می‌تواند به نظم ذهنی دانش‌آموز در ارائهٔ یک استدلال مناسب کمک نماید. لذا دستیابی دانش‌آموز به چنین توانایی از اهداف این درس می‌باشد.

در فعالیت دوم این درس مسئله‌ای به همراه استدلالی برای درستی آن آمده است که استدلال موردنظر دارای نقص می‌باشد. این‌گونه مسائل از آنجا که دانش‌آموز را درگیر نوشتن استدلال و دغدغهٔ درستی شیوهٔ نوشتار و استفاده از علائم ریاضی نمی‌کند می‌تواند تمرکز بیشتر دانش‌آموز را معطوف به ساختار اثبات و اجزای لازم آن نماید. تشخیص درستی یا نادرستی استدلال آورده شده و در صورت نادرستی تشخیص علت آن، می‌تواند تقویت‌کننده دقت و تفکر دانش‌آموز باشد، لذا آوردن چنین سؤالاتی در ارزشیابی‌ها مفید می‌باشد. در ادامهٔ فعالیت دوم این درس با ارائهٔ خاصیتی از نیمساز زاویهٔ بین دو ساق از مثلث متساوی‌الساقین که آن را نمی‌توان به نیمسازهای دیگر تعمیم داد و سپس ارائهٔ خاصیتی از قطر یک مربع که آن را می‌توان به قطر دیگر تعمیم داد، دانش‌آموز را برای درک این نوع تعمیم و شرایط لازم برای آن آماده می‌کنیم.

در کار در کلاس دوم با توجه به مطالب درس قبل دانش‌آموز می‌تواند تفاوت اعتبار انواع استدلال‌ها را مقایسه کند و به لزوم آوردن استدلالی که در حالت کلی و به درستی حکم مسئله را نتیجه دهد بیشتر پی‌ببرد.

در آخرین فعالیت این درس یک مسئله کلاس که می‌تواند اثبات جبری ساده‌ای داشته باشد و یا توسط برخی دانش‌آموزان به‌صورت ذهنی جواب داده شود و یک مسئلهٔ هندسی، شبیه‌سازی شده‌اند تا بدین طریق علاوه بر کمک به درک بیشتر اثبات مسئلهٔ هندسی دانش‌آموز با این‌گونه شبیه‌سازی نیز آشنا شود.

حل تمرین‌ها

۱ــ خیر، زیرا مسئله درحالت کلی و برای هر مثلث دلخواه مطرح شده است، اما اثبات آن در حالت کلی و برای هر مثلث دلخواه آورده نشده است.

۲ــ دلیل نرگس درست است زیرا طبق تعریف برای محدب بودن، باید تمام پاره‌خط‌های حاصل از وصل هر دو نقطهٔ درون شکل، کاملاً درون شکل باشند پس با یافتن یک پاره‌خط که چنین نباشد نتیجه می‌شود که چندضلعی محدب نیست.

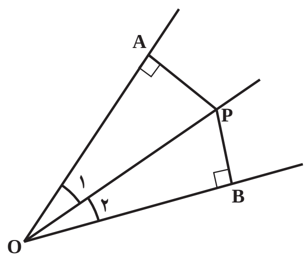
ــ دلیل مهدیه درست نیست زیرا طبق تعریف چندضلعی محدب باید همهٔ پاره‌خط‌های مذکور درون چندضلعی باشند تا چندضلعی محدب باشد و با قرار گرفتن تنها یک یا چند پاره‌خط در درون چندضلعی، نمی‌توان چنین نتیجه‌ای گرفت.

ــ دلیل مریم نیز به همان دلیل که دلیل مهدیه درست نبود، درست نیست، گرچه این چندضلعی واقعاً محدب است.

۳ــ الف) خیر، زیرا ABCD می‌تواند متوازی‌الاضلاعی باشد که زاویهٔ قائمه نداشته باشد. (گزارهٔ اول می‌گوید که مستطیل، متوازی‌الاضلاع است. در مورد متوازی‌الاضلاع چیزی نمی‌گوید.)

ب) خیر. زیرا ABCD می‌تواند لوزی‌ای باشد که زاویهٔ قائمه نداشته باشد. (گزارهٔ اول اطلاعاتی در مورد مربع‌ها می‌دهد. در مورد ABCD که مربع نیست چیزی نمی‌گوید.)

ج) بله. ABCD مربع نیست زیرا اگر مربع باشد طبق گزارهٔ اول باید ضلع‌هایش باهم برابر باشند که مخالف گزارهٔ دوم است.



۴ــ زاویهٔ دلخواهی و نقطه‌ای مانند P روی نیمساز آن زاویه مانند شکل مقابل درنظر گرفته و از نقطهٔ موردنظر به دو ضلع آن زاویه عمود می‌کنیم. داریم :

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{O}_1=\hat{O}_2 & (\text{OP نیمساز است}) \\ OP=OP & (\text{مشترک}) \\ \hat{A}=\hat{B}=90^\circ & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \overset{\Delta}{OAP}\cong OBP \Rightarrow PA=PB$$

لذا فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویه یکی است. از آنجا که تمام خواصی که در این اثبات استفاده کردیم برای سایر نقاط روی نیمساز برقرار است لذا این خاصیت را می‌توان به سایر نقاط روی نیمساز تعمیم داده و بگوییم : «هر نقطهٔ روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه، به یک فاصله است.»

توصیه‌های آموزشی

در برخی موضوعات این درس بحث‌ها و نتیجه‌گیری‌های منطقی مطرح شده است که در اثبات‌های هندسی جایگاه خاصی دارند لذا توجه کافی به ایجاد درکی مناسب از این مباحث در ذهن دانش‌آموزان اهمیت دارد.

در بحث تعمیم می‌توان از مثال‌هایی از زندگی روزمره (مثلاً خواصی که برخی اشیاء یا موجودات دارند و می‌توان به برخی دیگر تعمیم داد و به برخی دیگر نمی‌توان تعمیم داد) برای کمک به فهم بهتر شرایط تعمیم استفاده کرد.

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

اهداف

ــ یادآوری مفهوم و حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها
ــ تشخیص اجزای متناظر از دو مثلث همنهشت
ــ آشنایی با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها در حل برخی مسائل هندسی
ــ استفاده از زبان ریاضی در نوشتن استدلال‌ها به‌صورت منظم

روش تدریس

در ابتدای فصل حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها که در پایهٔ هشتم آورده شده است یادآوری می‌شود و نوشتن آنها به‌صورت منظم و با استفاده از زبان ریاضی مدنظر می‌باشد.

در فعالیت اول هدف تقویت توانایی تشخیص اجزای متناظر از دو مثلث همنهشت می‌باشد، بسته به وضع کلاس می‌تواند مثلث‌های همنهشت در شکل‌های پیچیده‌تر نیز برای تشخیص اجزای متناظر، مطرح شوند،در فعالیت دوم برای حل مسئله می‌توان از همنهشتی دو مثلث که با رسم پاره‌خط‌های AC و BD به‌وجود می‌آیند، استفاده کرد. در هر دو راه حل مطرح شده در این قسمت از این موضوع که زوایای C و D محیطی و روبه‌رو به قطر دایره هستند و بنابراین قائمه‌اند استفاده شده است. در فعالیت سوم نیز با توجه به خواص لوزی (چهار ضلع برابرند.زوایای روبه‌رو برابرند.) و باتوجه به اینکه BN = DM (زیرا هرکدام از آنها برابر با نصف ضلع لوزی است، بنابراین این دو پاره‌خط باهم برابرند) همنهشتی دو مثلث ABN و ADM به حالت (ض‌زض) نتیجه می‌شود.

در کار در کلاس نیز مسئله‌ای مطرح شده که کارایی استفاده از همنهشتی مثلث‌ها را نشان می‌دهد. یادآوری به دانش‌آموز که اثبات قابل قبول هندسی کدام است، متوجه کردن دانش‌آموز به تفاوت تعریف یک چندضلعی و خواص آن و استفاده از زبان ریاضی در نوشتن منظم استدلال در این کار درکلاس مدنظر می‌باشد. پس از نشان دادن همنهشتی دو مثلث ABD و CBD چگونگی یافتن اجزای متناظر دیگر در دو مثلث مطرح شده است، بدین صورت که اضلاع مقابل به دو زاویهٔ متناظر از دو مثلث باهم برابرند و برعکس زاویه‌های مقابل به دو ضلع متناظر از دو مثلث باهم برابرند. در ادامه سؤال شده است که آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم. هدف از این سؤال یادآوری تعمیم یک خاصیت که در درس قبل مطرح شده می‌باشد. با توجه به اینکه تمام خواص استفاده شده در این اثبات برای قطر دیگر نیز برقرار هستند لذا می توان نتیجهٔ گرفته شده را به قطر دیگر تعمیم داد. در انتهای کار در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شده است که با توجه به همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، برابری زاویه های مقابل در متوازی‌الاضلاع را نیز نتیجه بگیرند.

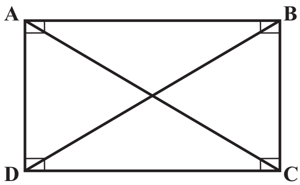
حل تمرین‌ها

۱ــ قبلاً ثابت شد که اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع باهم برابرند، لذا $AB = DC$. از طرفی

$AB \parallel DC$ و مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$ $\quad \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$

$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ (ز ض ز) $\Longrightarrow \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$

$AB \parallel DC$ و مورب $AC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ $\quad AB = DC$



۲ــ **حل** : مستطیلی مانند شکل مقابل درنظر می‌گیریم :

می‌توان فرض و حکم را به این صورت نوشت

فرض: $ABCD$ مستطیل است

حکم : $AC = BD$

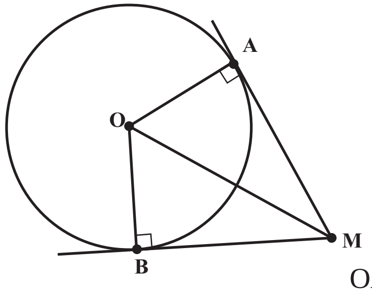
داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AB \\ AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow BD = AC$$

۳ــ مثلث‌های AMB و AMC به حالت سه ضلع (ض ض ض) همنهشت هستند.

$\overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{AMD} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \text{AM نیمساز است} \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases}$

(چون $\hat{M}_۱$ و $\hat{M}_۲$ با هم برابرند و جمعشان ۱۸۰° است) $\Rightarrow AM \perp BC$



۴ــ می‌دانیم که طبق تعریف مماس، شعاع OA بر مماس MA عمود است. به همین ترتیب $OB \perp MB$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = y \\ OM = OM \text{ (مشترک)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{OBM} \Rightarrow MA = MB$$

۵ــ استدلال آورده شده دارای نقص می‌باشد زیرا ادعا شده دو مثلث به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند در حالتی که زاویه‌های $O_۱$ و $O_۲$ بین دو ضلع نوشته شده در استدلال، قرار ندارند. همنهشتی این دو مثلث را می‌توان به حالت وتر و یک ضلع نتیجه گرفت.

توصیه‌های آموزشی

در مواردی دیده می‌شود دانش‌آموزان از طریق سپردن نام زاویه‌ها و ضلع‌ها به ذهن یا در خاطر نگاه داشتن شکل خاصی و یا پیدا کردن شباهت‌هایی بین نام زاویه‌های متناظر و حفظ حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها اثبات‌هایی برای برخی مسائل می‌نویسند در حالی که درک درستی از همنهشتی و تناظر موجود بین اعضای دو چندضلعی همنهشت نیافته‌اند. لذا توجه به اهمیت درک مفهوم همنهشتی و تشخیص اجزای متناظر از دو چندضلعی همنهشت الزامی است.

در برخی موارد با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با تبدیل‌های انتقال، تقارن و دوران، پس از مشخص شدن همنهشت بودن دو چندضلعی می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا تبدیلاتی که دو شکل را برهم منطبق می‌کنند مشخص کنند.

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

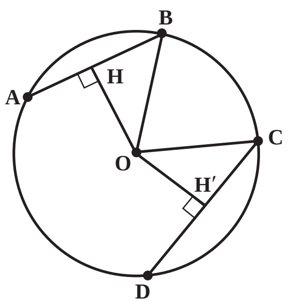
هدف : آشنایی با برخی راهکارهای حل مسائل هندسی

ابزار مورد نیاز : خط‌کش و گونیا

روش تدریس

چهار کار اساسی که می‌تواند به حل مسائل هندسی کمک کند بیان شده است که عبارت‌اند از فهم مفاهیم مطرح شده در مسئله، رسم شکل (در صورت لزوم)، تشخیص داده‌ها (فرض) و خواسته‌های (حکم) مسئله، و با استفاده از تمام اینها یافتن راه حلی که به کمک آن حکم مسئله را اثبات کنیم. در بسیاری از سؤال‌های مطرح شده در هندسه اثبات برابری دو پاره‌خط خواسته شده است و در بسیاری از آنها کافی است دو مثلث که پاره‌خط‌های مذکور اجزای متناظر در آن دو مثلث باشند بیابیم و ثابت کنیم دو مثلث همنهشت هستند.

در قسمت ۱ از فعالیت کافی است با وصل کردن نقاط A و B و C و D به مرکز دایره، دو مثلث OAB و OCD، که به حالت سه ضلع همنهشت هستند، به‌دست آوریم و از همنهشتی آنها برابری زاویه‌های تشکیل شده در نقطهٔ O از دو مثلث را نتیجه بگیریم و از آن برابری کمان‌ها را. در قسمت ۲ فعالیت دوباره همان مثلث‌ها را تشکیل می‌دهیم چون کمان‌ها برابرند لذا زاویه‌های تشکیل شده در نقطهٔ O از دو مثلث باهم برابرند و دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشت خواهند بود و لذا ضلع سوم آنها که همان وترها می‌باشند نیز برابرند.



در قسمت ۳ فعالیت، از O به وترهای AB و CD عمود می‌کنیم. کافی است نشان دهیم $OH = OH'$.

می‌دانیم HB نصف AB است و $H'C$ نصف CD است، از طرفی طبق فرض $AB = CD$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}CD \Rightarrow HB = H'C$$

$$\left.\begin{array}{l} HB = H'C \\ H = H' = ۹۰^\circ \\ OB = OC = r \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{O}HB \cong OH'C \Rightarrow OH = OH'$$

حل تمرین‌ها

۱ــ

$$AB = CD \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}CD \Rightarrow MB = PD$$

$$AD = BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow DQ = BN$$

$$\left.\begin{array}{l} MB = PD \\ DQ = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{MBN} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{PDQ} \Rightarrow MN = PQ$$

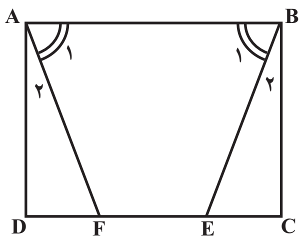
۲ــ

$$\left.\begin{array}{rl} & OA = OB \\ \text{(متقابل به رأس)} & \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \text{(زاویه بین شعاع و مماس)} & \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow OAD \overset{\text{(ز ض ز)}}{\cong} OBC \Rightarrow AD = BC$$

۳ــ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند. لذا $\hat{B} = \hat{C}$

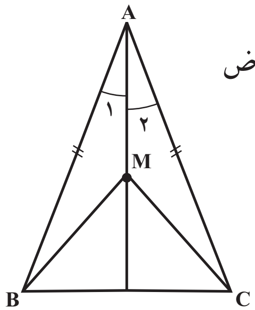
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = CN \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{ACN} \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \text{ متساوی‌الساقین است}$$

۴ــ



$$\cancel{\hat{A}_۱} + \hat{A}_۲ = \cancel{\hat{B}_۱} + \hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲$$

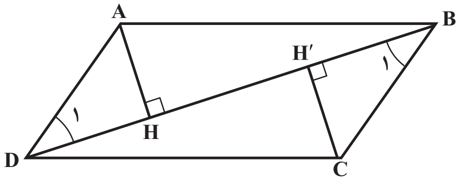
$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲ \\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADF} \overset{\text{(ز ض ز)}}{\cong} \overset{\Delta}{BCE} \Rightarrow AF = BE$$



۵ــ حکم : $MB = MC$

فرض : $\begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_۱ = A_۲ \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &AB = AC && \text{(فرض)} \\ &\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ && \text{(فرض)} \\ &AM = AM && \text{(مشترک)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow MB = MC$$



۶ــ $\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \Leftarrow DB$ مورب و $AD \parallel BC$

$$\left.\begin{aligned} &AD = BC && \text{(اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع)} \\ &\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{DAH} \overset{\text{وتر یک زاویه حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{BCH'} \Rightarrow AH = CH'$$

درهر متوازی‌الاضلاع، هر دو رأس مقابل از **قطر** بین آنها به یک **فاصله‌اند**.

توصیه‌های آموزشی

گاهی آنچه می‌تواند به تسلط یافتن دانش‌آموزان کمک کند، بازگشت پس از حل مسئله به آن است. به‌گونه‌ای که مسئله را از آخر درنظر بگیریم و با تشریح آن، به درک علت هرکدام از اقدام همان در طول حل مسئله، توسط دانش‌آموز، کمک کنیم.

اشتباهات رایج

گاهی دانش‌آموزان برای حل مسئلهٔ خواسته شده به حل زیرمسئله‌ای می‌پردازند، مثلاً برای نشان دادن برابری دو پاره‌خط دو مثلث تشکیل داده و نهایتاً همنهشتی آنها را ثابت می‌کنند، اما از نتیجه گرفتن حکم اصلی که برابری پاره‌خط‌هاست غافل می‌شوند. برای رفع این اشتباه می‌توان به دانش‌آموزان گوشزد کرد که همواره حکم مسئله را درنظر داشته باشند.

اهداف

ــ آشنایی با مفهوم تشابه

ــ درک روابط بین اندازه‌های اجزاء در دو شکل متشابه

ــ تشخیص متشابه بودن در چندضلعی

ــ توانایی رسم چندضلعی متشابه با یک چندضلعی ساده داده شده

ابزار مورد نیاز :

گونیا و خط‌کش، کاغذ شطرنجی

روش تدریس

در شروع درس پیش از آنکه به یکباره معنی دقیق تشابه در دو شکل ارائه شود سعی می‌کنیم دانش‌آموز با تشخیص خود تفاوت رعایت و عدم رعایت تناسب اندازه‌ها را در شکل‌های متشابه و غیرمتشابه متوجه شود و برروی ویژگی‌هایی که دو شکل متشابه دارند فکر کند، هرچند نداند که متشابه هستند. در ادامه با ارائهٔ چندضلعی‌های متشابه در صفحهٔ شطرنجی و درخواست اندازه‌گیری اضلاع و زاویه‌ها سعی می‌کنیم دانش‌آموزان را درپی بردن به ویژگی‌های دو شکل متشابه یاری کنیم. در ادامهٔ فعالیت سعی شده دانش‌آموزان بیشتر با خواص شکل‌های متشابه آشنا شوند و سپس تعریف شکل‌های متشابه و نهایتاً تعریف نسبت تشابه ارائه شده است.

حل تمرین‌ها

۱ــ چندضلعی‌های متشابه زیادی وجود دارند. مثلاً GDH و HEI و ABD و EBC و LHM باهم متشابهند و AFH و BGI و CHJ و HOP و HAC با هم متشابهند و GHLK و HINM و DBEH نیز باهم متشابهند.

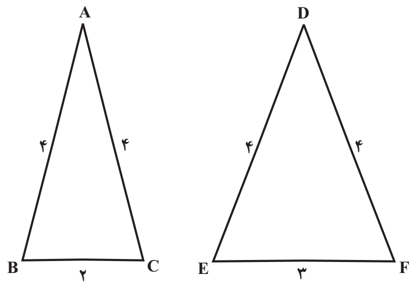
۲ــ بله، نسبت تشابه برابر ۱ است.

۳ــ خیر، به‌طور مثال مربع یک نوع لوزی است و با لوزی‌ای که زاویهٔ قائمه ندارد متشابه نیست.

۴ــ $۳/۵ \times ۲۰۰ = ۷۰۰$

۵ــ بله، زیرا تمام زاویه‌ها برابر ۶۰ است و چون در هر مثلث سه ضلع برابرند پس نسبت‌های اضلاع در دو شکل نیز یکی خواهد بود.

۶ــ خیر، مثلاً دو مثلث مقابل متشابه نیستند زیرا اضلاع به یک نسبت تغییر نکرده‌اند.



۷ــ با توجه به متشابه بودن دو مثلث داریم :

$$\frac{۴}{x-۱}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۸}{x+۷}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۸ \\ x+۷=۱۶ \end{cases} \Rightarrow x=۹$$

۸ــ مثلث ABC با مثلث پایین سمت راست متشابه است.

توصیه‌های آموزشی

همانگونه که از شکل ارائهٔ مفهوم تشابه در این درس مشخص است، توجه به درک مفهوم تشابه اهمیت ویژه‌ای دارد و در این پایه حل مسائل تشابه صرفاً در حدی که در درس و تمرین‌ها ارائه شده است مدنظر می‌باشد لذا می‌توان با ارائهٔ مثال‌های کاربردی بیشتر از درک مفهوم تشابه دو شکل توسط دانش‌آموزان اطمینان حاصل نمود.

فصل ۴

توان و ریشه

وَ جَعَلنا مِنَ المآءِ کُلَّ شَیءٍ حَیّ

هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم

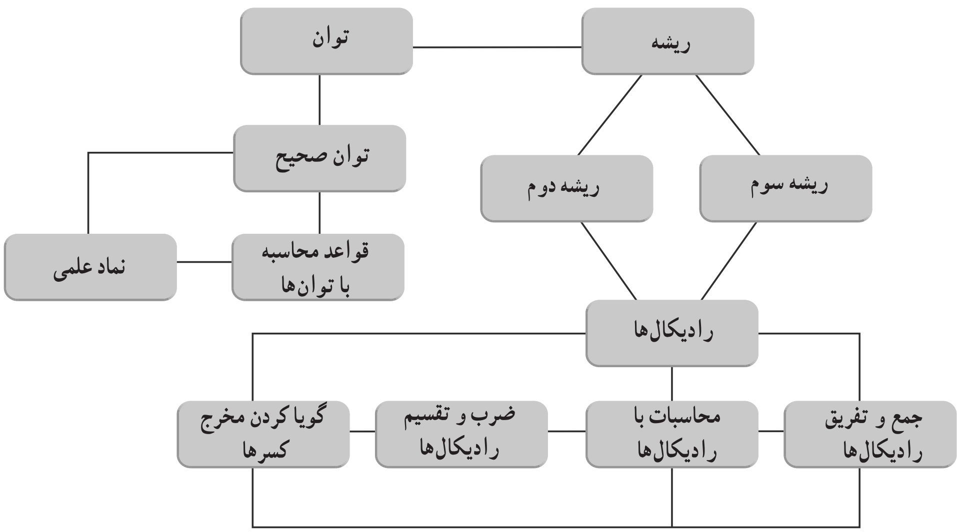
(سورهٔ انبیا، آیهٔ ۳۰)

یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر ۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $۳/۳ \times ۱۰^{۱۹}$ نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان از سال هفتم با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اند. در سال هشتم نیز ضمن تعمیق مفاهیم، برخی قواعد و رویه‌ها آموزش داده شده است. همچنین دانش‌آموزان درسال‌های هفتم و هشتم با مفهوم جذر و روش تقریبی محاسبه آن آشنا شده‌اند. ریشه‌های دوم یک عدد نامنفی نیز در طی این دو سال مطرح شده است. در کتاب ریاضی پایه نهم توان صحیح و ریشه سوم یک عدد در فصل چهارم آموزش داده می‌شود. همچنین نماد علمی و برخی محاسبات در مورد رادیکال ها و قواعدی در مورد کار با عبارت‌های رادیکالی مطرح می‌شود. لازم به ذکر است که در این کتاب تأکیدی بر ریشه‌های بالاتر از سه وجود ندارد و در سال‌های بعد به موازات معرفی توان‌های گویا در مورد ریشه‌های بالاتر از ۳ نیز بحث و گفت‌وگو خواهد شد.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

اعداد تواندار از جمله مباحث پرکاربرد در ریاضیات می‌باشد. در دوره‌های مقدماتی اعداد تواندار با توان طبیعی، ارتباط بین توان و ضرب را نشان می‌دهند. در پایه‌های بالاتر، اعداد تواندار با توان منفی اتصالی بین توان و کسر برقرار می‌کنند و در ادامه اعداد تواندار با توان گویا اتصال بین

توان و ریشه‌گیری را نشان می‌دهند. اعداد تواندار با توان گنگ رابطه‌ای بین توان و حد یک دنباله را نشان می‌دهند (سلطانی، ۱۳۹۲).

عددهای حقیقی را می‌توان به دو دسته گویا و گنگ تقسیم‌بندی کرد. علاوه بر این یک دسته‌بندی دیگر نیز وجود دارد : عددهای جبری و عددهای متعالی. عددهای جبری اعدادی هستند که جواب‌های معادله‌های جبری با ضریب‌های صحیح هستند و بقیه عددهای باقیمانده، عددهای متعالی نامیده می‌شوند. بعضی از عددهای جبری گویا و برخی گنگ هستند، امّا همه عددهای متعالی گنگ هستند. برخلاف عددهای گویا که نسبت به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به‌جز صفر) بسته هستند، عددهای گنگ از این ویژگی برخوردار نمی‌باشند. اگر x یک عدد گنگ و γ عدد گویایی غیر از صفر باشد، آنگاه $x+\gamma$، $x-\gamma$، γx و $\frac{x}{\gamma}$ عددهای گنگی خواهند بود. همچنین $-\alpha$ و α^{-1} نیز گنگ هستند.

بنابراین با توجه به گنگ بودن مثلاً $\sqrt{۳}$ می‌توان گنگ بودن همه اعداد زیر را نتیجه گرفت :

$$-\sqrt{۳} \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad , \quad \sqrt{۳}+۷ \quad , \quad ۵-\sqrt{۳} \quad , \quad -۲\sqrt{۳} \quad , \quad \frac{\sqrt{۳}}{۵} \quad , \quad \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

معرفی منابع برای معلمان

- اعداد گویا و گنگ، ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- ساویزی، بهناز و شاهورانی، احمد (۱۳۹۳). ردپای مبهم اعدادگنگ در ذهن دانش‌آموزان، رشد آموزش ریاضی شماره ۱۱۵.

مسیرهایی برای توسعه

برخی از مسائل مطرح شده در ادامه، ویژه دانش‌آموزانی است که توانایی فراتری دارند و برای آزمون‌های کلاسی معمول توصیه نمی‌شوند.

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $$\frac{(۰/۶)^{۰}-(۰/۱)^{-۱}}{\left[(\frac{۳}{۲^{۴}})^{-۱}\times(\frac{۳}{۲})^{۳}\right]+(-\frac{۱}{۳})^{-۱}}$$

ب) $\left[-(-\frac{۱}{۵})^{-۲}\right]^{-۱}+\left[-(\frac{۲}{۳})^{-۲}\right]^{-۱}$

۲ــ اگر x یک عدد حقیقی باشد در مورد اینکه کدام‌یک از $x^{۲}$ و $x^{۳}$ بزرگ‌ترند بحث کنید.

۳ــ حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید : $(\frac{۸}{۲^{-۴}})\div(\frac{۴^{۳}}{۲^{-۲}})$

۴ــ در معادله $۹۶ = ۲^{x+۱} + ۲^{x}$ مقدار x چقدر است؟

۵ــ حاصلضرب عددی در مجذورش $۱۰^{-۳}$ است. آن عدد را به‌دست آورید.

۶ــ علامت دو عدد $A=[-(-۴)^{-۲}]^{-۴}$ و $B=[-(-۵)^{۲}]^{۵}$ کدام است؟

۱) A مثبت و B منفی　　　۲) A منفی و B مثبت

۳) A و B هر دو مثبت　　　۴) A و B هر دو منفی

۷ــ مجذور عبارت $\frac{۰/۲\times۰/۰۰۱۲}{۰/۰۰۶\times۰/۰۰۱}$ را به‌دست آورید.

۸ــ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید : $(x<۰)$

$$\frac{\sqrt{x^{۲}}-x}{x^{۲}}$$

۹ــ اگر $x<۰$ حاصل عبارت مقابل را بدون قدر مطلق بنویسید. $\left|x-\sqrt{(x-۱)^{۲}}\right|$

۱۰ــ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$۵\sqrt[۳]{۲۵۰}-۲\sqrt[۳]{۵۴}+۷\sqrt[۳]{۱۲۸}-۳\sqrt[۳]{۱۶}$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ حاصل هر عبارت را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید :

آ) $(\frac{۱۲}{۸})^{۵}\times(\frac{۴}{۱۶})^{-۵}$　　　ب) $۱۴^{-۲}\div(\frac{۱}{۲})^{۲}$

۲ــ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

آ) $(-x^{-۲}y)^{-۳}$　　　ب) $۲^{-۳}+۲^{-۲}+۲^{-۱}$

۳ــ ساده شده کسر مقابل چقدر است؟ $\dfrac{۲۵^{-۲}\times ۲^{-۶}}{۲^{-۷}\times ۵^{-۴}}$

۴ــ هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

۱۴۰۰ =   ۲۸۳ =

۲۸/۳۴۵ =   ۰/۰۰۰۳۰۱ =

۵ــ نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید :

$۷/۹ \times ۱۰^{۵} =$ $۲/۴ \times ۱۰^{-۵} =$

$۸/۲۳۴ \times ۱۰^{۶} =$ $۳/۰۱ \times ۱۰^{-۶} =$

۶ــ اگر $x > ۰$ و $y < ۰$ حاصل عبارت $\sqrt{(xy)^{۲}}$ برابر کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

آ) xy ب) $-xy$

۷ــ ریشه سوم اعداد روبه‌رو را به‌دست آورید.   ۱۵ ، ۸ و -۱۲۵

۸ــ حاصل را به‌دست آورید :

ب) $\dfrac{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۳۲}}{\sqrt{۱۶}}$ آ) $\dfrac{\sqrt{۶}\times\sqrt{۴}}{\sqrt{۸}}$

۹ــ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

آ) $(\sqrt{۸}+\sqrt{۲})(\sqrt{۴}+\sqrt{۲})$

ب) $\sqrt{۲۷}+\sqrt{۱۲}+\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}$

۱۰ــ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید :

ج) $\dfrac{\sqrt{۵}}{\sqrt{x}}$ ب) $\dfrac{۲}{\sqrt[۳]{۳}}$ آ) $\dfrac{۴}{۵\sqrt{۲}}$

۱۱ــ در جای خالی علامت مناسب > یا = یا < بگذارید :

آ) $\sqrt[۳]{۲۷}-\sqrt[۳]{۸} \bigcirc \sqrt{۳}$

ب) $\sqrt{۸^{۲}+۶^{۲}} \bigcirc \sqrt[۳]{۱۰۰۰}$

ج) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \bigcirc \sqrt{۲۵}$

هدف : آشنایی با توان منفی یک عدد (ناصفر)

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های طبیعی یک عدد و نیز توان صفر، به کمک فعالیت داده شده می‌توان توان منفی یک عدد (غیرصفر) را آموزش داد. در واقع به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۰ و با کمک الگویابی باید به دانش‌آموزان کمک کرد تا اعداد داده شده در جاهای خالی را حدس بزنند. هم‌سطرهای اوّل جدول و هم‌سطرهای دوم آن باهم ارتباط دارند. ضمناً هر عدد در سطر بالا با عدد توانی زیر آن در سطر دوم ارتباط دارد. انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به آگاهی خود از عددهای صحیح در جاهای خالی اعداد ۱− ، ۲−، ۳−، ۴− و ۵− را حدس بزنند. در نهایت توان صحیح و قاعده مربوط به آن به‌صورت رسمی‌تر و در قالب یک قاعده کلی بیان شده است. باید به دانش‌آموزان برای حل کار در کلاس‌ها فرصت داد و حتی در مورد راه حل‌های دیگر دانش‌آموزان از آنها نظرخواست. بسیاری از مسائل و تمرین‌ها نیاز به تکمیل توسط دانش‌آموز دارد. دبیر محترم با توجه به سطح کلاس و نیاز راهنمایی لازم را ارائه خواهد کرد.

در تمرین ۱ صفحه ۶۳ برخی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان به چالش کشیده می‌شوند. مثلاً خیلی از دانش‌آموزان حاصل $۳^{-۲}$ را برابر ۶− می‌گیرند. باید دلیل نادرستی این پاسخ توسط دانش‌آموزان توضیح داده شود.

در تمرین ۳ برای مقایسه عددهای داده شده باید ابتدا آنها را برحسب توانی از ۲ بنویسند، در تمرین ۵ باید مقدار x را به کمک حدس زدن یا حل معادله به‌دست آورند.

توصیه‌های آموزشی

برای اینکه از توانایی دانش‌آموزان اطمینان حاصل کنید مناسب است پس از بررسی و حل تمرین‌ها از آنها بخواهید که مسائل مشابهی را برای دوستانشان طرح کنند. همچنین تأکید بر گفتمان کلاسی و ارائه دلیل از سوی دانش‌آموزان بسیار ضروری است.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان توان منفی یک عدد را در خود عدد ضرب می‌کنند. برخی دیگر علامت توان منفی را در علامت عدد ضرب می‌کنند.

اهداف

ـ نمایش یک عدد به صورت نماد علمی
ـ نوشتن نمایش اعشاری عددی که نماد علمی آن داده شده است.
ـ ساده کردن برخی محاسبات

روش تدریس

نماد علمی دارای کاربردهای فراوانی در رباضیات و سایر علوم است. به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۵ ابتدا دانش‌آموزان مشاهده می‌کنند که هنگام ضرب یا تقسیم یک عدد در توانی از ۱۰ یا برتوانی از ۱۰ چه اتفاقی رخ می‌دهد. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا این محاسبات را انجام دهند و نتیجه را با زبان خود بیان کنند. اگر لازم شد عددهای دیگری مثال بزنید و حتی در صورت لزوم پاسخ دانش‌آموزان را دقیق نمایید. در بخش دوم فعالیت صفحه ۶۵ مثالی کاربردی ازسرعت نور ارائه شده است که لزوم استفاده از نماد علمی را نشان می‌دهد. سادگی در محاسبات، و نمایش اعداد و نیز هماهنگی و نظم از ویژگی‌های کار با نماد علمی است.

در صفحه ۶۷ تمرین ۱ــ الف) داریم :

$$\frac{۳^{-۵}\times ۱۰^{-۵}\times ۲۵}{۴^{-۵}\times ۱۵^{-۵}}=\frac{۳۰^{-۵}\times ۲۵}{۶۰^{-۵}}=(\frac{۱}{۲})^{-۵}\times ۲۵=۲^{۵}\times ۲۵=۳۲\times ۲۵=۸۰۰$$

تمرین ۸، یک سؤال باز پاسخ است. یک روش برای حل این تمرین، این است که دانش‌آموزان با جایگذاری اعداد صحیح درستی نامساوی‌ها را بررسی کنند. مثلاً عددهای ۰ و ۱ و ۱ـ را آزمایش کنند.

توصیه‌های آموزشی

ارائه مثال‌های کاربردی به دانش‌آموزان لزوم کار با نمادهای علمی را توجیه‌پذیر می‌نماید. همچنین می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که برخی محاسبات را بدون استفاده از نماد علمی انجام دهند تا به مشکلات احتمالی بیشتر واقف شوند.

اشتباهات رایج

برخی از دانش‌آموزان هنگام ضرب یک عدد در توانی از ۱۰ یا هنگام تقسیم آن بر توانی از ۱۰،

در تعیین جای ممیزها دچار اشتباه می‌شوند. همچنین، برخی مشکلات مربوط به درک اعداد اعشاری در هنگام کار با نماد علمی خود را نمایان می‌سازد. به‌طور مثال برخی از آنها صفرهای بعد از ممیز را در عددی مانند ۳/۰۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۱ به‌حساب نمی‌آورند.

درس سوم: ریشه‌گیری

هدف : آشنایی با ریشه سوم یک عدد

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با ریشه‌های دوم یک عدد، فعالیت صفحه ۶۸ بر همین مبنا طراحی شده است. در جدول اوّل صفحه ۶۸ ریشه‌های دوم هر عدد در سطر بالا و عدد موردنظر در سطرپایین داده شده است. با توجه به جاهای خالی ارتباط دوطرفه بین هر عدد و ریشه‌های دوم آن برقرار می‌شود. در جدول دوم با تکمیل جاهای خالی موضوع ریشه سوم آموزش داده می‌شود. نوع ستون‌های جدول دوم نشان می‌دهند که یک عدد بیش از یک ریشه سوم ندارد. توضیحات بالای صفحه ۶۹ موضوع آموزش ریشه سوم را تمام خواهد کرد. سعی کنید به‌صورت تعاملی و با گفت‌وگو این بحث را در کلاس مطرح کنید. در مورد ضرب و تقسیم رادیکال‌ها (با ریشه‌های سوم) که در صفحه ۷۰ مطرح می‌شود، شیوه کار همانند آموزش ضرب و تقسیم رادیکال‌ها (ریشهٔ دوم) در پایه هشتم است. البته کار در کلاس صفحه ۷۰ نشان می‌دهد که رابطه برای جمع رادیکال‌ها (ریشه سوم) برقرار نمی‌باشد.

تمرین ۵ صفحه ۷۲/ هدف این تمرین حل نامعادله نیست. بلکه حدس و آزمایش عددها و بررسی درستی نامساوی است. ممکن است برخی دانش‌آموزان متوجه شوند که جواب‌های بی‌شماری برای مسئله وجود دارد. بحث و گفت‌وگوی کلاسی مفید است.

تمرین ۶ صفحه ۷۲/ بهتر است برحسب اینکه x یک عدد مثبت یا منفی باشد بحث شود.

توصیه‌های آموزشی

باید به پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان هم بها داد و اگر اشتباهات در کلاس درس مطرح و برطرف شوند دیگر شاهد تکرار آنها در امتحانات نخواهیم بود. توصیه اکید این است که قبل از درک مناسب ریشه سوم و اعمال روی آنها به ریشه‌های بالاتر پرداخته نشود. به‌طور رسمی هدف این کتاب آموزش ریشه‌های بالاتر نیست.

اشتباهات رایج

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان برابر گرفتن عبارت‌های $(\sqrt{x})^۲$ و $\sqrt{x^۲}$ است. اشتباه دیگر این است که عبارتی مانند $\sqrt{۴}$ را برابر $۲\pm$ درنظر می‌گیرند.

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها

هدف : محاسبات با رادیکال‌ها و ساده کردن جملات متشابه

روش تدریس

فعالیت صفحه ۷۳ سعی دارد که ارتباطی بین جبر و هندسه برقرار نماید و از دانش قبلی دانش‌آموزان بهره برد. همچنین ضرورت تسلط بر محاسبات به کمک رادیکال‌ها را نشان دهد. در این فعالیت به کمک رابطه فیثاغورس طول ضلع مربع به‌دست می‌آید و از آنجا محیط و مساحت مربع حساب می‌شود.

در کار در کلاس نمونه‌ای از جمع و تفریق رادیکال‌ها ارائه شده است و بقیه موارد باید توسط دانش‌آموزان انجام شود. توجه دانش‌آموزان به شرایط لازم برای جمع یا تفریق دو یا چند عبارت رادیکالی مهم است. در صفحه ۷۴ برای محاسبات رادیکالی فعالیتی طراحی شده است که باید دانش‌آموزان آن را کامل نمایند. مقایسه روش‌های حل مختلف که به پاسخ یکسانی منجر می‌شوند برای دانش‌آموزان بسیار آموزنده خواهد بود در گویا کردن مخرج رادیکال‌ها نیز هدف مطرح کردن عبارت‌های پیچیده و استفاده از اتحادهای جبری مطرح نشده در کتاب نیست. تأکید باید در سطح ارائه شده در کتاب درس باشد.

توصیه‌های آموزشی

هدف اصلی این فصل آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های صحیح یک عدد (غیرصفر) و نیز آشنایی با ریشه سوم است. آشنایی با توان‌های گویا و ریشه‌های بالاتر در سال دهم انجام خواهد گرفت. توصیه می‌شود که زودتر از موعد به این موارد پرداخته نشود و در عوض بر مباحث مطرح شده در کتاب تأکید شود.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان حاصل دو عبارت $\sqrt[3]{-8^2}$ و $\sqrt[3]{(-8)^2}$ را برابر درنظر می‌گیرند. برخی از اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد رادیکال‌ها به مشکلات آنها در مفهوم توان بازمی‌گردد.

حل تمرین‌های فصل ۴

تمرین

۱ــ برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $۳^{-۲}$: $\frac{۱}{۹}$ ، -۶

$$۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$$

ب) $۳^{-۱}$: $\frac{۱}{۳}$ ، $-\frac{۱}{۳}$

$$۳^{-۱} = \frac{۱}{۳^{۱}}$$

ج) $۳^{-۱} \times ۴^{-۱}$: $۱۲^{-۱}$ ، $۷^{-۱}$

$$۳^{-۱} \times ۴^{-۱} = (۳ \times ۴)^{-۱} = ۱۲^{-۱}$$

د) $۳^{-۱} + ۴^{-۱}$: $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$ ، $۷^{-۱}$

$$۳^{-۱} + ۴^{-۱} = \frac{۱}{۳^{۱}} + \frac{۱}{۴^{۱}} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$$

هـ) $۵^{-۲}$: $-\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲۵}$

$$۵^{-۲} = \frac{۱}{۵^{۲}} = \frac{۱}{۲۵}$$

و) $(-۲)^{۳}$: $۳^{-۲}$ ، -۸

$$(-۲)^{۳} = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = -۸$$

۲ــ جرم یک اتم هیدروژن حدود $۱۰^{-۲۴}$ گرم است. جرم یک وزنهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

$۱۰۰ \times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰ = ۱۰^{۵}$ گرم

$$۱۰^{۵} \div ۱۰^{-۲۴} = ۱۰^{۵} \div \frac{۱}{۱۰^{۲۴}} = ۱۰^{۵} \times ۱۰^{۲۴} = ۱۰^{۲۹}$$

۳ــ عددهای $۱۶^۳$ و $۸^۴$ و $۲^{۱۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

$۸^۴ = (۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲}$

$۱۶^۳ = (۲^۴)^۳ = ۲^{۱۲}$ $\qquad ۲^{۱۱} < ۸^۴ = ۱۶^۳$

۴ــ در جاهای خالی علامت <، > یا = قرار دهید :

الف) $۳^{-۱} > ۳^{-۲}$ $\qquad$ ب) $۲^{۰} > ۲^{-۵}$ $\qquad$ ج) $(۰/۵)^{-۲} > (۰/۶)^{-۲}$

$\frac{۱}{۳} > \frac{۱}{۹}$ $\qquad ۱ > \frac{۱}{۲^۵}$ $\qquad ۴ > \frac{۱۰۰}{۳۶} = \frac{۲۵}{۹}$

د) $۵^{-۱} > ۰$ $\qquad$ هـ) $\left(\frac{-۸}{۱۵}\right)^{۰} = ۱$ $\qquad$ و) $-۵^{-۲} < (-۵)^{-۲}$

$\qquad\qquad - \qquad\qquad +$

$\frac{۱}{۵} > ۰$

۵ــ در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $۵^x \times ۵^{-۳} = ۵^۴$ $\qquad$ ب) $۵^x \div ۵^{-۳} = ۵^۴$

$۵^{x-۳} = ۵^۴$ $\qquad ۵^{x-(-۳)} = ۵^۴$

$x - ۳ = ۴$ $\qquad x + ۳ = ۴$

$x = ۷$ $\qquad x = ۱$

۶ــ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $a^۴ \times a^۵ = a^{۲۰}$ × $\qquad$ هـ) $(-۳)^{۰} + (۳^{-۱})^{-۱} = ۴$ ✓

ب) $a^۴ \times a^۵ = a^۹$ ✓ $\qquad$ و) $۳^{-۱} \times ۴^{-۱} = ۱۲^{-۲}$ ×

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > ۰$ ✓ $\qquad$ ز) $۶^{-۲} = -\frac{۲}{۶}$ ×

د) $۳^{-۲} = -۹$ × $\qquad$ ح) $۳^{-۱۰} < ۳^{-۱}$ ✓

۷ــ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱۰} \times ۲۷^{-۳}$ $\qquad$ ب) $(۰/۲)^{-۴} \times ۲۵^{-۲}$

$= ۳^{۱۰} \times (۳^۳)^{-۳} = ۳^{۱۰} \times ۳^{-۹} = ۳$

$= \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{-۴} \times (۵^۲)^{-۲} = \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{۴} \times ۵^{-۴}$

$= ۵^۴ \times ۵^{-۴} = ۵^{۰} = ۱$

ج) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^{4}$

$= \left(\frac{14}{15}\right)^{4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^{4} = \left(\frac{14}{15} \times \frac{45}{28}\right)^{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$

د) $(-5^{-2})^{-1} = \left(-\frac{1}{5^2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{25}\right)^{-1}$

$= -25$

۸ــ عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-3} و 5^{-3} و 2^{3} و $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ و $(-7)^{2}$ و $(-1)^{21}$ و 1^{-90} و -2^{-4}

$-\frac{1}{16}$ $\quad 1 \quad -1 \quad 49 \quad +4 \quad 8 \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{8}$

$(-1)^{21}$ و -2^{-4} و 5^{-3} و 2^{-3} و 1^{-90} و $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ و 2^{3} و $(-7)^{2}$

۹ــ عبارت نادرست را مشخص کنید.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2} > (0/75)^{3}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{2} < (0/7)^{2}$	$(1/2)^{7} < (1/02)^{7}$	$(0/987)^{10} < 10^{0}$
✓	×	×	✓

۱۰ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^{5} \times 2^{-8}} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{3}}{-2^{-3}} = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}{-2^{-3}} = \dfrac{\frac{1}{64}}{-\frac{1}{8}} = \dfrac{-1}{8}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = -\frac{4}{9}$

تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$

ب) $\dfrac{8^{-1} \times 4^{2}}{2^{-4} \times \frac{1}{8}} = \dfrac{\frac{1}{8} \times 2^{4}}{2^{-4} \times \frac{1}{8}} = 2^{4} \times 2^{4} = 2^{8}$

$$=\frac{۳۰^{-۵}\times ۵^{۲}}{۶۰^{-۵}}=\frac{۵^{۲}}{۲^{-۵}}=۵^{۲}\times ۲^{۵}$$

۲ــ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

$✓\ ۵/۹\times ۱۰^{-۱}=۰/۵۹$ $\qquad$ $\times\ ۱/۰۲\times ۱۰^{-۵}=۰/۰۰۰۰۰۱۰۲$

$\times\ ۷/۰۰۴\times ۱۰^{-۲}=۰/۷۰۰۴$ $\qquad$ $✓\ ۴/۳\times ۱۰^{۳}=۴۳۰۰$

$✓\ ۸/۲۵۷۰\times ۱۰^{۴}=۸۲۵۷۰$ $\qquad$ $✓\ ۶/۱۸\times ۱۰^{۷}=۶۱۸۰۰۰۰۰$

۳ــ شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$۶۹۵۰۰۰=۶/۹۵\times ۱۰^{۵}$

۴ــ اندازهٔ یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵×۱۰^{-۷}

۵ــ قطر خورشید حدود $۱/۴\times ۱۰^{۹}$ متر و قطر زمین حدود $۱/۳\times ۱۰^{۷}$ متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

تقریباً ۱۰۰ برابر $\qquad \frac{۱/۴\times ۱۰^{۹}}{۱/۳\times ۱۰^{۷}}\simeq\frac{۱۰^{۹}}{۱۰^{۷}}=۱۰۰$

۱/۴ را تقریباً با ۱/۳ برابر گرفته‌ایم.

۶ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و به‌صورت نماد علمی نمایش دهید:

$$\frac{۱۲/۵\times ۱۰^{-۴}}{۲۵\times ۱۰^{-۱۹}}=۰/۵\times ۱۰^{-۴}\times ۱۰^{۱۹}=۰/۵\times ۱۰^{۱۵}=۵\times ۱۰^{۱۴}$$

$$۲\times ۱۰^{-۷}\times ۴\times ۱۰^{۹}=۸\times ۱۰^{۲}$$

۷ــ فاصلهٔ مریخ از زمین $۹/۱۷\times ۱۰^{۷}$ کیلومتر و فاصلهٔ کیوان از زمین $۶/۲۸۷\times ۱۰^{۸}$ کیلومتر است. با مقایسهٔ این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟ مریخ

$۹/۷\times ۱۰^{۷}$ $\qquad$ $۶/۲۸۷\times ۱۰^{۸}$

$۹/۷\times ۱۰^{۷}\quad >\quad ۶۲/۸۷\times ۱۰^{۷}$

۸ــ در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$۰/۰۳>۰/۰۰۳\times ۱۰^{○}$ $\qquad$ $۲/۷\times ۱۰^{○}>۰/۰۲$

$۰\ ,\ -۱\ ,\ -۲\ ,\ \ldots$ $\qquad$ $-۲\ ,\ -۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,\ \ldots$

۹ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$۱/۵\times۱۰^{-۲}\ ,\ ۱/۲\times۱۰^{۶}\ ,\ ۵/۳۵\times۱۰^{-۳}\ ,\ ۳/۷\times۱۰^{-۲}$$

$$۵/۳۵\times۱۰^{-۳} < ۱/۵\times۱۰^{-۲} < ۳/۷\times۱۰^{-۲} < ۱/۲\times۱۰^{۶}$$

تمرین

۱ــ ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{۴۹}{۱۶}\ ,\ \frac{۱}{۸۱}\ ,\ ۱۵\ ,\ ۱۴۴\ ,\ ۱۲\ ,\ ۱۸$$

$$-\frac{۷}{۴}\ ,\ +\frac{۷}{۴}\quad -\frac{۱}{۹}\ ,\ +\frac{۱}{۹}\quad -\sqrt{۱۵}\ ,\ +\sqrt{۱۵}\quad -۱۲\ ,\ +۱۲\quad -\sqrt{۱۲}\ ,\ +\sqrt{۱۲}\quad -\sqrt{۱۸}\ ,\ +\sqrt{۱۸}$$

۲ــ ریشهٔ سوم عددهای زیر را به‌دست آورید :

$$۲۱۶\ ,\ ۷^{۳}\ ,\ -۵\ ,\ -\frac{۱}{۲۱۶}\ ,\ ۱۰$$

$$۶\ ,\ \sqrt[۳]{۷}\ ,\ \sqrt[۳]{-۵}\ ,\ -\frac{۱}{۶}\ ,\ \sqrt[۳]{۱۰}$$

۳ــ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

✓ $\sqrt[۳]{(-۵)^{۳}} = -۵$	✓ $\sqrt{(-۵)^{۲}} = \lvert -۵ \rvert = ۵$	✓ $\sqrt[۳]{(-۱)^{۳}} = -۱$	× $\sqrt{(-۱)^{۲}} = -۱$
✓ $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$	× $(\sqrt{-۱})^{۲} = ۱$	✓ $\sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲$	✓ $-\sqrt{\frac{۴۹}{۲۵۶}} = -\frac{۷}{۱۶}$

۴ــ حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt[۳]{۱۲۵}\times\sqrt{۳۶}\qquad \sqrt[۳]{-۱}\times\sqrt{۸۱}\qquad \sqrt[۳]{\frac{۸۱}{۳}}\qquad\qquad \sqrt[۳]{-۲۵}\times\sqrt[۳]{۵}$$

$$۳\qquad ۳۰\qquad -۹\qquad\qquad -۵$$

۵ــ حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد :

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{۴} \rightarrow \sqrt[3]{a} < ۲ = \sqrt[3]{۸} \rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{۸}$$

پس $a < ۸$

... ۵, ۶, ۷

۶ــ رابطه $\sqrt{(-x)^۲} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

$$\sqrt{(-x)^۲} = \sqrt{x^۲} = |x|$$

در صورتی $|x| = x$ است که x عددی نامنفی باشد.

$$x = ۴ \Rightarrow \sqrt{(-۴)^۲} = \sqrt{۴^۲} = ۴ \qquad x = ۰ \Rightarrow \sqrt{(-۰)^۲} = \sqrt{۰} = ۰$$

$$x = -۹ \Rightarrow \sqrt{(-(-۹))^۲} = \sqrt{۹^۲} = ۹ \neq -۹$$

۷ــ اگر مساحت کل یک مکعب $۹۶a^۲$ باشد، حجم آن را بر حسب a به‌دست آورید.

حجم $(۴a)^۳ = ۶۴a^۳$ مساحت یک وجه $۹۶a^۲ \div ۶ = ۱۶a^۲$

ضلع $\sqrt{۱۶a^۲} = ۴a$

۸ــ اگر $x > ۰$ و $y < ۰$ باشد، حاصل $\sqrt{x^۲} - \sqrt{y^۲}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^۲} - \sqrt{y^۲} = |x| - |y| = x - (-y) = x + y$$

۹ــ عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید : $\sqrt{۹۰} = \sqrt{۲ \times ۳^۲ \times ۵} = \sqrt{۳^۲} \times \sqrt{۱۰} = ۳\sqrt{۱۰}$

$$\sqrt[3]{۱۲۵^۲} \quad , \quad \sqrt{۲۴} \quad , \quad \sqrt{۸۰} \quad , \quad \sqrt{۱۵۰}$$

$$\sqrt{۲۴} = \sqrt{۳ \times ۲^۳} = \sqrt{۳ \times ۲ \times ۲^۲} = ۲\sqrt{۶} \qquad \sqrt{۱۵۰} = \sqrt{۳ \times ۲ \times ۵^۲} = ۵\sqrt{۶}$$

$$\sqrt[3]{۱۲۵^۲} = \sqrt[3]{(۵^۳)^۲} = \sqrt[3]{(۵^۲)^۳} = ۵^۲ \qquad \sqrt{۸۰} = \sqrt{۲^۴ \times ۵} = ۴\sqrt{۵}$$

۱۰ــ آیا تساوی‌های زیر درست است؟ بله

$$\sqrt[3]{-۴} = -\sqrt[3]{۴} \qquad (\sqrt[3]{-۲})^۳ = -۲$$

$$\sqrt[3]{-۴} = \sqrt{(-۱)^۳ \times ۴^۳} = -۱\sqrt[3]{۴} \qquad (\sqrt[3]{-۲})^۳ = (\sqrt[3]{-۲} \times \sqrt[3]{۲} \times \sqrt[3]{-۲})$$

$$= \sqrt[3]{(-۲)^۳} = -۲$$

۱۱ــ حاصل را به‌دست آورید :

$\frac{\sqrt[3]{۱۸}\times\sqrt[3]{۶۰}}{\sqrt[3]{۵}}=$

$\sqrt[3]{\frac{۱۸\times۶۰}{۵}}$

$=\sqrt[3]{۲۱۶}=۶$

$\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۱۰}}$

$=\sqrt{\frac{۴۰}{۱۰}}=\sqrt{۴}=۲$

$۲\sqrt[3]{۱۶}\times۳\sqrt[3]{۴}=$

$۶\sqrt[3]{۶۴}=۶\sqrt[3]{۴^{۳}}$

$=۶\times۵=۲۴$

تمرین

۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $۲\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳۲}+۲\sqrt{۷۲}$

$=۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}+۱۲\sqrt{۲}$

$=۲۶\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt[3]{۲۷^{۲}}$

$=\sqrt[3]{(۳^{۳})^{۲}}$

$=\sqrt[3]{(۳^{۲})^{۳}}=۹$

هـ) $(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲})$

$=\sqrt{۲۰}+۲-\sqrt{۵۰}-\sqrt{۱۰}$

$=۲\sqrt{۵}+۲-۵\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}$

ب) $\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲۸}-\sqrt{۵۰}$

$=۲\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$

د) $\sqrt[3]{\frac{-۲۷}{۶۴}}$

$=\sqrt[3]{\frac{-۳^{۳}}{۴^{۳}}}=\frac{-۳}{۴}$

و) $۲\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۲۷}$

$=۸\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$

۲ــ اگر $x<۰$ باشد حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $۲\sqrt{x^{۲}}-x$

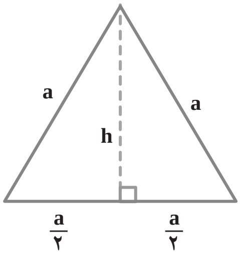
$=۲|x|-x=۲(-x)-x=-۲x-x=-۳x$

۳ــ محیط و مساحت مربعی به‌طول ضلع $۳\sqrt{۵}$ سانتی‌متر را به‌دست آورید.

محیط $=۴\times۳\sqrt{۵}=۱۲\sqrt{۵}$

مساحت $=(۳\sqrt{۵})^{۲}=۹\times۵=۴۵$

۴ــ شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازهٔ ارتفاع h را برحسب a به‌دست آورید؛ سپس مساحت آن‌را برحسب a بنویسید.

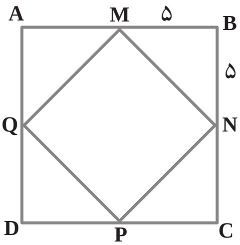


$$h^{۲} = a^{۲} - \left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}$$

$$h^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳}{۴}a^{۲} \qquad h = \sqrt{\frac{۳}{۴}a^{۲}} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S = \frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}$$

۵ــ نقاط M، N، P و Q وسط‌های اضلاع مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟



$$\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

$$MN^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} = ۲۵ + ۲۵ = ۵۰$$

$$MN = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \qquad \text{محیط} = ۴ \times ۵\sqrt{۲} = ۲۰\sqrt{۲}$$

۶ــ در جاهای خالی علامت > یا = یا < بگذارید :

$\sqrt{۵} + \sqrt{۴} > \sqrt{۵ + ۴}$ $\qquad$ $۴ > \sqrt{۳^{۲} + ۲^{۲}}$

$۲ + \sqrt{۵} \quad ۳$ $\qquad$ $\sqrt{۱۶} \quad \sqrt{۱۳}$

$\sqrt{\frac{۳}{۱۱}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}$ $\qquad$ $\sqrt{۳^{۲} + ۴^{۲}} = ۵$

$\sqrt{۲۵}$

۷ــ در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

الف) $\sqrt{\boxed{۱۰۰}} = ۱۰$ $\quad$ ب) $۲\sqrt{\boxed{۹}} = ۶$ $\quad$ ج) $\sqrt{\boxed{\frac{۱}{۹}}} = \frac{۱}{۳}$ $\quad$ د) $\sqrt[۳]{۸} = ۲$

ح) $9\sqrt[3]{-27} = \frac{12^3}{(-4)^3}$ ز) $\frac{m^6 \times m^{-2}}{m^3} = m$ و) $\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^{-1}$ هـ) $\frac{2^{-5}}{2^{-8}} = \sqrt{64}$

۸ــ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{a}$ ج) $\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

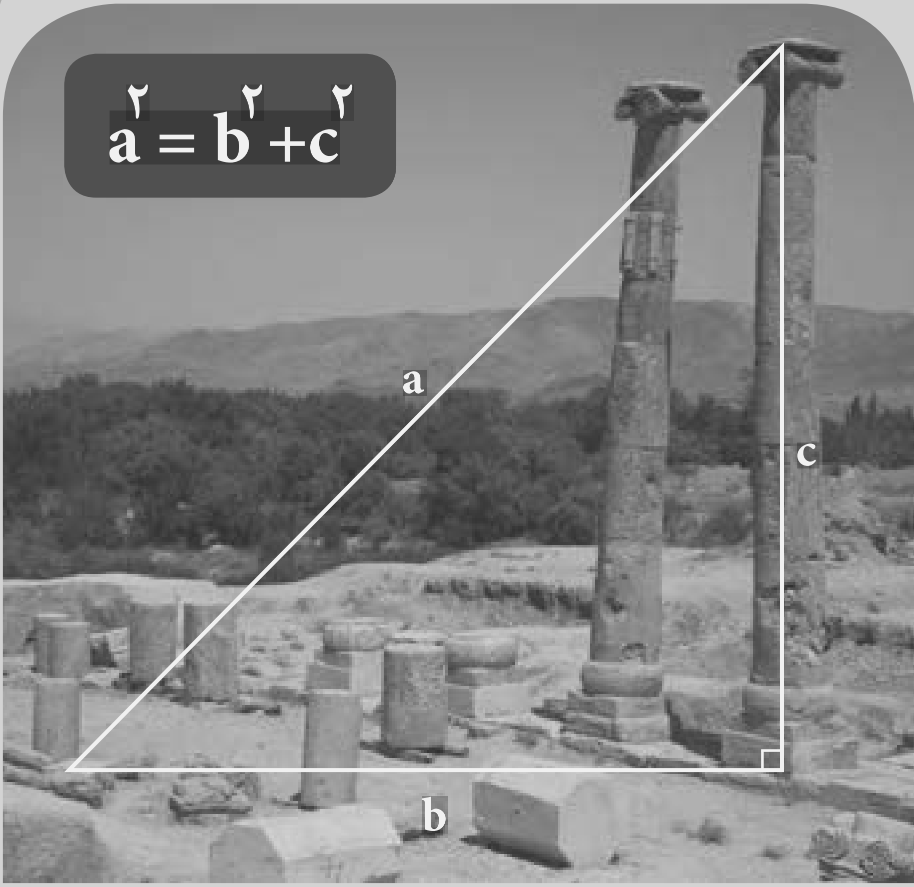
۹ــ آیا تساوی $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$، تساوی درست است.

چون اگر x عددی منفی باشد عدد زیر رادیکال درست است منفی شده و اعداد منفی جذر ندارند.

فصل ۵

عبارت‌های جبری



اثر باستانی «میلیونها» ـــ استان مرکزی

عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند، به‌طور مثال رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

نگاه کلی به فصل

درس اوّل : یادآوری و تکمیل مطالب مربوط به یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها است. در این قسمت عبارت‌هایی که یک‌جمله‌ای محسوب نمی‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند در ادامه یک جمله‌ای‌های متشابه، درجه یک‌جمله‌ای، یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه و چندجمله‌ای‌ها تعریف دقیق شده و مثال‌هایی آورده شده است.

همچنین به معرفی اتحاد پرداخته و تفاوت بین اتحاد و معادله را با انجام یک فعالیت بررسی خواهیم کرد. سپس اتحاد مربع دوجمله‌ای و مفهوم تجزیه و تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادها در این درس آمده است.

درس دوم : در ادامه درس اوّل اتحاد مربع سه جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک آمده است. نکته مهمی که باید به آن توجه داشت، این است که در اثبات اتحادها از استدلال جبری و تعبیر هندسی استفاده شده است و دانش‌آموز باید بتواند اتحادهای جبری را به‌صورت یک عبارت کلامی بیان کند. در ادامه تجزیه چندجمله‌ای ها به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک با انجام چند فعالیت بررسی شده و اتحاد مربع دوجمله‌ای به‌عنوان حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک آمده است.

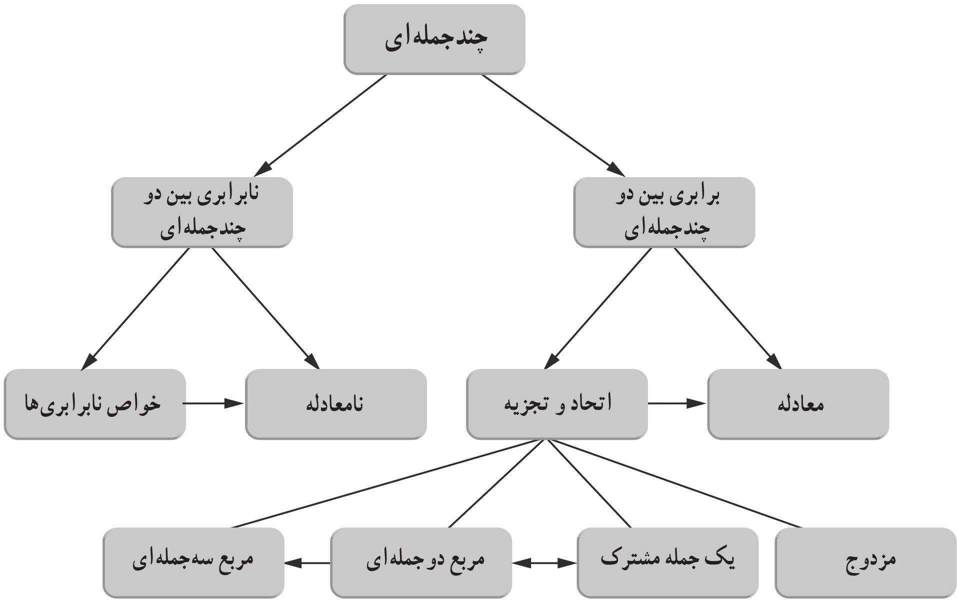
درس سوم : مفهوم نابرابری و تعریف آن بیان می‌شود. باید توجه داشت که این تعریف یک رابطهٔ دوسویه است و از هر دو طرف آن استفاده می‌شود.

$$a>b \Leftrightarrow \exists\, p>0 : a=b+p$$

پس مفهوم «≥» و نامساوی مضاعف مطرح شده است. در ادامه خواص نابرابرها با استفاده ازیک فعالیت به‌صورت استدلال استقرایی مطرح شده است. می توان خواص نابرابری‌ها را به کمک تعریف آن اثبات کرد که در قسمت دانستنی برای معلم، خواهیم آورد.

در قسمت آخر مفهوم نامعادله یک‌مجهولی درجه اوّل و روش حل آن با استفاده از خواص نابرابرها آمده است و مجموعهٔ جواب نامعادله با بررسی چند مثال خاتمه‌بخش این فصل است.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

۱ــ کوتاه‌شدهٔ تاریخ جبر و نمادهای حرفی[1] : جبر به‌عنوان دانش حلّ معادله‌ها پدید آمد. در مصر و بابل کهن و همچنین در دوران‌های جدیدتر در هند، با مقدمه‌های جبر آشنا بودند و با توجه به داده‌های مسأله، می‌توانستند معادله راتشکیل دهند و برخی از گونه‌های آن را حل کنند. البته آنها از حرف برای نشان‌دادن داده‌ها و مجهول‌ها آگاهی نداشتند و نمی‌توانستند معادله‌ها را به صورت کلی خود تنظیم کنند. در دوران ریاضیات کاربردی، عنصرهای جبری، همچون ادامهٔ دانش حساب تلقی می‌شد. با وجود این، به ویژه بابلی‌ها تا مرز بالایی از جبر جلو رفته بودند و می‌توانستند مسأله‌های عملی را که منجر به گونه‌هایی از معادلهٔ درجهٔ دوم و در بعضی حالت‌ها، حتی درجهٔ سوم شود، حل کنند.

به واژهٔ «جبر» برای نخستین بار در سدهٔ نهم میلادی و در کارهای محمد فرزند موسیٰ مشهور به خوارزمی، برخورد می‌کنیم. خوارزمی کتاب «حساب جبر و مقابله» را به تشکیل و حلّ معادله‌ها اختصاص داده است. او از شش نوع معادله صحبت می‌کند که یکی از آنها، معادلهٔ درجهٔ اول و پنج گونهٔ دیگر درجهٔ دوم است (درواقع، معادلهٔ درجهٔ اول را هم حالت خاصی از معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی

۱ــ تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

که ضریب درجهٔ دوم برابر صفر باشد، می‌گیرد). «حساب جبر و مقابله» همه چیز را با واژه‌ها بیان می‌کند و هیچ‌گونه نماد حرفی ندارد.

اصطلاح‌های «جبر» به معنای «جبران کردن»، و «مقابله» (مقابل هم قراردادن)، معرّف دو عمل سادهٔ جبری است؛ به نحوی که همهٔ جمله‌های سمت چپ و راست معادله، مثبت یا با ضریب مثبت باشند. واژهٔ «جبر» به همان معنایی آمده است که در این مصراع سعدی : «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند» و از نظر عمل‌های جبری، به معنای انتقال جملهٔ منفی به طرف دیگر معادله است تا مثبت شود. اصطلاح «مقابله» هم به معنای مقابل قراردادن جمله‌ها در دو طرف برابری و حذف مقدارهای برابر از دو طرف است.

به این ترتیب «جبر و مقابله» به معنای ساده‌کردن معادله و ساده‌کردن جمله‌های متشابه است. نمادهای امروزی به تدریج و در طول زمان به وجود آمد.

«محمد کرجی» ریاضیدان ایرانی اول سدهٔ یازدهم میلادی، برای نشان دادن مجهول، نمادی را انتخاب کرد. معادله‌ها نزد ایرانی‌ها تا جایی رسید که «خیام» معادله‌های درجهٔ سوم را به یاری برش‌های مخروطی حل می‌کند. باید توجه داشت که ایرانیان به پیروی ازیونانی‌ها، از هندسه برای حل مسأله‌های جبری کمک می‌گرفتند. خوارزمی مسأله‌های خود را گاهی با شیوهٔ جبری و گاهی با کمک هندسه حل می‌کند. ولی خیام برای حلّ معادله‌های درجهٔ سوم، تنها از هندسه و برش‌های مخروطی استفاده می‌کند تا سرانجام جمشید کاشانی راه حلّی جبری برای معادلهٔ درجهٔ سوم می‌یابد که جواب را تا هر درجهٔ دقت به‌دست می‌دهد.

۲ــ یک‌جمله‌ای صفر و درجهٔ آن : یک نوع ساده از عبارت‌های جبری، چندجمله‌ای‌ها هستند. در این جا چندجمله‌ای با یک متغیر را بحث خواهیم کرد.

هر چندجمله‌ای یک متغیره، به‌صورت یک عبارت جبری روی یک متغیر است که در آن فقط از جمع و ضرب روی آن متغیر و اعداد استفاده شده است، مانند :

$$2x^3+5x^2+4 \qquad \text{یا} \qquad -\frac{2}{5}x+7x^2-3x^5-\sqrt{2}$$

چنانچه یک عبارت جبری فقط از ضرب اعداد در آن متغیر حاصل شود، به آن یک جمله گفته می‌شود، هریک جمله‌ای برحسب متغیر x را پس از ساده‌کردن به‌صورت ax^n نمایش می‌دهند که درآن $a\in\mathbb{R}$، $n\in W$ درجهٔ یک‌جمله‌ای و x متغیر آن یک‌جمله‌ای است، واضح است که :

$$ax^n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & n = 0 \end{cases}$$

درنتیجه هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ یک‌جمله‌ای برحسب متغیر x و از درجه صفر است. عدد ۰ نیز یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود و برای آن درجه تعریف نمی‌کنیم. این گونه محدودیت‌ها در تعاریف را قبلاً دیده‌اید، برای مثال وقتی مفهوم عمل تقسیم تعریف می‌شود، در آن همواره مقسوم علیه را مخالف با صفر در نظر می‌گیریم و عمل تقسیم بر صفر را تعریف‌نشده تلقی می‌کنیم.

اگر اصرار داشته باشیم که برای یک‌جمله‌ای صفر درجه تعریف کنیم، باید این جمله را چنان در نظر بگیریم که در بیان‌کردن قضیه‌ها ثمری داشته باشد و به ویژگی مهمی اشاره کند. دو قضیه زیر را در چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیرید.

قضیه ۱ : درجه حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای برابر با مجموع درجه‌های آن دو چندجمله‌ای است.

قضیه ۲ : درجه حاصل‌جمع دو چندجمله‌ای کوچک‌تر یا مساوی ماکزیمم درجهٔ آن دوچندجمله‌ای است.

اکنون اگر در قضیه ۱، $A=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ و $B=0$ قرار دهید، در این صورت مثال نقضی برای درستی این قضیه به‌دست آورده‌ایم.

برای اینکه از این تنگنا عبور کنیم، دو پیشنهاد مطرح می‌شود.

پیشنهاد اول : در قضیه‌های ۱ و ۲، دو چندجمله‌ای راناصفر در نظر بگیریم.

پیشنهاد دوم : صورت قضیه را تغییر ندهیم ولی برای یک‌جمله‌ای صفر، درجه تعریف کنیم. در این حالت اگر درجهٔ یک‌جمله‌ای صفر را $-\infty$ تعریف کنیم، روشن است که معنای قابل قبولی در قضیه‌های ۱ و ۲ خواهد داشت. برای مثال فرض کنید A یک‌جمله‌ای برحسب متغیر x و از درجهٔ n و Bچندجمله‌ای صفر و از درجهٔ $-\infty$ باشد، در این صورت $A\times B=0$ و درجهٔ حاصل‌ضرب $A\times B$ برابر با $-\infty$ است. از آنجا که $n+(-\infty)=-\infty$ پس درستی قضیه ۱ برقرار خواهد بود.

مسیرهایی برای توسعه

تعریف پیشرفته از چندجمله‌ای‌ها[1] : عملاً، هر چندجمله‌ای که به شکل استاندارد خود نوشته شده باشد، با دنباله ضرایب خود به‌طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، هر چندجمله‌ای را می‌توان متناظر یک دنباله از اعداد در نظر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر است.

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n\leftrightarrow(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$$

۱ــ آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟ / دکتر ناصر بروجردیان / مجلّه ریاضی پایا ۶

در سطوح پیشرفته‌تر، برای تعریف چندجمله‌ای‌ها فقط همین دنباله ضرایب را در نظر می‌گیرند و هر دنباله از اعداد حقیقی که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر باشد را به عنوان یک‌چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی معرفی می‌کنند. روشن است که در این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، کسی چندجمله‌ای‌ها را به‌عنوان تابع در نظر نخواهد گرفت. البته این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، مناسب مدرسه نیست و در اینجا فقط برای روشن شدن مفاهیم، صرفاً برای معلمین این روش آورده شده است. با این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) . (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (c_0+c_1, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots)$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$$

توجه داشته باشید که این دنباله‌ها با اندیس صفر شروع می‌شوند. چندجمله‌ای‌هایی که اندیس ۱ به بعد آنها صفر است و فقط اندیس صفر آنها احیاناً ناصفر است با یک عدد حقیقی مشخص می‌شوند و جمع و ضرب آنها همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی،

$$(a_0, 0, 0, \ldots) + (b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0+b_0, 0, 0, \ldots)$$

$$(a_0, 0, 0, \ldots) . (b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0 b_0, 0, 0, \ldots)$$

به همین خاطر به خود حق می‌دهیم، این چندجمله‌ای‌ها را با همان ضریب اندیس صفرشان نشان دهیم و اعداد حقیقی را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیریم. پس عدد a به‌عنوان یک چندجمله‌ای همان دنباله $(a, 0, 0, \ldots)$ است. با توجه به تعریف جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب یک عدد با چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر خواهد بود.

$$a + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a+b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

$$a\,(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (ab_0, ab_1, \ldots, ab_n, \ldots)$$

چندجمله‌ای $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ نقش ویژه‌ای بازی می‌کند و برای آن یک اسم خاص انتخاب می‌کنیم و مثلاً آن را با x نشان می‌دهیم. ضرب یک چندجمله‌ای در x موجب می‌شود ضرایب آن چندجمله‌ای، یک واحد به جلو حرکت کند، یعنی

$$x\,(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (0, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

به ویژه ضرب x در خودش به شکل زیر خواهد بود.

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

با این علامت‌گذاری‌ها و قراردادها، هرچندجمله‌ای $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) = a_0(1, 0, 0, \ldots) + a_1(0, 1, 0, 0, \ldots) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$$

$$= a_0 + a_1 \chi + \ldots + a_n \chi^n$$

به این ترتیب به همان شکل مرسوم چندجمله‌ای‌ها می‌رسیم، ولی یک تفاوت اساسی وجود دارد که در اینجا χ یک متغیر عددی نیست و یک چندجمله‌ای خاص است، درواقع $\chi = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ مجموعه چندجمله‌ای‌ها، مجموعهٔ مشخصی از اشیاء معین است که بین آنها عملیات جمع و ضرب تعریف شده است و تمام خواص مهم اعمال جمع و ضرب برقرار است، غیر از اینکه چندجمله‌ای‌ها عموماً وارون‌پذیر نیستند. در واقع تنها چندجمله‌ای‌های وارون‌پذیر، اعداد ناصفرند.

چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای: در هر چندجمله‌ای، اگر چندجمله‌ای خاص χ را به متغیر عددی x تبدیل کنیم، یک چندجمله‌ای معمولی به‌دست می‌آوریم که در مدرسه مطرح می‌شود و می‌توانیم آن را به‌عنوان یک تابع در نظر بگیریم. این گونه توابع را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توجه کنید که چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای دو مفهوم متفاوتند، اگرچه تشخیص این تفاوت در سطح مدرسه آسان نیست. البته برای دانش‌آموزان تشخیص این تفاوت ساده‌تر است، زیرا دانش‌آموزان هنوز مفهوم تابع را نمی‌شناسند تا مشکلی برای تفکیک‌کردن داشته باشند. بیشترین مشکل برای خود معلمین است که هر دو مفهوم را می شناسند و باید بتوانند این دو مفهوم را برای خود از هم تفکیک کنند. چندجمله‌ای به‌عنوان تابع در ذهن معلمین قوی‌تر است، ولی معلمین باید بتوانند به چندجمله‌ای در شکل استاندارد آن نگاه کنند و آن را صرفاً به‌عنوان یک عبارت جبری یا دنباله ضرایب در نظر بگیرند. با این تفکیک دو مفهوم چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای از هم جدا خواهند شد.

البته با وجود تفاوت مفهومی بین چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای، بین آنها یک تناظر یک به یک برقرار است و هر چندجمله‌ای یک تابع چند جمله‌ای مشخص می‌کند و برعکس و دو چندجمله‌ای مساویند اگر و فقط اگر توابع چندجمله‌ای وابسته به آنها مساوی باشند. همچنین اعمال جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها متناظر اعمال جمع و ضرب توابع چندجمله‌ای می‌باشد. به همین خاطر است که تفکیک این دو مفهوم مشکل شده است.

درجه چندجمله‌ای‌ها: به‌طور شهودی، بزرگ‌ترین توانی از χ که در یک چندجمله‌ای رخ می‌دهد را درجهٔ آن چندجمله‌ای می‌نامند. در چندجمله‌ای‌هایی که حداقل یک جمله ناصفر دارند

این مفهوم بدون ابهام است ولی برای چندجمله‌ای صفر که همه جملات آن به‌صورت $^{n})(,۰$ است نمی‌توان بزرگ‌ترین n را تعیین کرد. بنابراین مفهوم درجه، فقط برای آن چندجمله‌ای‌هایی قابل تعریف است که حداقل یکی از ضرایب آنها ناصفر باشد. به‌طور دقیق‌تر درجهٔ یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $(a_۰, a_۱, \dots, a_n, \dots)$ برابر است با بزرگ‌ترین اندیس k که $a_k \neq ۰$. روشن است که این تعریف فقط برای چندجمله‌ای‌های ناصفر اعتبار دارد و برای چندجمله‌ای صفر، درجه، تعریف نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

- جبر و مقابله / محمدبن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیوجم/ انتشارات اطلاعات
- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه از سری کتاب‌های کوچک ریاضی
- عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی/ انتشارات مدرسه
- همانی عبارت‌های جبری و کاربردهای آن / عبدالحسین مصحفی / انتشارات مدرسه
- نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میر شهرام صدر / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(\frac{۱}{۲}x^۲y)^۳$

ب) $(-۳a^۲b)(۲ab^۳)^۲$

ج) $(-\frac{۳}{۴}a^۲bc^۳)^۲(\frac{۲}{۳}ab^۲c)$

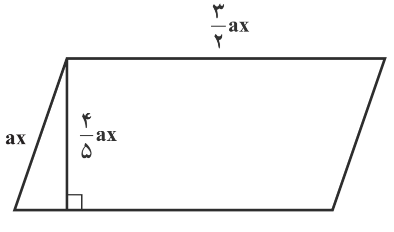
د) $(-\frac{۵}{۷}a^۲bxy^۲)(-\frac{۳}{۵}ax^۲y)$

هـ) $(\frac{۳}{۴}a^۲bxy)^۲(-\frac{۴}{۳}a^۵b^۲y^۳)^۳$

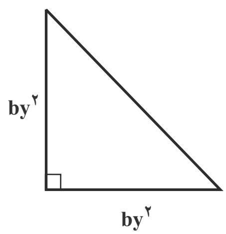
و) $(-\frac{۲}{۵}ab^۵)(\frac{۲۵}{۲}a^۵b)+۳(a^۲b^۲)^۳$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

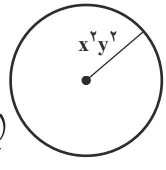
الف)



ب)



ج)



۳ــ درجه عبارت‌های زیر را نسبت به x، نسبت به y و نسبت به y و x تعیین کنید. سپس هریک از عبارت‌های زیر را یک‌بار برحسب توان‌های نزولی x و یک بار برحسب توان‌های نزولی y مرتب کنید.

الف) $-۳x^۲y+۴bx^۳y^۳-۹xy^۲+۵$

ب) $x^۶+x^۵y-x^۲y^۴+۲x^۳y^۳-x^۴y^۲+x+۱$

ج) $x^{k+۱}y^k-۳y^{k+۱}x^{k-۲}-۳y^{k+۳}+۵$

د) $\frac{۷}{۳}x^۳y-\frac{۱}{۲}xy^۳+\frac{۱}{۶}x^۲y^۲$

۴ــ اگر $A(x)=-x^۲-۱۰x+۱۲$ و $B(x)=-۳x^۲+۱-۲x$ و $C(x)=۴x^۲+۶x-۷$ حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید و سپس چندجمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x)+B(x)-۲C(x)$

ب) $\frac{۱}{۲}A(x)+B(x)-۳C(x)$

ج) $۲[A(x)-B(x)]+۳C(x)$

د) $۲B(x)-A(x).C(x)$

۵ــ اگر $A(x)=(x^m-۱)^۲$ و $B(x)=x^m-x^{۲m}-۱$ و $C(x)=x^{m+۱}$، حاصل عبارت‌های زیر را تعیین کنید، سپس چندجمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x)+\frac{B(x)}{۲}-۳C(x)$

ب) $A(x)+B(x)-۲C(x)$

۶ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(x^۲+\frac{۷}{۵}x^۳-\frac{۱}{۴})(x^۲-\frac{۷}{۵}x^۳+\frac{۱}{۴})$

ب) $(۲x+\frac{y}{۳})^۲$

ج) $(-۴+xy)(xy+۵)$

د) $(x+y-۲z)^۲$

هـ) $(a^۲-b)(b+a^۲)$

و) $(\frac{۲}{۳}x^۲y+\frac{۳}{۴}z^۷)^۲$

ز) $(x^۳-۵xy-۳x^۲)(x^۲-۳x+۵y)$

ح) $(۴x-y^۲)^۲$

ط) $(a+۲b+c-۳)(a+۳-۲b+c)$

ی) $(۳\frac{۱}{۲}k^۳-\frac{۱۲}{۵}L^۵)^۲$

ک) $(۷x^۴y^۳+۳x^۷y^۹)^۲$

ل) $(a+۵)(a-۳)(a^۲-۲a+۱۵)$

م) $(x^{k+۲}+y^{k+۲})(x^{k+۲}-y^{k+۲})$

ن) $(۲a-\sqrt{۳b}-\frac{۱}{۲})^۲$

ق) $(a^mb^n-c^md^n)(a^mb^n+c^md^n)$

ر) $(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲$

ش) $[(۲x-y)(۲x+y)]^۲$

ت) $(۲x^m-۱)(۲x^m+۱)(۴x^{۲m}+۱)$

ث) $(x^۲+x+۱)(x^۲+x-۲)(x^۴+۲x^۳+x+۲)$

خ) $(\frac{۳}{a}+\frac{a}{۳})(\frac{۳}{a}-\frac{a}{۳})$

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $۲۵۶^۳-۲۵۰^۳-۶^۳$

ب) $۱۰۰۰۱^۲$

ج) $۷۵^۲-۲۷۵^۲$

د) ۴۲۳×۴۳۷

هـ) $۴۴۰^۲-۴۳۰^۲-۱۰^۲$

و) $۱۰۲^۳-۲^۳$

۸ــ به‌جای نقطه‌چین‌ها، عبارت مناسب بنویسید.

الف) $(۲x-...)^۲=...-۱۲x+...$

ب) $(...+...)^۲=a^۲+۱۲ab^۲+...$

ج) $(...-۷y)(x^۲+...)=(...)^۲-۴۹y^۲$

د) $(...+...)^۲=\frac{۹}{۴}a^۲+\frac{۹}{۱۶}+...$

چند مسئلهٔ کاربردی نامعادلهٔ یک‌مجهولی درجه اوّل

۹ــ زمین‌شناسی: در جریان حفّاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند، که درجهٔ حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T=۲۵(x-۳)+۳۰ \qquad (۳\leq x\leq ۱۵)$$

که در این رابطه، T درجهٔ حرارت برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است. مشخص کنید در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

حل:

$$T=۲۰۰\Rightarrow ۲۰۰=۲۵(x-۳)+۳۰\Rightarrow x=۹/۸$$

$$T=۳۰۰\Rightarrow ۳۰۰=۲۵(x-۳)+۳۰\Rightarrow x=۱۳/۸$$

درنتیجه $۹/۸\leq x\leq ۱۳/۸$، یعنی در عمق ۹/۸ تا ۱۳/۸ کیلومتری زیر سطح زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

۱۰ــ هواشناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالا می‌رود، منبسط می‌شود و تقریباً بعد از ۴۰۰۰۰ پا. برای هر ۱۰۰۰ پا؛ ۵/۵ فارنهایت از درجهٔ هوا کم می‌شود. اگر درجهٔ حرارت در اطراف سطح زمین $۷۰^\circ f$ باشد، آنگاه درجه حرارت (T) در ارتفاع h از سطح زمین از رابطهٔ $T=۷۰-۰/۰۰۵۵h$ به‌دست می‌آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجه حرارت هوا از $-۴۰^\circ f$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند، به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases}-۴۰\leq T\leq ۲۶\\ T=۷۰-۰/۰۰۵۵h\end{cases}\Rightarrow -۴۰\leq ۷۰-۰/۰۰۵۵h\leq ۲۶$$

$$\Rightarrow -۴۰-۷۰\leq -۰/۰۰۵۵h\leq ۲۶-۷۰\Rightarrow -۱۱۰\leq -۰/۰۰۵۵h\leq -۴۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱۰}{۰/۰۰۵۵} \ge h \ge \frac{۴۴}{۰/۰۰۵۵} \Rightarrow ۲۰۰۰۰ \ge h \ge ۸۰۰۰$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین $-۴۰^\circ f$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند.

۱۱ــ روان‌شناسی : آی‌کیوی (IQ) افراد مختلف از فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰$$

که در آن MA سنّ هوشی و CA سنّ تقویمی افراد است. درصورتی که $۸۰ \le IQ \le ۱۴۰$؛ برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سنّ هوشی را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} ۸۰ \le IQ \le ۱۴۰ \\ IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰ \\ CA = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۸۰ \le \frac{MA}{۱۲} \times ۱۰۰ \le ۱۴۰ \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۸۰ \le MA \le \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۱۴۰$$

$$\Rightarrow ۹/۶ \le MA \le ۱۶/۸$$

درنتیجه سنّ هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

۱۲ــ تجارت و اقتصاد : در یک تجارت سودآور واضح است، که باید سود (R) بیشتر از هزینهٔ (C) باشد؛ یعنی $R > C$. اگر معادلهٔ هزینهٔ یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به‌صورت $C = ۳۰۰ + ۱/۵x$ و معادلهٔ سود شرکت در یک هفته به‌صورت $R = ۲x$ باشد، که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته‌شده در یک هفته است؛ در این صورت این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد، تا اینکه فعالیت تولیدی آن در واقع سودآور باشد.

حل :

$$\begin{cases} R > C \\ C = ۳۰۰ + ۱/۵x \\ R = ۲x \end{cases} \Rightarrow ۲x > ۳۰۰ + ۱/۵x \Rightarrow x > ۶۰۰$$

درنتیجه برای اینکه فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیشتر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

۱۳ــ مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید :

الف) $۳-۲x \ge ۵(۳-۲x)$ ب) $۲(x-۳)+۵ < ۵-x$

ج) $\frac{۷m}{-۳} + ۱ \le -۲$ د) $-۷n \ge ۲۱$

هـ) $-۲-\frac{q}{۴}\le\frac{۱+q}{۳}$

و) $\frac{y-۳}{۴}-۱>\frac{y}{۲}$

ز) $۲\le ۳m-۷<۱۴+۲m$

ح) $\frac{p}{۳}-\frac{p-۲}{۲}\le\frac{p}{۴}-۴$

ط) $\frac{۲x}{۵}-\frac{۱}{۲}(x-۳)\le\frac{۲x}{۳}-\frac{۳}{۱۰}(x+۲)$

ی) $-۴\le\frac{۹}{۵}x+۳۲\le ۶۸$

ک) $-۶\le-\frac{۲}{۳}(۱-x)\le ۴$

ل) $۱۵\le ۷-\frac{۲}{۵}x\le ۲۱$

درس اوّل: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

اهداف

ــ یک‌جمله‌ای را تشخیص دهد و مفهوم ضریب عددی و قسمت حرفی را درک کند.

ــ مفهوم چندجمله‌ای را درک کند و بتواند چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی متغیر مرتب کند.

ــ مفهوم اتحاد را درک کند و فرق اتحاد با معادله را بداند

ــ اتحاد مربع دوجمله‌ای را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و درستی آن را از روش جبری و هندسی درک کند.

ــ مفهوم تجزیه را بداند.

ــ در صورت امکان با استفاده از ب. م.م چندجمله‌ای را تجزیه کند و به تجزیه سه‌جمله‌ای‌ها به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای مسلط شود.

روش تدریس

هدف فعالیت صفحه ۷۹ ارائه مفهوم یک‌جمله‌ای است، با انجام این فعالیت دانش آموزان باید بتوانند یک‌جمله‌ای‌ها را تشخیص دهند. سپس ضریب عددی و عبارت حرفی آنها را مشخص کنند.

$۲\sqrt{x}$ و $\sqrt[۳]{y}$ یک جمله‌ای نیستند زیرا از حاصل‌ضرب متغیرها با توان‌های صحیح و منفی در اعداد به‌دست نیامده‌اند.

$\frac{۱}{x}$ و $|x|$ یک‌جمله‌ای نیستند، زیرا به‌طور صریح از حاصل‌ضرب اعداد در متغیرها با توان‌های صحیح و نامنفی به‌دست نیامده‌اند.

$۲x^۲+۲x$ و $۱+x$ یک‌جمله‌ای نیستند، زیرا در آنها از عمل جمع استفاده کردیم، درحالی که در یک جمله‌ای‌ها فقط از عمل ضرب (با توجه به تعریف) استفاده می‌کنیم.

۳^x یک‌جمله‌ای نیست، زیرا از ضرب اعداد در متغیرها (با توجه به تعریف) به‌دست نمی‌آید.

در ادامهٔ این فعالیت می‌خواهیم، عملیات روی یک‌جمله‌ای‌ها را یادآوری و تکمیل کنیم.

در قسمت ۲ فعالیت صفحهٔ ۸۰، درجهٔ یک‌جمله‌ای را نسبت به یک یا دو متغیر با استفاده از تکمیل جدول آموزش می‌دهیم، سپس چندجمله‌ای و درجهٔ چندجمله‌ای را نسبت به یک یا چند متغیر آورده‌ایم.

در قسمت ۳ فعالیت، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که چندجمله‌ای‌ها را نسبت به توان‌های

نزولی متغیر مرتب کنند و نتیجه این فعالیت آن است که «دو چندجمله‌ای وقتی با هم برابرند که صورت استاندارد آنها (یعنی برحسب توان‌های نزولی متغیر) با هم یکسان باشند».

در کار در کلاس صفحهٔ ۸۰ و ۸۱ می‌خواهیم عملیات روی چندجمله‌ای‌ها را با توجه به خاصیت توزیع‌پذیری یادآوری و تکمیل کنیم، سپس دانش‌آموزان چندجمله‌ای‌ها را ساده کنند.

نتیجه این کار در کلاس این است که «چندجمله‌ای‌ها فقط از جمع جبری یک‌جمله‌ای‌ها پدید نمی‌آیند، بلکه در بعضی مواقع از حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌ها در یکدیگر نیز حاصل می‌شوند».

هدف از فعالیت صفحه ۸۱ ارائهٔ مفهوم اتحاد است. با کامل‌کردن جدول ملاحظه می‌کنیم که مقادیر عددی دو ستون آخر با هم یکسان می‌شوند، سپس حاصل $(x+۳)^۲$ را با روش جبری به‌دست آورده و نتیجه می‌گیریم که حاصل آن $x^۲+۶x+۹$ است و به همین دلیل؛ دو ستون آخر جدول مقادیر عددی یکسانی دارند. در قسمت ۲ و ۳ این فعالیت می‌خواهیم دانش‌آموزان با ضرب پرانتزها، اتحاد مربع دوجمله‌ای را درک کنند، سپس با مقایسه دو طرف برابری اتحاد بتوانند با یک عبارت کلامی، این اتحاد را بیان کنند. سپس درستی این اتحاد را با روش هندسی درک کنند. در حقیقت در بیان اتحادها از دیدگاه جبری، دیدگاه هندسی و بیان اتحاد به‌صورت کلامی استفاده شده است.

در قسمت ۴ این فعالیت می‌خواهیم حاصل مربع تفاضل دو جمله یعنی $(a-b)^۲$ را پیدا کنیم و آن را با حاصل مربع مجموع دو جمله یعنی $(a+b)^۲$ مقایسه کنیم و در نهایت آنها را با عبارت‌های کلامی مشابه هم بیان کنیم.

قسمت ۱ کار در کلاس صفحه ۸۳ می‌خواهد که با عبارت‌های کلامی به‌دست آمده برای اتحاد مربع دوجمله‌ای، حاصل عبارات داده شده را به‌دست آورید.

در قسمت ۲ این کار در کلاس می‌خواهیم که با درک عبارت کلامی متناظر با اتحاد مربع دوجمله‌ای جاهای خالی را پر کند و این قسمت پیش‌زمینه ورود به تجزیه سه‌جمله‌ای‌هایی است که با این اتحاد تجزیه می‌شوند.

فعالیت صفحهٔ ۸۳ ورود به تجزیهٔ چندجمله‌ای‌هااست، در ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را به‌صورت زیر بنویسیم. در این صورت دوجمله‌ای $ab+ac$ را تجزیه کرده‌ایم:

$$ab+ac=a(b+c)$$

در اینجا a را (ب.م.م) جملات چندجمله‌ای معرفی کرده و به این روش در صورت وجود (ب.م.م) بین جملات می‌توان چندجمله‌ای را تجزیه کرد.

هدف از کار در کلاس صفحهٔ ۸۴ این است که سه‌جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه کنیم. ابتدا باید تشخیص دهیم، کدام سه‌جمله‌ای‌ها به کمک این اتحاد با ضرایب گویا تجزیه می‌شوند. با توجه به سه‌جمله‌ای $a^۲+۲ab+b^۲$ در سه‌جمله‌ای‌هایی که دو جملهٔ مربع کامل داشته باشند؛ اولی و دومی را تشخیص می‌دهیم. سپس اگر جملهٔ دیگر، دو برابر حاصل‌ضرب اولی و دومی باشد، به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای آن را تجزیه می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر بین جملات (ب.م.م) موجود بود، ابتدا به کمک (ب.م.م)گیری تجزیه می‌کنیم. سپس از اتحاد مربع دوجمله‌ای برای ادامه تجزیه استفاده می‌کنیم، مانند :

$$۱۸ab-۳a^۲b-۲۷b=۳b(۶a-a^۲-۹)$$

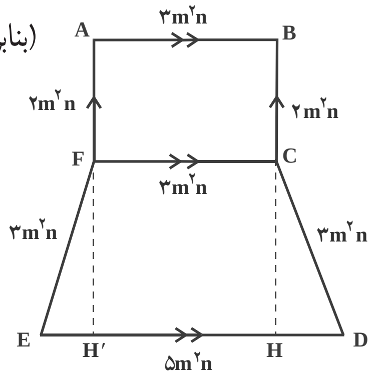
(ب.م.م) $=۳b$

$$=-۳b(a^۲-۶a+۹)$$

$$=-۳b(a-۳)^۲=-۳b(a-۳)(a-۳)$$

تمرین صفحهٔ ۸۵

۲ــ چون ذوزنقه FCDE متساوی‌الساقین است، پس $\hat{E}=\hat{D}$.



$$\begin{cases}\hat{E}=\hat{D}\\ FE=CD\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{CHD}\cong \overset{\Delta}{FH'B}$$ (بنابر وتر و یک زاویه)

$$\Rightarrow HD=EH'=m^۲n$$

$$\overset{\Delta}{CHD}: CD^۲=CH^۲+HD^۲$$

$$\Rightarrow (۳m^۲n)^۲=CH^۲+(m^۲n)^۲$$

$$\Rightarrow CH=۲\sqrt{۲}m^۲n$$

مساحت ذوزنقه + مساحت مستطیل = S (مساحت شکل)

$$=۳m^۲n\times ۲m^۲n+\frac{(۳m^۲n+۵m^۲n)\times ۲\sqrt{۲}m^۲n}{۲}=(۶+۸\sqrt{۲})m^۴n^۲$$

۶ــ هدف تمرین این است که بگوییم حاصل $(a-b)^2$ را می‌توان با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، مستقیماً محاسبه کرد.

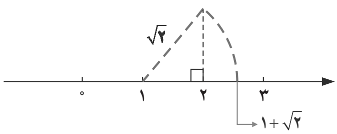
$$(a+(-b))^2=a^2+2(a)(-b)+(-b)^2$$
$$\Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

اشتباهات رایج

یکی از سؤال‌های متداول دانش‌آموزان در بحث عبارت‌های جبری، شمردن تعداد جمله‌های یک چندجمله‌ای‌است، آنها می‌گویند برای مثال $5x^2+7x$ دوجمله‌ای است. از طرفی 0 یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود، اکنون آیا $5x^2+7x+0$ سه‌جمله‌ای است؟

در پاسخ به سؤال بالا می‌توان گفت: برای شمردن تعداد جمله‌های چندجمله‌ای، ابتدا باید آن را ساده کرد. برای این منظور جمله‌های متشابه را با یکدیگر جمع جبری می‌کنیم. سپس تعداد جمله‌های چندجمله‌ای ساده‌شده را می‌شماریم.

می‌دانیم ساده شدهٔ عبارت $5x^2+7x+0$ دوجمله‌ای $5x^2+7x$ است. پس اضافه‌کردن جملهٔ صفر، در تعداد جمله‌ها تأثیری ندارد.



توجه داشته باشید که عبارت $5x^2+7x+1+\sqrt{2}$ سه‌جمله‌ای محسوب می‌شود. زیرا $1+\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است و روی محور اعداد حقیقی یک نقطه منحصر به فرد است.

البته به‌طور دقیق‌تر می‌توان تعریف تعداد جمله‌های چندجمله‌ای را به‌صورت زیر آورد تا این‌گونه بدفهمی‌ها ایجاد نشود.

اگر در یک چندجمله‌ای ناصفر، k جمله غیرمتشابه ناصفر وجود داشته باشد، آن را یک kـ‌جمله‌ای می‌نامند. با این تعریف، یک‌جمله‌ای‌های ناصفر، مجدداً یک‌جمله‌ای هستند، اما این تعریف، برای صفر، تعداد جمله، تعریف نمی‌کند. اما قبلاً، بنا به تعریف، صفر را یک‌جمله‌ای محسوب کرده‌ایم. اشکالی که این مطلب، پیش آورده، این است که اگر مثلاً دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم باید یک دوجمله‌ای به‌دست آوریم، در حالی که $0+x=x$. این پارادکس نشان می‌دهد که در جایی اشتباه کرده‌ایم و این اشتباه در همین فکر ساده است که «اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم یک دوجمله‌ای به‌دست می‌آید». حرف درست آن است که «اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه ناصفر را جمع کنیم یک دوجمله‌ای ساخته می‌شود». بنابراین، در اینجا نیز باید صفر را کنار بگذاریم و مطلب مورد نظر را برای چندجمله‌ای‌های ناصفر بیان کنیم.

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اهداف

ــ اتحاد مربع سه‌جمله‌ای را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ اتحاد مزدوج را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ اتحاد یک جمله مشترک را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ چندجمله‌ای‌ها را به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک تجزیه کند.

روش تدریس

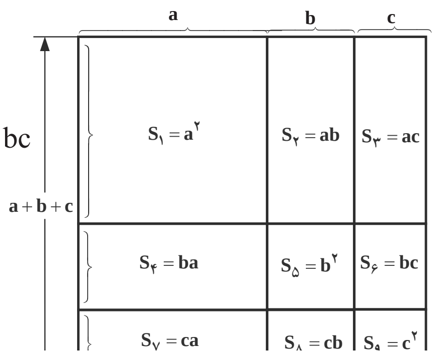
در درس اوّل اتحاد مربع دوجمله‌ای بررسی شد، در این فعالیت اتحاد مربع سه‌جمله‌ای با دو روش جبری بیان می‌شود. روش اول همان ضرب پرانتزها و استفاده از خاصیت‌پخشی است. در روش دوم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن $(a+b)$ را جمله اول و c را جمله دوم در نظر می‌گیریم.

در اینجا از دانش‌آموزان بخواهید که برای این اتحاد یک عبارت کلامی بیان کنند، سپس به کمک عبارت کلامی در مرحلهٔ بعد حاصل $(a+b-c)^۲$ را به‌صورت زیر بیابند.

$$(a+b-c)^۲=(a+b+(-c))^۲=a^۲+b^۲+(-c)^۲+۲ab+۲a(-c)+۲b(-c)$$
$$=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$$

برای درک درستی این اتحاد، علاوه‌بر روش جبری می‌توان از دیدگاه هندسی نیز درستی این اتحاد را درک کرد. برای این منظور مربعی به ضلع $(a+b+c)$ را در نظر بگیرید، مساحت این مربع برابر با $(a+b+c)^۲$ است که می‌توان این مساحت را به‌صورت مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌های به‌کار رفته در شکل زیر در نظر گرفت.

$$S=S_۱+S_۲+\dots+S_۹$$
$$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$$



در قسمت ۲ این فعالیت، اتحاد مزدوج بیان شده است، ابتدا با روش جبری این اتحاد بیان می‌شود، سپس از دیدگاه هندسی درستی اتحاد را درک‌کنیم، برای این منظور در سمت راست یک مربع به ضلع a را ملاحظه می‌کنید که مساحت آن برابر با a^2 است، اگر از این مربع مساحتی به اندازه b^2 (مساحت مربع به ضلع b) را جدا کنیم، آن‌گاه مساحت قسمت باقی‌مانده برابر با $S=(a^2-b^2)$ است. اکنون در قسمت پایین شکل سمت راست یک مستطیل با ابعاد b و $(a-b)$ را ملاحظه کنید، چنانچه این مستطیل را از قسمت خط‌چین جدا کنید و به پهلوی سمت راست شکل باقی مانده بچسبانید یک مستطیل به ابعاد $(a+b)$ و $(a-b)$ به‌دست می‌آید که مساحت آن برابر با $S=(a+b)(a-b)$ است درنتیجه :

$$S=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

توجه : بیان عبارت کلامی متناظر با این اتحاد ضروری است.

صفحه ۸۷، قسمت ۲ کار در کلاس، از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک اتحاد مزدوج، حاصل‌ضرب پرانتزها رامحاسبه کنند، برای این منظور جمع جبری جملاتی که در هر دو پرانتز علامت یکسانی دارند، به‌عنوان اولی و بقیه جملات پرانتز اوّل را دومی در نظر می‌گیریم، برای مثال :

$$(-4y-2z)(2z-4y)=(-4y)^2-(2z)^2=16y^2-4z^2$$

چون $-4y$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $=-4y$ درنتیجه دومی $=2z$ است.

$$(a-b-c+d)(b-a-c+d)=[(-c+d)+(a-b)][(-c+d)-(a-d)]$$

$$=(-c+d)^2-(a-d)^2$$

چون$(-c+d)$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $=(-c+d)$، درنتیجه دومی $=(a-b)$.

در فعالیت صفحهٔ ۸۷ می‌خواهیم عبارت‌های جبری را که به‌صورت تفاضل دو مربع کامل هستند، به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم. برای این منظور اولی $=A$ و دومی $=B$ در نظر گرفته‌ایم. عبارت کلامی زیر می‌تواند در تجزیه‌کردن مفید واقع شود.

(دومی − اولی) (دومی + اولی) = مربع دومی − مربع اولی

در قسمت ۶ این فعالیت، متذکر شوید که تجزیه راتا جایی که همهٔ جملات قابل تجزیه‌شدن باشند، ادامه می‌دهیم.

$$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{\updownarrow}(x^2+y^2)$$

$$=\overbrace{(x-y)(x+y)}(x^2+y^2)$$

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۸۸؛ با چند تمرین، کاربرد اتحادها را در ساده‌شدن محاسبات عددی ملاحظه می‌کنید.

$$۴۹۷\times۵۰۳=(۵۰۰-۳)(۵۰۰+۳)=۵۰۰^۲-۳^۲=۲۵۹۹۹۱$$

$$(۱۰۰۱)^۲=(۱۰۰۰+۱)^۲=(۱۰۰۰)^۲+۲(۱۰۰۰)\times۱+۱^۲=۱۰۰۲۰۰۱$$

در فعالیت صفحهٔ ۸۸، اتحاد یک جمله مشترک بیان شده است. توجه کنید که دیدگاه هندسی برای درک بهتر این اتحاد در تمرین ۵ صفحه ۸۹ آمده ست.

در قسمت ۲ این فعالیت، می‌خواهیم تجزیه سه‌جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک انجام دهیم. برای این منظور معمولاً در سه‌جمله‌ای یک جمله مربع کامل داریم که از آنجا، جملهٔ مشترک را پیدا می‌کنیم. برای مثال برای تجزیه سه جمله‌ای $x^۲+۷x+۱۰$؛ چون $x^۲$ مربع کامل است، پس جملهٔ مشترک $x=$. حال دو عدد صحیح پیدا می‌کنیم که حاصل ضربشان ۱۰+ و حاصل جمعشان ۷+ باشد. چون علامت ۱۰ مثبت است. پس هر دو عدد هم علامت هستند، درنتیجه جدول زیر را برای دو عدد خواهیم داشت که فقط در یک حالت حاصل جمعشان برابر با ۷+ است.

$xy=۱۰\Rightarrow$

نتیجه	x+y	y	x	
✓	۷+	۵+	۲+	
×	۷−	۵−	۲−	
×	۱۱+	۱۰+	۱+	
×	۱۱−	۱۰−	۱−	

درنتیجه داریم :

$$x^۲+۷x+۱۰=(x+۲)(x+۵)$$

مثال دیگر: $\underbrace{y^۲}_{\text{مربع کامل}}-y-۶=(y+۲)(y-۳)$

$xy=-۶<۰$

نتیجه	x+y	y	x	
×	۱+	۳+	۲−	
✓	۱−	۳−	۲+	
×	۵−	۶−	۱+	
×	۵+	۶+	۱−	

توجه : بعد از حل چند تمرین، از دانش‌آموزان بخواهید، جدول را ذهنی تصور کنند و جواب را بگویند.

تمرین صفحهٔ ۸۹

۴ــ هدف تمرین این است که با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک می‌توان درستی اتحاد مربع دوجمله‌ای رابه‌دست آورد. در حقیقت اتحاد مربع دوجمله‌ای حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \quad (1)$$

$$a=b \overset{(1)}{\Rightarrow} (x+a)(x+a)=x^2+(a+a)x+a\times a$$

$$\Rightarrow (x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

همچنین اگر a و b قرینه باشند، یعنی $b=-a$ در این صورت اتحاد مزدوج به‌دست می‌آید، یعنی اتحاد مزدوج نیز حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$b=-a \Rightarrow (x+a)(x-a)=x^2+(a+(-a))x+a\times(-a)$$

$$\Rightarrow (x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

اهداف

ــ تعریف نابرابری را بداند و بتواند در حل مسائل از تعریف استفاده کند.

ــ در یک نابرابری مانند $\frac{a^{۲}b}{c}>۰$ علامت متغیرهای a، b و c را تعیین کند.

ــ خواص نابرابری‌ها را درک کند.

ــ با استفاده از خواص نابرابری‌ها، نامعادله درجهٔ اول یک‌مجهولی را حل کند و مجموعهٔ جواب آن را به‌دست آورد.

روش تدریس

هدف از فعالیت صفحهٔ ۹۰ ارائه مفهوم و تعریف نابرابری است. دانش‌آموزان قبلاً با مفهوم برابری با علامت «=» و نابرابری با علامت «≠» آشنا شده‌اند.

در حالتی که نابرابری بین دو عدد رخ می‌دهد در این صورت یکی از عددها از دیگری بزرگ‌تر است، مانند ۲≠۳ و در اینجا ۳ بزرگ‌تر از ۲ است و می‌نویسیم ۳>۲، اکنون می‌خواهیم مفهوم ۳>۲ را بیان کنیم. برای این منظور از مفهوم برابری استفاده می‌کنیم. ۳>۲، یعنی اینکه مقدار مثبتی وجود دارد که اگر آن را به کوچک‌تر یعنی ۲ اضافه کنیم، حاصل برابر با ۳ می‌شود و آن مقدار مثبت، عدد ۱ است.

در فعالیت، کفه‌های ترازو در حقیقت بیان‌کننده مفهوم بالا است، کفهٔ وزنه سنگین‌تر پایین‌تر است، پس :

$a \boxed{\neq} b$ ، $a \boxed{>} b$ ، $b \boxed{<} a$

همان‌طورکه قبلاً گفته شد، تعریف نابرابری یک رابطهٔ دوطرفه است که در این فعالیت خواسته شده برای رابطه‌های برابری زیر یک نابرابری بین متغیرها بنویسند.

الف) وقتی x=y+۴، یعنی به y، ۴ واحد که اضافه شود، حاصل آن برابر x می‌شود، پس x از y بزرگ‌تر است.

ب) m+۱=n+۳، می‌توان نوشت m=n+۲ و از اینجا واضح است که m>n.

ج) a−۲=b+۳، یعنی a=b+۵ و درنتیجه a>b.

د) ۲m=۳n، یعنی اگر m دوبرابر شود و n را سه برابر کنیم، حاصل آنها با هم برابر می‌شود.

از آنجا که n,m هر دو مثبت هستند و m در عدد کوچک‌تری ضرب می‌شود، پس m>n.

یا به‌طور ساده از ۲m=۳n می‌توان نتیجه گرفت $m=\frac{۳}{۲}n$ ، یعنی اگر n در کسری بزرگ‌تر از واحد ضرب شود حاصل آن با m برابر می‌شود، پس m از n بزرگ‌تر است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۹۱ می‌خواهیم با استفاده از نابرابری‌های داده شده نوعی استدلال کنیم و به کمک آن علامت متغیرها را پیدا کنیم.

الف) نادرست است. برای مثال ۰<۵+۳− و این درحالی است که ۰ ≯ ۳− .

ب) درست است، زیرا اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت باشد، آن‌گاه هر دو مثبت یا هر دو منفی است یعنی b,a هم‌علامت هستند.

ج) اگر $\frac{ab}{c} > 0$ در این صورت دو حالت زیر را داریم.

حالت اوّل : صورت منفی و مخرج مثبت است. یعنی :

$$\begin{cases} ab < 0 \\ \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0\ ,\ b < 0 \\ \text{یا} \\ a < 0\ ,\ b > 0 \end{cases}$$

حالت دوم : صورت مثبت و مخرج منفی است، یعنی :

$$\begin{cases} ab > 0 \\ \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0\ ,\ b > 0 \\ \text{یا} \\ a < 0\ ,\ b < 0 \end{cases}$$

درنتیجه ۴ حالت مختلف پاسخ علامت‌های c, b, a است. بنابراین قطعاً نمی‌توان گفت که هر سه عدد منفی هستند، پس قسمت ج نادرست است.

ج) درست است، چون همواره a^2 نامنفی است، پس برای اینکه $a^2b<0$ باید b منفی باشد.

پاسخ قسمت ۳ کار در کلاس صفحهٔ ۹۱ :

- ۳x−۱>۷
- ۸>−۲x+۳

هدف از فعالیت صفحهٔ ۹۱، ارائه خواص نابرابری‌ها است. در اینجا می‌خواهیم دانش‌آموز با استدلال استقرایی خواص نابرابرها را کشف کند.

خاصیت‌ها را می‌توان با تعریف نابرابری به صورت زیر اثبات کرد.

اثبات خاصیت ۱ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \Rightarrow a + c = (b + c) + p$$
$$\Rightarrow a + c > b + c$$

اثبات خاصیت ۲ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > ۰ : a = b + p \xRightarrow{c>۰} ac = bc + pc$$
$$\xRightarrow{pc>۰} ac > bc$$

اثبات خاصیت ۳ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > ۰ : a = b + p \xRightarrow{c<۰} ac = bc + pc$$
$$\xRightarrow{pc<۰} ac + (-pc) = bc \xRightarrow{-pc>۰} bc > ac$$

در قسمت ۳ این فعالیت، می‌خواهیم مفهوم مجموعه جواب نامعادله درک شود، سپس در ادامه به کمک خواص نابرابری بتواند نامعادله یک‌مجهولی در جداول را حل کند و مجموعۀ جواب آن را به‌دست آورد.

تمرین صفحۀ ۹۳ :

۱ــ الف) $a-b=۱ \Rightarrow a=b+۱ \Rightarrow a>b$

ب) $u-v=-۲ \Rightarrow u+۲=v \Rightarrow v>u$

ج) $۲p-۲=۲q-۳ \Rightarrow ۲p+۱=۲q \Rightarrow p+\frac{۱}{۲}=q \Rightarrow q>p$

د) $\frac{a-b}{۲}=-۳ \Rightarrow a-b=-۶ \Rightarrow a+۶=b \Rightarrow b>a$

۲ــ الف) چون $b^۲$ همواره نامنفی است، پس صورت کسر باید منفی باشد؛ یعنی :

$$ac < ۰ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ , c < ۰ \\ \text{یا} \\ a < ۰ , c > ۰ \end{cases}$$

البته b می‌تواند مثبت یا منفی باشد، یعنی $b>۰$ یا $b<۰$.

ب)

$$\frac{a}{bc} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ , bc < ۰ \Rightarrow \begin{cases} b > ۰ , c < ۰ \\ \text{یا} \\ b < ۰ , c > ۰ \end{cases} \\ a < ۰ , bc > ۰ \Rightarrow \begin{cases} b > ۰ , c > ۰ \\ \text{یا} \\ b < ۰ , c < ۰ \end{cases} \end{cases}$$

۴ــ نادرست است، زیرا : $a^2>b^2 \Rightarrow a^2-b^2>0 \Rightarrow (a+b)(a-b)>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b>0\ ,\ a-b>0 \Rightarrow \begin{cases} a>b \\ \text{و} \\ a>-b \end{cases} \\ \text{یا} \\ a+b<0\ ,\ a-b<0 \Rightarrow \begin{cases} a<b \\ a<-b \end{cases} \end{cases}$$

مثال نقض : $2^2<(-3)^2$ و این درحالی است که $2 \not< -3$.

۵ــ از آنجا که $a,b>0$، پس $a+b>0$ و داریم :

$$a^2>b^2 \Rightarrow a^2-b^2>0 \Rightarrow (a-b)(a+b)>0$$

$$\xrightarrow{(a+b)>0} (a-b)>0 \Rightarrow a>b$$

۶ــ الف) فرض کنید پول علی برابر با x باشد، پس $3x \geq 2x+300$.

ب) $\frac{1}{2}a+4b \leq 6$.

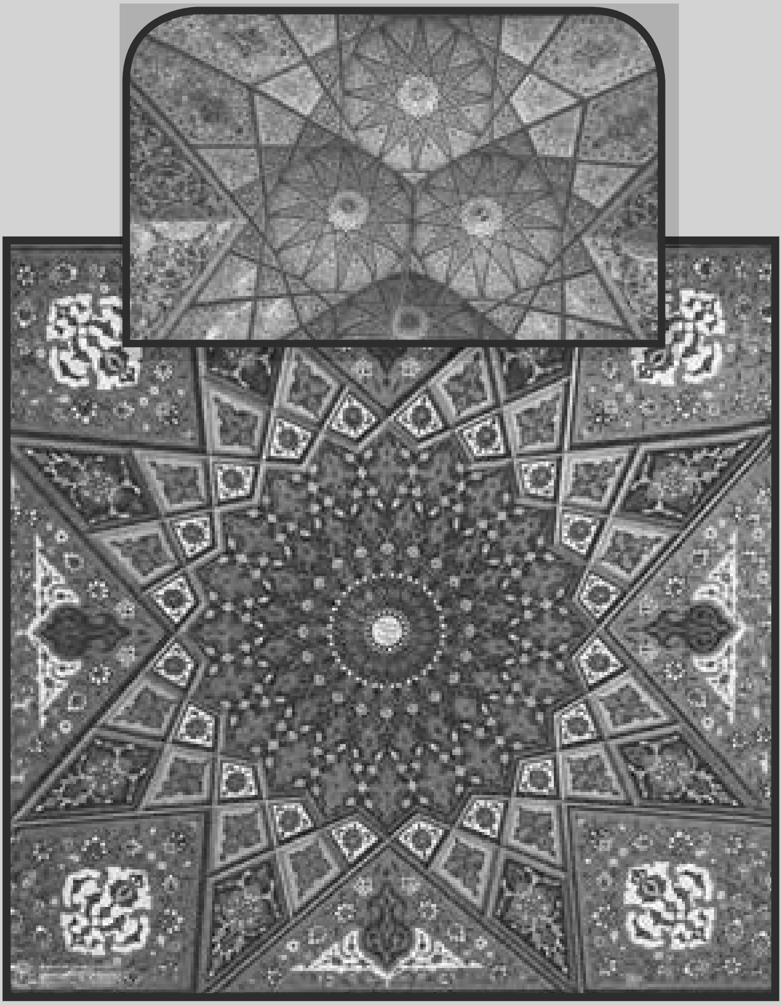
۷ــ دو نفر روی هم در هر روز نیاز به $3\times(85+65)=450$ کیلو کالری انرژی دارند. فرض کنیم آنها x روز می‌توانند با این مواد غذایی در جنگل دوام آورند، پس داریم :

$$450x \leq 4500 \Rightarrow x \leq 10$$

درنتیجه آنها حداکثر ۱۰ روز می‌توانند در جنگل با این مواد غذایی دوام بیاورند.

فصل ۶

خط و معادله‌های خطی



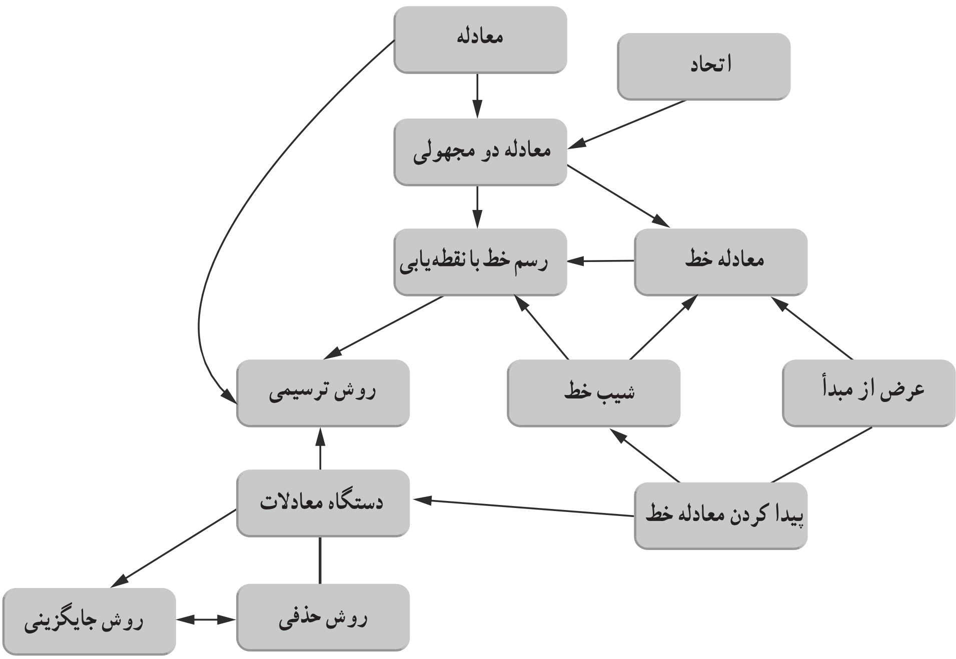
بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهداء امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خط‌ها در فرش‌بافی، کاشی‌کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادلۀ خط با استفاده از رابطۀ بین طول و عرض نقطه‌ها و قرار گرفتن بی‌شمار نقطه در کنار هم برای ساختن یک خط آغاز می‌شود. در درس دوم مفهوم شیب و عرض از مبدأ خط طرح شده و به کمک آن علاوه بر رسم خط، معادلۀ خط مورد نظر پیدا می‌شود. در درس آخر این فصل مفهوم دستگاه معادله‌های خطی و روش‌های حل دستگاه، آموزش داده می‌شود. همچنین دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به کمک تشکیل دستگاه معادله، مسئله‌ها را نیز حل کنند.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

تصویر آغازین این فصل نمایشگر کاربرد خط در نقش‌های معماری اسلامی است. این ویژگی یکی از کاربردهای خط است و به طور کلی می‌توان خط را به عنوان ماده اولیه هندسه نام برد و با توجه به تأثیر و کاربرد هندسه در زندگی روزمره و یا سایر دروس اهمیت خط بیش از پیش آشکار می‌شود.

دانستنی‌هایی برای معلم

معادله‌های خطی یک نوع خاص از انواع معادله‌های دو مجهولی است. این موضوع در واقع بخشی از یک مفهوم کلی‌تر به نام تابع است. تابع نیز نوع خاصی از رابطه است. به همین دلیل درس معادله خط با مفهوم رابطه آغاز شده است. دو یا چند کمیت می‌توانند به طرق مختلف با هم رابطه داشته باشند. البته مفهوم رابطه بسیار عام‌تر است. برای مثال والدین با فرزندان رابطه دارند. دو پسرعمو با هم رابطه دارند. میزان انرژی تولید شده در بدن ما با مقدار غذایی که میل می‌کنیم رابطه دارد.

با توجه به گستردگی و کاربرد فراوان دو مفهوم رابطه و تابع در درس‌های مختلف ریاضی، موضوع تابع در کانون توجهات آموزشگران ریاضی قرار داشته است و در این زمینه مطالعات فراوانی انجام شده است. آنااِسفارد (Anna Sfard) درسال ۱۹۹۱ با مرور عمده پژوهش‌های انجام شده درخصوص تابع و آموزش آن جمع‌بندی کرد که مفاهیم مرتبط با تابع در دیدگاه فرایندی (Process) و عینی (objective) بررسی می‌شوند.

در آموزش این مفاهیم به طور سنتی به فرایندها پرداخته می‌شد و کمتر به عینی شدن مفاهیم توجه شده است. برای مثال وقتی یک معادلهٔ خطی مثل $۲y - ۳x = ۴$ را به دانش‌آموزان بدهیم و از آنها بخواهیم شیب و عرض از مبدأ خط را پیدا کنند، آنها می‌توانند با طی کردن یک فرایند متداول و مشخص و تبدیل این معادله به فرم استاندارد $y = mx + n$، مقدار شیب و عرض از مبدأ را پیدا کرده و بیان کنند، اما این دو مفهوم برای آنها عینی نشده است به همین دلیل در پاسخ به سؤال زیر قادر به رسم تقریبی خط نیستند و درک درستی از این دو مفهوم از خود نشان نمی‌دهند.

سؤال : اگر $y = ax + b$, $b < ۰$, $a > ۰$ باشد، موقعیت خط را در محورهای مختصات به‌طور تقریبی رسم کنید.

از طرفی دیگر مفاهیمی مثل تابع، بازنمایی‌های (representation) متعددی دارند. بحث بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم نیز بسیار مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار گرفته است. برای مثال تابع (و یا رابطهٔ بین دو کمیت) را می‌توان به صورت کلامی توصیف کرد، همچنین می‌توان با زوج‌های مرتب مثل (۲,۳) یا $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بیان کرد که به آن بازنمایی جدول نیز می‌گویند. تابع را می‌توان با یک ضابطهٔ جبری نشان داد و یا نمودار آن را به صورت گرافیکی رسم کرد. بنابراین توصیف کلامی، جدول، جبری و گرافیکی، ۴ بازنمایی مختلف تابع هستند. در جدول زیر رابطهٔ بین دیدگاه‌های مختلف و بازنمایی‌های متنوع تابع ارائه شده است.

بازنمایی / دیدگاه	جدول	جبری	گرافیکی
فرایندی			
عینی			

یک آموزش خوب وقتی شکل می‌گیرد که بازنمایی‌های مختلف تابع در کنار هم ارائه شوند و دانش‌آموز قادر باشد در هر ردیف (فرایندی یا عینی) در بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کرده و هرکدام را به دیگری تبدیل کند.

همچنین باید بتواند از دیدگاه فرایندی به عینی حرکت کرده و در هر بازنمایی، این موضوع نهادینه شود. در برنامه جدید آموزش معادلات خطی در کتاب ریاضی نهم سعی شده است تا براساس این چهارچوب نظری تألیف انجام شود تا دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با معادلات خطی درک بهتری داشته باشند.

توسعه مفاهیم

در صورتی که دانش‌آموزان شما توانایی لازم را برای طرح موضوعات تکمیلی دارند می‌توانید جهت تعمیق موضوعات این فصل به مفهوم دسته خط اشاره کرده و از دانش‌آموزان بخواهید نقطهٔ هم‌رسی یک دسته خط را پیدا کنند. همچنین می‌توانید علاوه بر مثال‌های کتاب با طرح مسئله‌های ترجیحاً واقعی و کاربردی، زمینه را برای مدل‌سازی جبری فراهم کرده و دانش‌آموزان با تبدیل مسئلهٔ داده شده به معادله‌ای خطی و تشکیل دستگاه بتوانند آن را حل کنند.

علاوه براین می‌توانید مفاهیم مخلتف این درک را با هم ترکیب کرده و مسئله‌های ترکیبی مانند نمونه زیر طرح کنید.

«معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد خط‌های $2x-y=4$ و $3y-2x=5$ بگذرد و خط $y=2x-1$ را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کند.»

طرح موضوعاتی مثل فاصلهٔ دو نقطه روی محورهای مختصات و همچنین شیب دو خط عمود برهم نیز می‌تواند به غنای بیشتر موضوعات این فصل بیفزاید.

استفاده از ابزار و تکنولوژی

برای رسم منحنی تابع‌های مختلف، انواع و اقسام نرم‌افزارها وجود دارد. با وارد کردن معادلهٔ

یک تابع یا یک خط، نمودار آن رسم می‌شود و دانش‌آموزان می‌توانند شکل توابع مختلف را مشاهده کنند.

نرم‌افزار GeoGebra نیز برای آموزش معادله خط بسیار کارآمد است. چرا که در این نرم‌افزار می‌توانید بازنمایی‌های مختلف تابع را به صورت هم‌زمان برای دانش‌آموزان نمایش دهید.

همچنین می‌توانید با تعریف دو متغیر (لغزنده) b, a در این نرم افزار خط به معادله $y=ax+b$ را رسم کنید. با تغییر دادن مقدارهای متغیر a (با توجه به ثابت بودن مقدار b) شیب خط تغییر کرده و دانش‌آموزان می‌توانند رابطهٔ بین شیب‌خط و مقدار a را درک کنند. پس از آن می‌توانید مقدار a را ثابت در نظر بگیرید و با تغییر مقدار b دانش‌آموزان مفهوم عرض از مبدأ را درک کنند. به این ترتیب می‌توانید فعالیت اول درس دوم این فصل را شبیه‌سازی کنید.

با این نرم‌افزار می‌توانید تمام فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها را شبیه‌سازی کنید تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به این مفاهیم پیدا کنند. این نرم‌افزار همچنین ابزار مناسبی برای رسم خط است و در زمان تدریس صرفه‌جویی خواهد کرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ خط $۲y-۴x=۸$ را در محورهای مختصات رسم کرده، شیب و عرض از مبدأ آن را پیدا کنید.

۲ــ آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟

۳ــ نقطه‌ای از این خط را مشخص کنید که طول آن ۲ باشد.

۴ــ نقطه‌ای به عرض ۱− از این خط مشخص کنید.

۵ــ محل تقاطع خط را با محورهای مختصات مشخص کنید.

۶ــ مقدار k را طوری تعیین کنید که خط $(۲k-۱)\ y-kx=k+۱$ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد.

۷ــ مقدار p را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲p \\ p+۱ \end{bmatrix}$ روی خط $y=۲x-۱$ واقع شود.

۸ــ معادله خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ داده شده بگذرد.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$

۹ــ زاویهٔ بین دو خط $y=۲$ و $x=۴$ را پیدا کنید.

۱۰ــ دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y = ۲x - ۳ \\ x + y = ۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} ۲x - ۳y = ۵ \\ x - ۵y = ۲ \end{cases}$$

۱۱ــ قیمت یک دفتر و ۳ ماژیک ۲۹۰۰ تومان و قیمت ۲ دفتر و یک ماژیک ۴۳۰۰ تومان است. قیمت هر کدام را پیدا کنید.

۱۲ــ جرم ۵ گلوله کوچک و ۲ گلوله بزرگ ۳۵۰۰ گرم و جرم ۴ گلوله کوچک و ۳ گلوله بزرگ ۴۹۰۰ گرم است. جرم هر گلوله را پیدا کنید.

درس اول: معادله خط

اهداف

ــ آشنایی با مفهوم رابطه بین دو مقدار

ــ درک مفهوم رابطهٔ خطی

ــ رسم خط با معادله داده شده

ــ پیدا کردن نقطه‌ای از خط با معادله داده شده با ویژگی مورد نظر

ــ درک تفاوت معادله خط و اتحاد

ابزار مورد نیاز :

۱ــ صفحهٔ شطرنجی

۲ــ خط‌کش

روش تدریس

درس اول این فصل با مفهوم رابطه بین دو مقدار آغاز می‌شود. در کتاب درسی برای این موضوع سه مثال ذکر شده است. شما می‌توانید مثال‌های دیگری را نیز مطرح کنید. هدف فعالیت اول این درس آشنا کردن دانش‌آموزان با مفهوم رابطهٔ خطی بین دو مقدار است.

همچنین در این فعالیت، ۳ بازنمایی مختلف خط (جدول، جبری و گرافیکی) در کنار هم مطرح می‌شوند. دانش‌آموزان پس از پیدا کردن نقطه‌ها متوجه می‌شوند که ویژگی این نقطه‌ها این است که روی یک خط قرار دارند، سپس رابطهٔ بین دو مقدار را به صورت جبری $y=2x$ بیان می‌کنند. در کار درکلاس مربوطه نیز نمونه دیگری از رابطهٔ خطی در کنار یک رابطهٔ غیر خطی مطرح می‌شود تا دانش‌آموزان درک بهتری از مفهوم رابطه بین دو مقدار پیدا کنند.

در فعالیت دوم هدف این است که دانش‌آموزان بی‌شمار جواب‌های یک معادله درجه اول دو مجهولی را پیدا کنند و تفاوت آن را با اتحاد بیان کنند. نکته جالب این است که یک معادله دو مجهولی بی‌شمار جواب دارد ولی اتحاد نیست. نحوه پیدا کردن جواب‌های یک معادله دو مجهولی را در کلاس به بحث بگذارید.

در ادامهٔ این فعالیت حدس زدن رابطهٔ بین x , y برای یک خط داده شده و همچنین فرم استاندارد $y=ax+b$ آموزش داده می‌شود. در کار در کلاس این قسمت با تمرین رسم‌خط با معادله داده شده خط‌های مبدأ گذر نیز مطرح می‌شود.

در فعالیت سوم علاوه بر رسم‌خط، حدس زدن معادلهٔ خط، مورد نظر است و همچنین در

کاردر کلاس یاد می‌گیرند که با دو روش ترسیمی و تحلیلی، یک نقطه از خط را پیدا و این دو روش را با هم مقایسه کنند.

سؤال ۳ از تمرین‌های این درس یکی از سؤال‌هایی است که در مطالعه تیمز مطرح شده بود. شکل سوم از سمت چپ پاسخ درست است چون نشان می‌دهد که در بدو تولد، نوزاد یک مقدار مشخص قد دارد و همچنین فرایند رشد آن ابتدا سریع است ولی پس از مدتی ثابت می‌ماند.

در سؤال ۴ نیز هدف صرفاً حدس زدن رابطهٔ بین x , y است. دانش‌آموزان با این نمونه‌ها در کلاس هشتم نیز آشنا شده بودند پاسخ‌ها به ترتیب عبارت است از :

الف) $y=3x$ ب) $y=x+2$ ج) $y=3x+1$

توصیه‌های آموزشی

۱ــ حدس زدن معادله خط با داشتن دو نقطه کار ساده‌ای نیست، لذا از طرح تمرین‌های پیچیده در این قسمت خودداری کنید. دانش‌آموزان پس از اینکه شیب و عرض از مبدأ را یاد گرفتند می‌توانند معادله خط را به طور مستقیم به دست آورند.

۲ــ روش‌های مختلف (ترسیمی ــ تحلیلی) را در حل تمرین‌ها به کار ببرید و با هم مقایسه کنید. این کار به درک بهتر موضوع کمک می‌کند.

۳ــ استفاده از نرم‌افزارهایی مثل GeoGebra برای آموزش بهتر این موضوع توصیه می‌شود.

اشتباهات رایج

ــ وقتی مسئله از دانش‌آموزان نقطه‌ای از خط را می‌خواهد آنها به طور معمول به پیدا کردن x یا y اکتفا می‌کنند و نقطهٔ مورد نظر را نشان نمی‌دهند. برای مثال محل برخورد $y=1x-2$ با محور طول‌ها نقطهٔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است نه $x=1$.

ــ در حدس زدن معادلهٔ خط، یک معادله‌ای می‌نویسند که نقطه برای یکی از نقطه‌ها درست است و فراموش می‌کنند نقطهٔ دیگر را امتحان کنند.

درس دوم: شیب و عرض از مبدأ خط

اهداف

ــ درک مفهوم شیب و عرض از مبدأ
ــ پیدا کردن معادله خط با داشتن شیب و عرض از مبدأ
ــ رسم خط با کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ

ابزار مورد نیاز :

۱ــ صفحهٔ شطرنجی
۲ــ خط‌کش
۳ــ نرم‌افزارهای مرتبط

روش تدریس

در این درس دانش‌آموزان با مفهوم شیب به سه صورت مختلف آشنا می‌شوند. در فعالیت اول صرفاً با مفهوم شیب و عرض از مبدأ آشنا می‌شوند و متوجه می‌شوند که تغییر دو پارامتر a , b در معادلهٔ خط y=ax+b چه تأثیری در شکل خط در محورهای مختصات می‌گذارد. در این فعالیت توجه آنها را به شیب‌های مثبت و منفی جلب کنید. در کار درکلاس مربوطه نیز دانش آموزان به صورت فرایندی شیب و عرض از مبدأ خط‌های داده شده را پیدا می‌کنند، بدون آنکه از این دو مفهوم درک عینی داشته باشند.

در فعالیت دوم تلاش شده است تا دانش‌آموزان از مفهوم شیب خط یک درک بهتری پیدا کنند. ابتدا با مقایسه شیب سه خط، پله و نسبت ارتفاع به طول شیب یک خط به صورت قدر مطلق معرفی می‌شود.

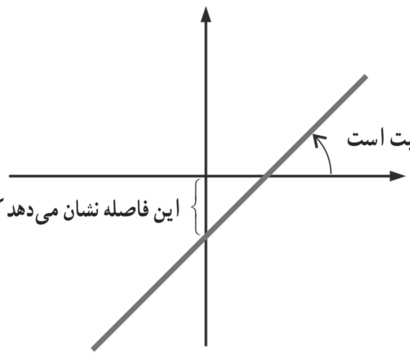
در سؤال‌های ۳ و ۴ این فعالیت دانش‌آموزان با رسم مثلث قائم‌الزاویه و نوشتن نسبت ارتفاع به قاعده (y به x) مقدار شیب را پیدا می‌کنند. اگر مثلث سمت راست خط شکل بگیرد شیب مثبت و اگر سمت چپ باشد شیب منفی خواهد بود.

در پایان فعالیت یاد می‌گیرند تا به کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ یک خط را رسم کنند. در مرحله‌اول، به کمک مفهوم عرض از مبدأ، نقطهٔ اول را پیدا می‌کنند. در مرحله دوم به کمک مفهوم شیب دوم یک مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ دوم خط را پیدا کرده و در مرحله سوم با داشتن دو نقطه، خط را رسم می‌کنند.

در فعالیت سوم این درس دانش‌آموزان با خط‌های موازی محورها آشنا می‌شوند. برای اینکه درک کنند $x=۲$, $y=۳$ می‌توانند معادلهٔ خط باشند لازم است فرم کلی معادله‌های خطی $ax+by=c$ معرفی شود و دانش‌آموزان با قراردادن مقادیر مختلف به جای c, b, a خط‌های مختلفی را به دست آورند.

پس از آن متوجه می‌شوند که چگونه با تعیین ضرائب a , b, c می‌توانند معادله خط $x=۲$ را پیدا کنند. در کار درکلاس مربوطه نیز به تمرین رسم خط‌های موازی محورها و نوشتن معادله‌های آنها می‌پردازند.

سؤال ۴ قسمت تمرین بسیار کلیدی است. وقتی $a>۰$ و $b<۰$ باشد شکل خط به صورت زیر خواهد شد.



در سؤال ۵ نیز می‌توان با رسم مثلث قائم‌الزاویه و داشتن عرض از مبدأ معادله خط را نوشت. در شکل سمت چپ خط محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است پس عرض از مبدأ ۱ است. با توجه به مثلث رسم شده شیب خط ۲ و با توجه به اینکه مثلث سمت چپ خط است شیب منفی می‌شود (۱−). پس معادله خط عبارت است از : $y=-۲x+۱$.

در سؤال ۷ نیز موضوع شیب برای بار سوم مطرح شده است در این حالت با داشتن دو نقطه از خط و نوشتن رابطهٔ مذکور می‌توان مقدار شیب خط را به دست آورد. بنابراین در سؤال ۸، شیب خط را می‌توان به کمک همین رابطه پیدا کرد و با داشتن شیب و یک نقطه از خط معادله آن را پیدا کرد.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ رسم خط با داشتن شیب و عرض مبدأ و پیدا کردن معادله‌های خط‌رسم شده به درک بهتر

مفاهیم شیب و عرض از مبدأ کمک می‌کند.

۲ــ برای اینکه دانش‌آموزان از **معادله** $x=2$ **درک درستی داشته باشند لازم است در معادله** $0\times y+1\times x=2$ **به جای** x , y **مقادیر مختلف قرار دهید تا دانش‌آموزان به حذف شدن مقدار** y **پی ببرند و ثابت بودن مقدار** x **در مختصات نقطه‌های مختلف خط با عرض‌های متفاوت را درک کنند.**

اشتباهات رایج

ــ یکی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان پس از اینکه مراحل پیدا کردن شیب خط را انجام می‌دهند این است که به‌جای بیان ضریب x به عنوان شیب عدد و x را با هم بیان می‌کنند. برای مثال می‌گویند شیب خط $2x$ است.

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

اهداف

ــ درک مفهوم دستگاه معادله‌های خطی
ــ درک مفهوم جواب مشترک در معادله
ــ حل دستگاه به روش ترسیمی
ــ حل دستگاه به روش‌های تحلیلی (حذفی و جایگزینی)
ــ تشکیل دستگاه معادله‌های خطی و حل مسئله به کمک آن

ابزار مورد نیاز :

۱ــ صفحهٔ شطرنجی
۲ــ خط‌کش
۳ــ نرم‌افزارهای مرتبط

روش تدریس

شروع درس با یک فعالیت کاربردی مناسب است تا دانش‌آموزان چگونگی شکل‌گیری دستگاه معادلات خطی را درک کنند. در سؤال دوم نیز هدف درک مفهوم جواب مشترک دو معادله و مقایسه آن با مفهوم هندسی تقاطع دو خط است. در کار در کلاس روش ترسیمی حل دستگاه تمرین می‌شود.

در فعالیت دوم دانش‌آموزان ابتدا دو قاعدهٔ مورد نیاز برای حل یک دستگاه را یاد می‌گیرند سپس روش حذفی که در کتاب انجام شده است را با این دو قاعده مرتبط می‌کنند. در کار درکلاس این بخش نیز حل دستگاه به روش حذفی را تمرین می‌کنند. در فعالیت سوم نیز مدل‌سازی یک مسئله به صورت تشکیل معادله سه روش حذفی، جایگزینی و معادلهٔ یک مجهولی با هم مقایسه می‌شود. در کار درکلاس نیز روش جایگزینی تمرین می‌شود.

سؤال ۳ از قسمت تمرین را به صورت زیر برای دانش‌آموزان حل کنید تا نحوهٔ نوشتن جواب را نیز بیاموزند.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ \underline{x-y=۱} \\ ۲x=۲ \end{cases} \rightarrow x=۱ \rightarrow y=۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$ نقطهٔ تقاطع دو خط

$$y = ax + b \rightarrow y = \frac{-۲}{۳}x + b \rightarrow ۰ = -\frac{۲}{۳}\times ۱ + b \rightarrow b = \frac{۲}{۳}$$

شیب خط $-\frac{۲}{۳}$ است   نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ روی خط است

پس معادله خط عبارت است از : $۳y+۲x=۲$ یا $y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳}$ در سؤال ۶ نیز چون دو خط با هم موازی هستند و شیب برابر دارند پس همدیگر را قطع نمی‌کنند و یا به عبارت دیگر می‌گوییم دستگاه جواب ندارد.

توصیه‌های آموزشی

مقایسه روش‌های مختلف حل دستگاه و یا تشکیل دستگاه و نوشتن معادله بسیار توصیه می‌شود.

طرح مسئله‌هایی که برای حل، نیاز به تشکیل دستگاه دارند از توصیه‌های جدی این قسمت است.

اشتباهات رایج

ـ وقتی دو معادلهٔ خط همدیگر را قطع نکنند می‌گوییم دستگاه جواب ندارد. دراین موارد اغلب دانش‌آموزان می‌گویند دستگاه اشتباه است چون جوابی پیدا نشده است.

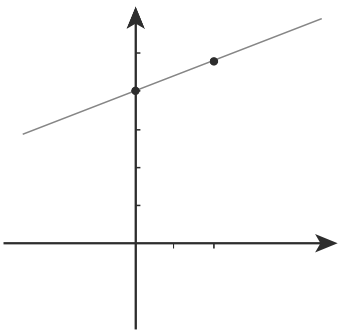
ـ وقتی دو معادله خط روی هم قرار می‌گیرند در واقع می‌توان گفت دستگاه تشکیل نشده است و یا به عبارت دیگر بگوییم دستگاه بی‌شمار جواب دارد. تفاوت این دو پاسخ در این است که چه چیزی را به عنوان تعریف دستگاه پذیرفته‌ایم. دانش‌آموزان به طور معمول تفاوت در تعاریف مختلف و تأثیر آن در پاسخ دادن به یک سؤال را درک نمی‌کنند.

حل تمرین‌های فصل ۶

تمرین

۱ـ خط به معادله $y=\frac{۱}{۲}x+۴$ را رسم کنید.

x	۰	۲
y	۴	۵



الف) آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ روی این خط است؟ خیر

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید. $\begin{bmatrix}-۸\\۰\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$

ج) نقطه‌ای از خط به‌طول ۱- را پیدا کنید.

$$x=-۱\rightarrow y=\frac{۱}{۲}(-۱)+۴=\frac{-۱+۸}{۲}=\frac{۷}{۲}$$ $\begin{bmatrix}-۱\\۳/۵\end{bmatrix}$

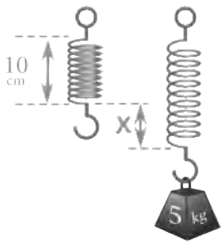
۲ـ طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطهٔ $y=۰/۸x+۱۰$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

$x=۵$

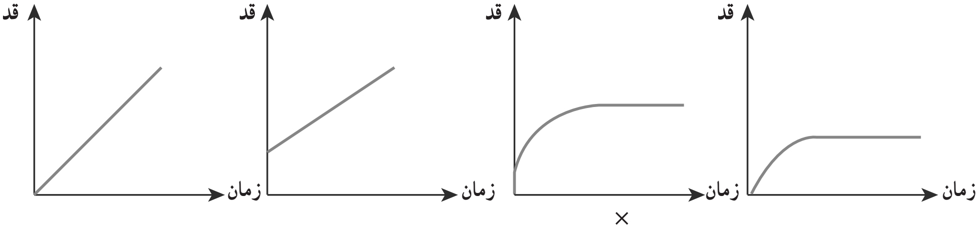
$y=۰/۸\times ۵+۱۰$

$y=۴+۱۰$

$y=۱۴$



۳ـ کدام یک از نمودارهای زیر رابطهٔ رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است.



۴ــ دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادلهٔ خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}$

$y=۳x$ $y=۲x-۱$ $y=۳x+۱$

۵ــ مختصات محل برخورد خط به معادلهٔ $y=-x+۲$ را با محورهای مختصات بیابید.

$x=۰\rightarrow y=۲$ $y=۰\rightarrow x=+۲$ $\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$

۶ــ مختصات نقطه‌ای از خط به معادلهٔ $y=-\frac{۳}{۵}x+۴$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

$y=-\frac{۳}{۵}x+۴\rightarrow y=-\frac{۳}{۵}\times۵+۴=-۳+۴=۱$ $\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$

۷ــ خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۲$ را رسم کنید.

آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱− از این خط پیدا کنید. بله، $\begin{bmatrix}-۱\\۲/۵\end{bmatrix}$

نقطه‌ای به عرض ۲− از این خط پیدا کنید. $\begin{bmatrix}۸\\-۲\end{bmatrix}$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

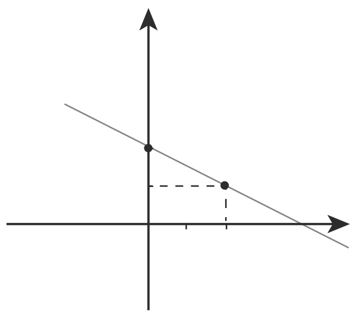
x	۰	۲
y	۲	۱

$y=-\frac{۱}{۲}\times-۱+۲$ $x=۰\rightarrow y=۲$

$y=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲}$ $y=۰\rightarrow x=۴$

$-۲=-\frac{۱}{۲}x+۲$

$-\frac{۱}{۲}x=-۴$ $x=۸$

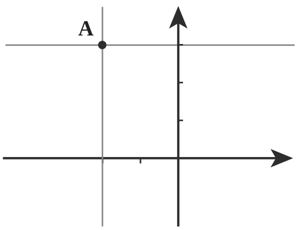


نقاط برخورد خط با محورها $\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$

تمرین

۱ــ خط‌های به معادلهٔ y=۳ و x=−۲ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ ۹۰°

$A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$



۲ــ معادلهٔ محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

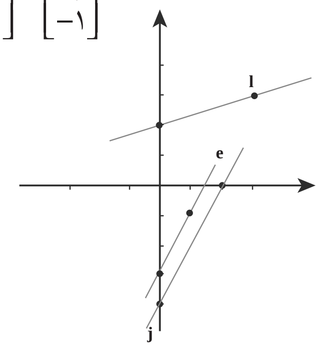
محل برخورد $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$y = ۰$ محور طول‌ها

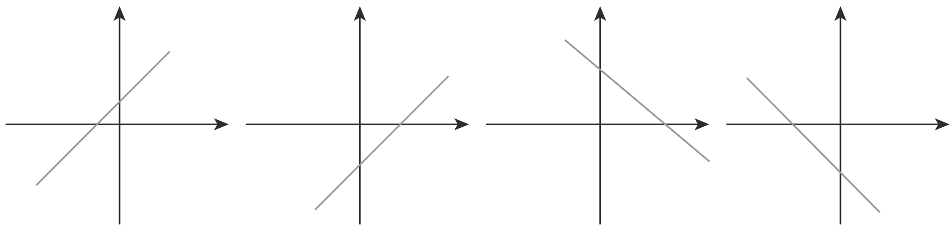
$x = ۰$ محور عرض‌ها

۳ــ شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

l) $۳y - ۲x = ۶$	j) $۴x - ۲y = ۸$	e) $۲x - y = ۳$
$۳y = ۲x + ۶$	$-۲y = -۴x + ۸$	$-y = -۲x + ۳$
$y = \frac{۲}{۳}x + ۲$	$y = ۲x - ۴$	$y = ۲x - ۳$
	۲ = شیب	۲ = شیب
شیب = $\frac{۲}{۳}$ ، ۲ = عرض ازمبدأ	۴− = عرض از مبدأ	۳− = عرض از مبدأ
$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

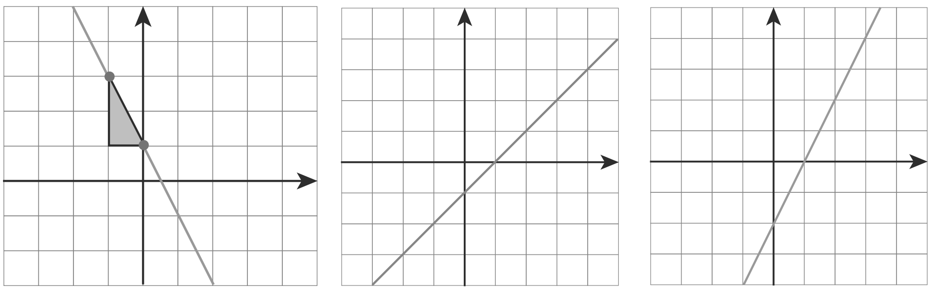


۴ــ خط $y=ax+b$ را درنظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



$a<۰$	$a<۰$	$a>۰$	$a>۰$
$b<۰$	$b>۰$	$b<۰$	$b>۰$

۵ــ معادله خط‌های زیر را بنویسید.



$y=۲x-۲$ ۲ = شیب $y=x-۱$ ۱ = شیب $y=-۲x+۱$ ۲− = شیب

۶ــ معادله خطی بنویسید که با خط $۲y-۴x=۵$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$۲y=۴x+۵$$

$$y=\underbrace{۲}_{\text{شیب}}x+\frac{۵}{۲}$$

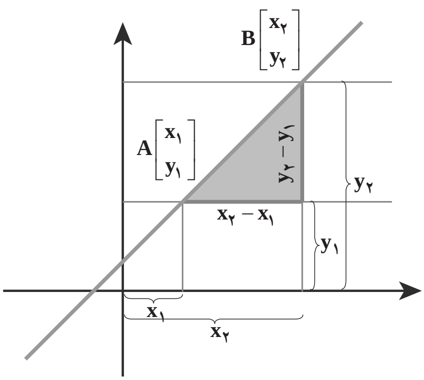
$$y=۲x+b$$

$$-۱=۲\times ۱+b$$

$$-۱=۲+b \longrightarrow b=-۳$$

$$\boxed{y=۲x-۳}$$

۷ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

۸ــ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲-(-۱)}{۳-۴} = \frac{۳}{-۱} = -۳$$

$$y = -۳x + b \rightarrow ۲ = -۳ \times (۳) + b \qquad b = ۱۱ \qquad y = -۳x + ۱۱$$

تمرین

۱ــ دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$۱)\ \begin{cases} ۲(x-y) + ۳y = ۴ \\ ۳x - ۲(۲x - y) = ۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x + ۱y = ۴ \\ -۱x + ۲y = ۷ \end{cases} ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲\cancel{x} + y = ۴ \\ \cancel{-۲x} + ۴y = ۱۴ \end{cases}$$

$$۵y = ۱۸$$

$$\boxed{y = \frac{۱۸}{۵}}$$

$$-x + ۲y = ۷$$

$$x = ۲ \times \frac{۱۸}{۵} - ۷$$

$$\boxed{x = \frac{۱}{۵}}$$

$$۲)\ \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} - \frac{y-۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \\ x + y = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x - ۳ - ۲y + ۲ = ۱ \\ x + y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x - ۲y = ۲ \\ x + y = ۴ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{3x} - 2y = 2 \\ \cancel{-3x} - 3y = -12 \end{cases}$$

$$-5y = -10 \qquad \boxed{y = 2}$$

$$\boxed{x = 2}$$

۲ـ یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$2^{2x-y-2} = 3^{x+y-1}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 3$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$x + y = 1$$

$$1 + y = 1$$

$$\boxed{y = 0}$$

۳ـ معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط x−y=۱ و x+y=۱ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$x + y = 1$$

$$1 + y = 1$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$0 = -\frac{2}{3} \times 1 + b$$

$$b = \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

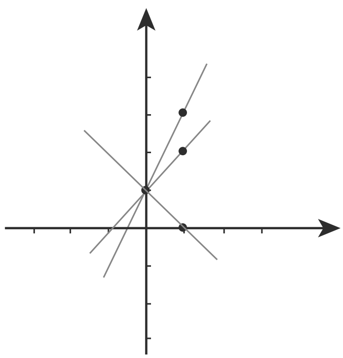
۴ـ در معادلهٔ y=ax+۱ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادلهٔ خط‌های زیادی به‌دست می‌آید. به ازای a=۱ و a=۲ و a=−۱ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

$$y = x + 1 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x + 1 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y = -x + 1 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ نقطهٔ مشترک هر سه خط است.



۵ـ در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

$$\begin{cases} x + y = ۲۰ \\ ۲x + ۴y = ۵۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-۲x} - ۲y = -۴۰ \\ \cancel{۲x} + ۴y = ۵۶ \end{cases}$$

$$۲y = ۱۶$$

$y = ۸$ گاو

$$x + y = ۲۰$$

$$x + ۸ = ۲۰$$

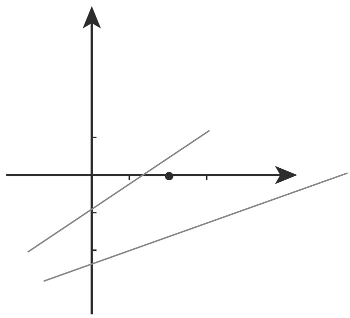
$x = ۱۲$ شترمرغ

۶ـ دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\overset{-۲}{}\begin{cases} ۲x - ۳y = ۷ \\ ۴x - ۶y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-۴x} + \cancel{۶y} = -۱۴ \\ \cancel{۴x} - \cancel{۶y} = ۵ \end{cases}$$

x	۰	$\frac{۵}{۴}$
y	$-\frac{۵}{۶}$	۰

x	۰	$\frac{۷}{۲}$
y	$-\frac{۷}{۳}$	۰



آیا این دستگاه جواب دارد؟ خیر

شیب هر دو خط را به‌دست آورید. توضیح دهید چرا نقطهٔ مشترکی به‌عنوان جواب معادله به‌دست نمی‌آید.

$$۲x - ۳y = ۷$$

$$-۳y = -۲x + ۷$$

$$y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۷}{۳}$$

$$۴x - ۶y = ۵$$

$$-۶y = -۴x + ۵$$

$$y = \frac{۴}{۶}x - \frac{۵}{۶} \rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۵}{۶}$$

دو خط دارای شیب مساوی هستند، پس موازی هستند.

۷ـ مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به‌دست آورید.

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = ۷۰ \\ x - y = ۲۶ \end{cases}$$

$$۲x = ۹۶$$

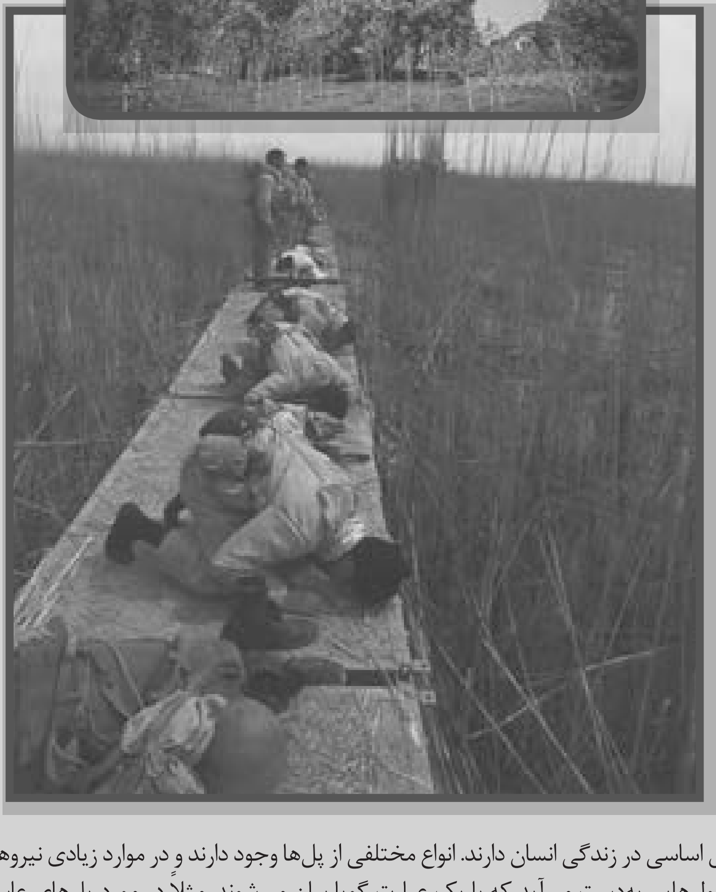
$$x + y = ۷۰$$

$$۴۸ + \quad = ۷۰$$

فصل ۷

عبارت‌های گویا

پل طبیعت (تهران)



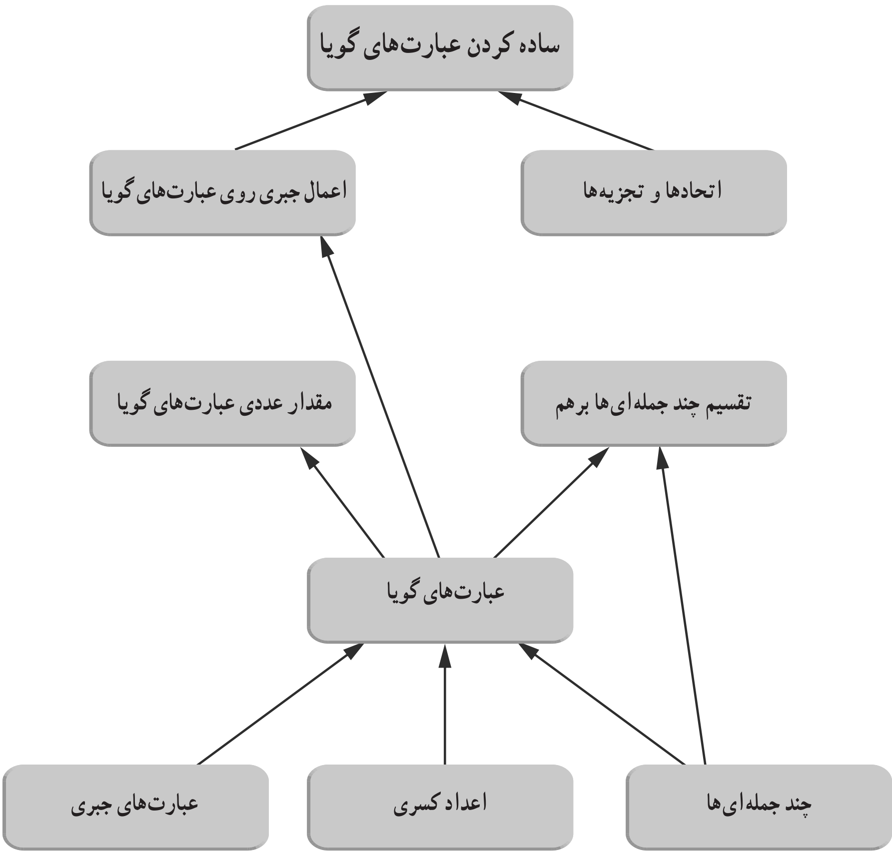
پل خیبر

پل‌ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل‌ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول‌هایی به‌دست می‌آید که با یک عبارت گویا بیان می‌شوند. مثلاً در مورد پل‌های عابر پیاده، بار محاسباتی از دستور $\frac{۱۵۰}{L+۱۵۰}+۲$ به‌دست می‌آید که در آن L طول بارگذاری شده برحسب متر است.

نگاه کلی به فصل

در پایهٔ هشتم و همچنین در فصل پنجم همین کتاب، دانش‌آموزان با عبارت‌های جبری آشنا شده‌اند. در این فصل که شامل ۳ درس است، در درس اول، دانش‌آموزان با مفهوم عبارت‌های گویا آشنا می‌شوند و چگونگی پیدا کردن مقدار عددی آنها را به ازای متغیرهای داده شده، یاد می‌گیرند و اینکه چگونه باید آنها را ساده کنند. در روند یادگیری این درس، مطالب خوانده شده در مورد عددهای گویا باید یادآوری شود تا دانش‌آموزان راحت‌تر و بهتر این درس را یاد بگیرند. درس دوم به اعمال جبری روی عبارت‌های گویا یعنی جمع، تفریق و ضرب و تقسیم می‌پردازد و در درس سوم، با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر چند جمله‌ای‌ها آشنا می‌شوند. اطلاعات این فصل، به دانش‌آموزان کمک خواهد کرد تا در حل معادلات گویا و نامعادلات گویا که در سال بعد به آن خواهیم پرداخت از این اطلاعات استفاده کنند.

طرح کلّی مفاهیم فصل هفتم



تصویر عنوانی

با توجه به اهمیت پل‌ها و نقش اساسی‌ای که در برهه‌های مختلف زمان دارند، دو پل که توسط سازندگان ایرانی طراحی و ساخته شده است در تصویر عنوانی آمده است که برای محاسبهٔ نیروی وارده به پل در طراحی آن، عبارت‌های گویا وجود دارند. به عبارت دیگر مفاهیم ریاضی از جمله عبارت‌های گویا، می‌توانند نقش مهمی را در بخشی از زندگی اجتماعی به صورت غیر مستقیم ایفا کنند. مثلاً ساخت پل‌های متحرک در زمان جنگ تحمیلی که اثر به‌سزایی در عملیات جنوب کشور داشته است.

اهداف : در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد :

ــ شناسایی عبارت‌های گویا و تشخیص آنها از عبارت‌های غیر گویا

ــ محاسبهٔ عددی عبارت‌های گویا به ازای مقادیر مختلف متغیر آن

ــ به دست آوردن مقدارهایی از متغیر که به ازای آنها، مقدار عددی عبارت گویا تعیین نمی‌شود.

ــ توانایی ساده کردن عبارت‌های گویا

ابزار مورد نیاز :

۱ــ آشنایی با کسرها و عبارت‌های جبری

۲ــ آشنایی با مقدار عددی عبارت‌های جبری

۳ــ آشنایی با چند جمله‌ای‌ها

۴ــ آشنایی با اعمال جبری روی کسرها

نگاه کلی به بخش اوّل

این بخش با حل یک مسئله آغاز می‌شود که هدف از آن درگیر کردن دانش‌آموزان با مفهوم نسبت و چند جمله‌ای‌هاست و با اطلاعات قبلی، می‌توانند آن را حل کنند. در واقع مفهوم عبارت گویا، که بلافاصله بعد از حل مسئله، تعریف می‌شود، برای دانش‌آموزان، مفهوم غریبی نیست و عملاً آن را در بسیاری از مسائل دیده‌اند ولی در این بخش، نامگذاری می‌شود تا بتوان بیشتر راجع به آن صحبت کرد. برای اینکه کاربردهایی از عبارت گویا در دنیای واقعی مطرح گردد، نمونه‌هایی از آن ذکر گردیده است. بعد از زمینه‌سازی تعریف رسمی عبارت‌های گویا، و در یک کار درکلاس، این مفهوم تثبیت می‌شود. با استفاده از یک فعالیت، مقدار عددی عبارت‌های گویا، نیز بلافاصله تعریف می‌شود تا در دانش‌آموزان، ایدهٔ عبارت‌های نمادین به عنوان اعدادی که با محاسبه روی چند عدد داده شده، به دست می‌آیند، تقویت شود. با استفاده از یک مثال و کار درکلاس، به تعمیق این مطلب پرداخته شده است.

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، با اشاره به ساده کردن اعداد کسری که دانش‌آموزان قبلاً خوانده‌اند، نحوهٔ محاسبهٔ ساده کردن عبارت‌های گویا بیان می‌گردد و در واقع فعالیت با این هدف

پیش‌بینی شده است و سپس برای تعمیق آن، کار درکلاس آورده شده است. سعی شده است نمونه‌های مختلفی از تمرینات آورده شود تا دانش‌آموزان با حل آنها بتوانند میزان یادگیری از مطالب این بخش را محک بزنند.

ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند عبارت‌های گویا را از غیرگویا تشخیص دهند و مقدارهای عددی آنها را در صورت قابل تعریف بودن، به دست آورند و تشخیص دهند که یک عبارت گویا به ازای چه مقدارهایی تعریف شده و به ازای چه مقادیری تعریف نشده است. همچنن دانش‌آموزان باید بتوانند در مسائلی که عبارت‌های گویا رخ می‌دهند، این گونه عبارت‌ها را تشکیل داده، محاسبات جبری با آنها انجام دهند و بتوانند آنها را ساده کنند.

روش تدریس

هدف کلی این درس، آشنایی دانش‌آموزان با عبارت‌های گویا است. با توجه به اینکه در سال‌های گذشته، مفاهیم مساحت و نسبت را یاد گرفته‌اند، در واقع با عبارت‌های گویا آشنا شده‌اند ولی نه با عنوان فوق، بلکه از آن برای حل مسائل استفاده کرده‌اند. پس شروع درس را با یک مسئله‌ای که قادر به حل آن هستند شروع می‌کنیم اما نه با این هدف که آن را حل کنیم بلکه نشان دهیم در حل این مسئله، عبارت‌های گویا حضور دارند و در نتیجه بتوان یک تعریف ساده برای عبارت‌های گویا عنوان کرد. از آنجا که دانش‌آموزان علاقه‌مند هستند مفاهیمی که یاد می‌گیرند را در زندگی روزمره مشاهده کنند و کاربرد آن را ببینند، مثال‌هایی از این نوع مسائل در ادامه آورده شده است.

جهت شناخت بهتر از عبارت‌های گویا، نمونه‌هایی به عنوان کار در کلاس داده شده است که دانش‌آموزان باید بتوانند، تشخیص دهند که کدام عبارت داده شده گویاست و کدام عبارت، گویا نیست. در صفحه ۱۱۴، عبارت‌هایی داده شده است که گویا هستند، در این عبارت‌ها، سعی شده است که توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کند که اگر اعداد غیرگویا را دیدند، متوجه شوند که هیچ خللی در عبارت‌های گویا ایجاد نمی‌کند و بلافاصله مثال‌هایی از عبارت‌های غیر گویا آورده شده است که متغیر (یا متغیرهای) داده شده، شرایط تعریف عبارت‌های گویا را ندارند.

هدف از فعالیت طراحی شده در صفحه ۱۱۵، یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا است. دانش‌آموزان باید متوجه شوند که در یافتن مقدارهای عددی، ممکن است تقسیم بر صفر پیش آید که

بی‌معنا است و باید متوجه شوند که عبارت‌های گویا، ممکن است در بعضی از مقادیر برای متغیر (یا متغیرهایشان) تعریف نشوند. البته ذکر این نکته ضروری است که هدف از این بخش، مفهوم «دامنهٔ تعریف متغیر» نمی‌باشد و تنها این نکته باید مدنظر دانش‌آموزان باشد که به ازای چه مقادیری از متغیرها، می‌توان گفت که آن عبارت گویا، تعریف نشده است. در همین راستا، کار درکلاس صفحه ۱۱۶، طراحی شده است.

عبارت‌های جبری داده شده در این کار درکلاس به‌گونه‌ای است که از اطلاعات فصل پنجم تبعیت می‌کند و یادآوری مطالب آن فصل نیز می‌باشد. چند جمله‌ای‌های درجه دوم نیز با استفاده از تجزیه‌های خوانده شده در فصل پنجم، به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای از د ــ ج ظاهر خواهند شد مگر نمونه (د) که مخرج کسر، $x^۲+۴$ است و همواره مثبت است و لذا هیچگاه صفر نمی‌شود. برای ساده کردن عبارت‌های گویا، ابتدا مطالب مربوط به ساده کردن عددهای گویا را آورده‌ایم که دانش‌آموزان با آن قبلاً آشنا شده‌اند و اشاره کرده‌ایم که روش ساده کردن عبارت‌های گویا نیز، عیناً مشابه ساده کردن عددهای گویاست و فعالیت صفحه ۱۱۶ نیز با یک مثال ساده شروع شده است که دانش‌آموزان فکر نکنند که این بخش، با قسمت‌های قبل متفاوت است و به‌راحتی می‌توانند به ساده کردن عبارت‌های گویا بپردازند.

در کار درکلاس پایانی این بخش، عبارت‌های گویایی داده شده است که قابل ساده کردن هستند. در قسمت (۱) بند (د)، در صورت کسر، عبارت $x^۴-y^۴$ داده شده است که قبلاً همین عبارت جبری در صفحه ۸۷، به عنوان اتحاد مزدوج در یک فعالیت آمده است که می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که ساده شده این فعالیت را، در اینجا استفاده نمایند و هدف از قسمت (۲) عبارت گویای داده شده در این کار درکلاس، بدفهمی رایج دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های گویاست.

در تمرین ۲ قسمت (د)، صورت عبارت گویای داده شده، یک چندجمله‌ای از درجه سوم است که ابتدا از y که عامل مشترک بین همهٔ آنهاست، فاکتور می‌گیریم و سپس، عبارت درجه دوم به‌دست آمده را با استفاده از اتحاد جمله مشترک، به دو عبارت جبری درجه یک تجزیه می‌کنیم :

$$\frac{y^۳-۲y^۲-۳y}{y^۲+y}=\frac{\cancel{y}(y^۲-۲y-۳)}{\cancel{y}(y+۱)}=\frac{y^۲-۲y-۳}{y+۱}$$

$$=\frac{\cancel{(y+۱)}(y-۳)}{\cancel{y+۱}}=y-۳$$

در تمرین ۳، دانش‌آموزان باید بتوانند قرینه یک عبارت جبری داده شده را درست تشخیص دهند که به جز قسمت (الف) بقیه قسمت‌های داده شده، یا برابر یک و یا برابر۱− می‌باشند.

تمرین ۴ نیز با همان دید قرینه‌یابی طراحی شده است و ضرب عدد ۱− در صورت یا مخرج موردنظر بوده است. در تمرین ۵، باید دقت کنید با استفاده از اتحاد جمله مشترک و فاکتورگیری عامل مشترک، چه ارتباطی با عبارت گویای داده‌شده دارد و با استفاده از قانون ضرب یک عبارت گویا در صورت و مخرج کسر داده شده، عبارت جاخالی را تشخیص دهید. به‌عنوان نمونه :

(الف) $\frac{۱-z}{z}=\frac{\boxed{}}{z^{۳}+z}$

داده شده است. ابتدا از عبارت سمت راست، داریم :

$z^{۳}+z=z(z^{۲}+۱)$

حال به عبارت گویای سمت چپ دقت می‌کنیم. کافی است صورت و مخرج را در عبارت جبری $z^{۲}+۱$ ضرب کنیم.

$$\frac{(۱-z)(z^{۲}+۱)}{z(z^{۲}+۱)}=\frac{\boxed{(۱-z)(z^{۲}+۱)}}{z^{۳}+z}$$

تمرین ۶ به‌گونه‌ای طراحی شده که بعضی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان را نشان دهد. در واقع به غیر از قسمت (الف) و (و) که با عبارت داده‌شده برابر نمی‌باشند، مابقی قسمت‌ها، دقیقاً با عبارت گویای داده‌شده برابر می‌باشند و در واقع از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به عمل جمع و همچنین خاصیت تجزیهٔ یک کسر، به چند کسر با مخرج یکسان، استفاده شده است.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ در تعریف عبارت گویا در صفحه ۱۱۴، این نکته را اضافه کنید که باید مخرج کسر، غیرصفر باشد.

۲ــ اگر فعالیت مناسبی برای تعریف عبارت گویا به غیر از مسئلهٔ طرح‌شده در ابتدای صفحهٔ ۱۱۴ مد نظر دارید، بهتر است از مواردی صحبت گردد که دانش‌آموزان قبلاً با آن آشنا بوده‌اند. مثلاً «نسبت طلایی»، می‌تواند به‌عنوان یک عبارت گویا به دانش‌آموزان کمک کند تا نمونهٔ دیگری از عبارت‌های گویا رابشناسند.

۳ــ در بحث یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا، باید این‌گونه نتیجه‌گیری شود که عبارت‌های گویا به‌ازای بعضی مقادیر داده شده، به متغیرشان، تعریف نشده‌اند و نباید به مفهوم «دامنه» تعریف یک متغیر پرداخت.

اشتباهات رایج

دانش‌آموزان معمولاً در ساده‌کردن عبارت‌های گویایی که یک عبارت جبری مشترک در صورت و مخرج کسر دارند، دچار اشتباه می‌شوند. به این مثال دقت کنید.

$$\frac{\cancel{۳x}}{\cancel{۳x}+۴}=\frac{۱}{۴}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، دانش‌آموز فکر می‌کند که عامل $۳x$ در صورت و مخرج مشترک است و می‌تواند آنها را ساده کند. در این گونه موارد، باید تذکر داده شود که تنها و فقط تنها وقتی می‌توان یک عامل را حذف کرد که بتوان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب در عبارت دیگری ساده کرد. نمونه‌های دیگری از این گونه اشتباهات در سؤالات ارزشیابی آمده است.

نمونه‌سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ یک عبارت گویا و یک عبارت غیرگویا مثال بزنید.

۲ــ جمله‌های درست را با علامت ✓ و نادرست را با علامت × مشخص کنید.

☐ الف) عبارت $۲\sqrt{x}$ یک عبارت گویاست.

☐ ب) عبارت $۴|x|$ یک عبارت گویا نیست.

☐ ج) عبارت $\frac{x+۱}{۱+\sqrt{a}}$ یک عبارت گویا نیست.

۳ــ مقدار عددی عبارت $\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$ را به‌ازای ۱ و ۱-، ۲ و ۰ بیابید. آیا عددی می‌توان یافت که به‌ازای آن این عبارت گویا، تعریف نشود؟

۴ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا می‌باشند.

الف) $\sqrt{۱+x}$ ب) $\sqrt{۲}+x-x^{۲}$

ج) $\frac{۱+\sqrt{x^{۲}}}{۱-x^{۲}}$ د) $\frac{x+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-x}$

۵ــ عبارت گویای $\frac{۲x+۱}{mx+۱}$ به‌ازای $\frac{-۱}{۲}$ تعریف نمی‌شود. m را بیابید.

۶ــ جاهای خالی را طوری پر کنید که کسرها با هم مساوی باشند.

الف) $\frac{bx+bx^{۲}}{b^{۲}-x^{۲}}=\frac{b(\cdots+\cdots)}{(\cdots+\cdots)\,(\cdots-\cdots)}$

ب) $\frac{z-t}{\cdots\cdots}=۱$

ج) $\frac{z-t}{\cdots\cdots}=-۱$

د) $\frac{x}{y}=\frac{\cdots}{۴y}$

هـ) $\frac{۳}{x}=\frac{\cdots}{۴x^{۳}}$

و) $\frac{۲}{b}=\frac{\cdots}{abc}$

ز) $\frac{\sqrt{۸}}{x}=\frac{\cdots}{x(x+۲)}$

۷ــ عبارت گویای $\frac{ay}{y+a}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر نیست؟

الف) $a\times\frac{y}{y+a}$

ب) $\times\frac{}{y\quad a}$

ج) $ay\times\frac{۱}{y+a}$

د) $\frac{y}{y+a}\times\frac{a}{y+a}$

۸ــ هریک از عبارت‌های داده‌شده در ردیف اول را به عبارت مساوی آن در ردیف دوم وصل کنید.

ردیف اول :	$\frac{x+۳}{۴-x}$	$\frac{۳-x}{x+۴}$	$\frac{x+۳}{x+۴}$	$\frac{x-۳}{x-۴}$	$\frac{x+۳}{x-۴}$	$\frac{x-۳}{x+۴}$
ردیف دوم :	$\frac{-x-۳}{x-۴}$	$\frac{x-۳}{-x-۴}$	$\frac{-x+۳}{-x+۴}$	$\frac{۳-x}{-x-۴}$	$\frac{-x-۳}{-x-۴}$	$\frac{-x-۳}{۴-x}$

۹ــ تنها یکی از عبارت‌های گویای زیر، ساده می‌شود. مشخص کنید که کدام یک می‌باشد.

الف) $\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}}$ ب) $\frac{x^{۲}+۲}{۲}$ ج) $\frac{x^{۲}+y^{۲}}{y^{۲}}$ د) $\frac{x^{۲}-۵x}{x}$

۱۰ــ تنها یکی از عبارات گویای زیر، با عبارت گویای $\frac{x-۳}{۴-x}$ برابر نیست. مشخص کنید که آن کدام می‌باشد.

الف) $\frac{۳-x}{x-۴}$ ب) $\frac{x+۳}{۴+x}$ ج) $-\frac{۳-x}{۴-x}$ د) $-\frac{x-۳}{x-۴}$

۱۱ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{۷x-۲۱}{۶۳-۲۱x}, \frac{۵k-۱۰}{۲۰-۱۰k}, \frac{(a-۳)(x+y)}{(۳-a)(x-y)}, \frac{m^۲-n^۲}{-m+n}$$

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

اهداف

ــ عبارت‌های گویا را بتواند با یکدیگر جمع و تفریق کند.

ــ عبارت‌های گویا را بتواند با یکدیگر ضرب و یا بر یکدیگر تقسیم کند و آنها را ساده کند.

ــ بتواند عبارت‌های گویای مرکب را ساده کند.

ابزار مورد نیاز :

۱ــ آشنایی با اعمال جبری روی کسرها

۲ــ ساده‌کردن کسرها و هم مخرج‌کردن کسرها

روش تدریس

هدف از این درس، انجام اعمال ضرب و تقسیم و جمع و تفریق روی عبارت‌های گویاست و اینکه درادامه دانش‌آموزان بتوانند عبارت‌های کسری که هم صورت و هم مخرج آن، یک عبارت گویاست، ساده کنند. برای همین‌منظور، ابتدا با یادآوری عمل ضرب و تقسیم روی عددهای گویا، یک فعالیت طراحی شده است که هدف از آن، انجام عمل ضرب و تقسیم روی عبارت‌های گویا با همان تکنیک مربوط به عددهای گویا می‌باشد. بهتر است در انجام فعالیت داده‌شده، بعد از قسمت (الف)، قسمت (د) انجام گیرد و بعد قسمت‌های باقی‌مانده کامل گردد. کار در کلاس صفحه ۱۲۰ نیز در جهت تعمیق یادگیری عمل ضرب و تقسیم روی عبارت‌های گویا می‌باشد. جهت انجام عمل جمع و تفریق روی عبارت‌های گویا، مجدداً عمل‌های جمع و تفریق روی عددهای گویا را که دانش‌آموزان با آنها آشنا بوده‌اند، یادآوری کرده‌ایم و اشاره کرده‌ایم که عیناً همان اعمال روی عبارت‌های گویا نیز قابل انجام است و به همین منظور در فعالیت صفحه ۱۲۰، در قسمت راست نمونه عمل جمع یا تفریق را روی اعداد گویا آورده‌ایم و انتظار داریم که دانش‌آموزان، به‌طور مشابه همان عمل را روی عبارت‌های گویای داده شده انجام دهند. دقت شود که نمونه‌های آورده‌شده در این فعالیت به‌گونه‌ای طراحی شده است که یا دارای یک مخرج مشترک می‌باشند و یا ، مخرج یک کسر، مضربی از مخرج کسر دیگر است و در ساده‌کردن عبارت گویا، نباید به دنبال مفهوم کوچک‌ترین مخرج مشترک برویم و حداکثر پس از محاسبه، عمل ساده‌سازی را انجام دهیم تا عبارت‌های اضافی را حذف کنیم.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱ در ادامه همان فعالیت قبلی است با این تفاوت که نمونه مرتبط با

عددهای گویا در آن ذکر نشده است. در قسمت (ب) این کار در کلاس، از این نکته استفاده شود که عدد منفی می‌تواند از مخرج کسر به قبل از خط کسری منتقل شود. یعنی :

$$\frac{۶}{x}+\frac{۴}{-x}=\frac{۶}{x}-\frac{۴}{x}$$

و سپس عمل تفریق انجام پذیرد.

در ادامه به عبارت‌های گویای مرکب پرداخته‌ایم و در **فعالیت صفحه ۱۲۱**، دو روش را برای ساده‌کردن کسرهای مرکب ذکر کرده‌ایم که در روش اول، صورت و مخرج کسر را در بیشترین توان مخرج کسر داده‌شده ضرب می‌کنیم و سپس با روش‌های قبلی که به دانش‌آموزان آموخته‌اید، آن را ساده می‌کنیم. در روش دوم، ابتدا با استفاده ازمخرج مشترک گیری، عبارت‌های گویای داده‌شده را تبدیل به یک عبارت گویا در صورت و یک عبارت گویا در مخرج می‌کنیم و با توجه به اینکه عمل تقسیم عکس عمل ضرب است، آنها رابه‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت گویا نوشته و سپس با اطلاعات به‌دست‌آمده از قسمت‌های قبل، آنها را ساده می‌کنیم. در جهت تعمیق به فعالیت داده‌شده، **کار در کلاس صفحه ۱۲۲** آورده شده است.

فعالیت و **کار در کلاس** بعدی، هر دو مرتبط با مفاهیم هندسی است که دانش‌آموزان از قبل با آنها سر و کار داشته‌اند و با کمک گرفتن از مفاهیم عبارت‌های گویا، و ساده‌کردن آنها، می‌توانند مسئلهٔ داده‌شده را حل نمایند.

در تمرین ۱، قسمت (ج)، ابتدا عبارت‌های گویای داده‌شده را با استفاده ازاتحادها ساده می‌کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم :

$$\frac{x^۲-۴x+۴}{۴x^۲y-۸xy}\div\frac{x^۲+x-۶}{۶x^۲+۱۸}$$

$$=\frac{\cancel{(x-۲)^۲}}{۴xy\cancel{(x-۲)}}\div\frac{(x+۳)(x-۲)}{۶(x^۲+۳)}$$

$$=\frac{(x-۲)}{۴xy}\div\frac{(x+۳)(x-۲)}{۶(x^۲+۳)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-۲)}}{۴xy}\times\frac{۶(x^۲+۳)}{(x+۳)\cancel{(x-۲)}}$$

$$=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}(x^{۲}+۳)}{\underset{۲}{\cancel{۴}}xy(x+۳)}=\frac{۳(x^{۲}+۳)}{۲xy(x+۳)}$$

هدف از تمرین ۳، اشاره به یکی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان است که در ساده‌کردن عبارت‌های گویا، به عمل ضرب بین عامل‌های مشترک دقت نمی‌کنند و عبارت‌های داده‌شده زیر را به‌صورت غلط ساده می‌کنند :

$$\frac{\cancel{a}^{۲}+۵}{\cancel{a}^{۲}}=۵ \quad \text{غلط} \qquad \frac{\cancel{a}^{۲}+b^{۲}}{\cancel{a}^{۲}}=b^{۲} \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^{۲}+\cancel{۳}}{\cancel{۳}}=a^{۲} \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^{۲}+۵a}{a}=\frac{\cancel{a}(a+۵)}{\cancel{a}}=a+۵ \quad \text{صحیح}$$

هدف از تمرین ۵، توجه به این نکته است که علامت منفی می‌تواند هم در صورت کسر، هم در مخرج کسر و هم در کنار کسر ظاهر شود و هیچ فرقی هم نخواهد کرد. یعنی :

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

در تمرین‌های ۶ و ۸، اشتباهات رایج دانش‌آموزان مورد توجه قرار گرفته است و حل این دو تمرین، دقت دانش‌آموزان را بالا می‌برد و اگر دانش‌آموزان در انجام عملیات جبری خواسته‌شده روی عبارت‌های گویا مشکلاتی داشته باشند، این مشکلات ظاهر می‌گردد و معلمین می‌توانند موارد اشتباه را رفع نمایند.

تمرین ۱۱، از جمله تمرین‌هایی است که دارای جواب باز پاسخ است و می‌تواند به تعداد هریک از دانش‌آموزان کلاس، جواب صحیح داشته باشد.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ در جمع و تفریق عبارت‌های گویا، سعی کنید از روش ارائه‌شده در کتاب پیروی کنید و از به‌کاربردن مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک، خودداری نمایید.

۲ــ در ساده‌کردن عبارت‌های گویای مرکب، از دانش‌آموزان بخواهید که کدام روش را بهتر

درک می‌کنند و دلیل آن را بخواهید و سپس به آنها توصیه کنید که از روشی استفاده کنند که برای آنها راحت‌تر و قابل فهم‌تر است.

۳ــ روی اشتباهات رایجی که در این بحث، دانش‌آموزان به آن می‌پردازند، بیشتر متمرکز شوید و با مثال‌های بیشتری، سعی کنید که این اشتباهات را تکرار نکنند.

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

۱ــ یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، در ساده‌کردن عبارت‌هایی است که یا در صورت کسر و یا در مخرج کسر، عامل ضرب بین عوامل مشترک وجود ندارد مانند

$$\frac{\cancel{x}+۵}{\cancel{x}}=۵$$ غلط

برای پرهیز ازاین‌گونه اشتباهات، باید به دانش‌آموزان متذکر شوید که فقط زمانی می‌توانند عامل مشترک (مثلاً x در مثال بالا) را از صورت و مخرج ساده کنند که هم صورت کسر به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت (یا چند عبارت) نوشته‌شده باشد و هم مخرج کسر. درصورتی که در مثال بالا، $x+۵$ را نمی‌توان به‌صورت حاصل x در یک عبارت دیگر نوشت :

۲ــ یکی دیگر از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، ضرب عدد منفی در پشت پرانتز، بدون درنظرگرفتن مفهوم پرانتز است. به مثال زیر دقت کنید :

$$\frac{۲y}{y-۲}-\frac{۴y-۱}{y-۲}=\frac{۲y-۴y-۱}{y-۲}$$

که غلط است و عدد ۱− فقط در $۴y$ ضرب شده است. درصورتی که صحیح آن به‌صورت زیر است :

$$\frac{۲y}{y-۲}-\frac{۴y-۱}{y-۲}=\frac{۲y-(۴y-۱)}{y-۲}$$

$$=\frac{۲y-۴y+۱}{y-۲}=\frac{-۲y+۱}{y-۲}$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید :

الف) $\frac{x-۲}{۲x-۳}\times\frac{۴x-۶}{x^۲-۴}$ ب) $\frac{x-۲}{x-۳}\times\frac{۲x-۶}{x+۵}$

ج) $\frac{x^{۲}-۱۶}{x^{۲}-۴x+۴}\times\frac{x-۲}{x^{۲}+۶x+۸}$ د) $\frac{x^{۵}y^{۴}}{۳xy}\div\frac{۱}{x^{۳}y}$

هـ) $\frac{x+۳}{x^{۲}-۲x+۱}\div\frac{x+۳}{x-۱}$

و) $\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-۳x-۱۸}\div\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۷x+۶}$

۲ــ جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید :

الف) $\frac{۷}{t}+\frac{۲}{۵}$ ب) $\frac{۱۱}{۵x}-\frac{۱}{۵x}$ ج) $\frac{x^{۲}}{x+۵}-\frac{۲۵}{x+۵}$

د) $\frac{y^{۲}}{y+۶}-\frac{۳۶}{y+۶}$ هـ) $\frac{-۳p+۷}{p^{۲}+۷p+۱۲}+\frac{۸p+۱۳}{p^{۲}+۷p+۱۲}$

و) $x-\frac{۱}{x}$ ز) $۳+\frac{۲}{x+۲}$ ح) $۱-\frac{۱}{۱+x}$

۳ــ دانش‌آموزی دو عبارت گویا را با هم جمع کرده است و جواب را به‌صورت ساده شده $\frac{۳}{۵-y}$ نوشته است.

دانش‌آموز دیگری نیز همین مسئله را حل کرده و جواب را به‌صورت ساده شده $\frac{-۳}{y-۵}$ نوشته است.

آیا هر دو جواب صحیح است؟ توضیح دهید.

۴ــ مانند نمونه، ضرب‌های داده‌شده را حل کنید.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

الف) $\frac{۳x}{x+۱}\times\frac{۶x^{۲}}{x-۱}$ ب) $\frac{x^{۳}}{۳y}\times\frac{۹y^{۲}}{x^{۵}}$

ج) $\frac{a^{۴}}{۵b^{۲}}\times\frac{۲۵b^{۴}}{a^{۳}}$ د) $(۷k+۷)\times\frac{۵}{۴k+۴}$

۵ــ در حل زیر، چه قسمتی غلط می‌باشد؟

$$\frac{x}{x+۲}-\frac{۴x-۱}{x+۲}=\frac{x-۴x+۱}{x+۲}=\frac{-۳x+۱}{x+۲}$$

۶ــ عبارت‌های مرکب زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{\frac{۱۲}{x-۱}}{\frac{۶}{x}}$ ب) $\dfrac{\frac{k+۱}{۲k}}{\frac{۳k-۱}{۴k}}$ ج) $\dfrac{\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+۱}$

د) $\dfrac{\frac{۳}{x}+\frac{۳}{y}}{\frac{۳}{x}-\frac{۳}{y}}$ هـ) $\dfrac{\frac{۸x-۲۴y}{۱۰}}{\frac{x-۳y}{۵x}}$ و) $\dfrac{y-\frac{y-۳}{۳}}{\frac{۴}{۹}+\frac{۲}{۳y}}$

ز) $\dfrac{p-\frac{p+۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}-\frac{۵}{۲p}}$ ح) $\dfrac{\frac{x+۲}{x}+\frac{۱}{x+۲}}{\frac{۵}{x}+\frac{x}{x+۲}}$ ط) $\left(\dfrac{\frac{۱}{x}+x+۲}{\frac{۱}{x^۲}}\right)\div\left(\dfrac{۱+\frac{۱}{x^۲}}{۱-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}}\right)$

۷ــ عبارت $\dfrac{x^۳-۴x}{x^۲-۸x+۱۲}\div\dfrac{x^۲+۷x+۱۰}{x^۲-۶x}$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

الف) $\dfrac{x+۵}{x^۲}$ ب) $\dfrac{x^۲}{x+۵}$ ج) $\dfrac{(x+۵)(x+۲)^۲}{(x-۶)^۲}$

د) $\dfrac{(x-۶)^۲}{(x+۵)(x+۲)^۲}$

۸ــ مساحت یک مستطیل برابر با $x^۲+۱۳x+۳۶$ می‌باشد. اگر طول مستطیل برابر با $x+۹$ باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر، بیان‌کنندهٔ عرض مستطیل است؟

الف) $x+۴$ ب) $x+۲۷$ ج) $x^۲+۴$ د) $x^۲+۲۷$

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها

اهداف

ــ آشنایی با تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر هم

ــ آشنایی با مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقیمانده در تقسیم چندجمله‌ای و رابطهٔ بین آنها

ابزار مورد نیاز :

۱ــ شناخت کامل از چندجمله‌ای‌ها

۲ــ تعیین درجه یک چندجمله‌ای داده‌شده

۳ــ ساده‌کردن کسرها

روش تدریس

با توجه به اینکه هدف از این درس، آشنایی دانش‌آموزان با تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر است، یادگیری را در ۳ مرحله انجام می‌دهیم :

مرحله اوّل : ساده‌ترین حالت، تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای است که در واقع یادآوری ساده‌کردن کسرها و نیز یادآوری قوانین مربوط به ساده‌کردن توان‌هاست و کافی است تنها به ارائهٔ چند مثال بسنده کنیم.

مرحله دوم : در این مرحله تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای مورد توجه قرار می‌گیرد که قبل از شروع، ابتدا ساده‌کردن عددهای گویا که متشکل از یک کسر با تنها یک مخرج است، را به دانش‌آموزان یادآوری می‌کنیم و اشاره می‌کنیم که قانون حاکم بر عددهای گویا به فرم فوق را می‌توان برای تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یک‌جمله‌ای نیز اعمال نمود و به همین منظور، **فعالیت صفحه ۱۲۶** طراحی شده است. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) به‌گونه‌ای طراحی شده است که در روند انجام محاسبهٔ آنها، ساده‌کردن کسرها و عبارت‌های گویا، مجدداً یادآوری می‌شود و در جهت تثبیت این فعالیت، **کار در کلاس صفحه ۱۲۷** طراحی شده است.

مرحله سوم : درواقع این مرحله، آخرین مرحله و کامل‌کنندهٔ بحث تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر چندجمله‌ای است. مجدداً قبل از شروع روند اعمال مورد نظر، یادآوری مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقیمانده در تقسیم دو عدد طبیعی ارائه‌شده است تا دانش‌آموزان در انجام تقسیم چندجمله‌ای‌ها، بهتر و روان‌تر کارهای خواسته‌شده را انجام دهند.

شروع روند یادگیری، با یک مثال است که به‌صورت دقیق و کامل، گام‌های اول، دوم و سوم جهت انجام تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر، توضیح داده شده است و بلافاصله یک فعالیت طراحی‌شده است که لازم است دانش‌آموزان مشابه با مثال انجام‌شده، قسمت‌های (الف) و (ب) این فعالیت را انجام دهند.

از آنجا که در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، اولین و مهم‌ترین نکته، رعایت نوشتن جملات واقع در چندجمله‌ای از توان بیشتر به توان کمتر است لذا در بخش دوم فعالیت فوق، نمونه‌ای داده شده است، که مقسوم‌علیه دارای این خاصیت نیست و لذا ابتدا باید ترتیب صعودی به نزولی رعایت شود و براساس آن، بازنویسی شود.

در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر چندجمله‌ای‌ها، مناسب است که الگوریتم ارائه شده در متن کتاب، با چند مثال ارائه شود و این مثال‌ها، به‌گونه‌ای باشد که به‌ترتیب در یک مرحله، دو مرحله و سه مرحله به پاسخ برسند و در این مثال‌ها، باقیمانده‌ای وجود نداشته باشد. سپس مثال‌هایی ارائه شود که در یک مرحله تمام می‌شوند ولی باقیمانده دارند و مفهوم باقیمانده توضیح داده شود که طبق تعریف، باید درجه آن از درجه مقسوم علیه کمتر باشد و زمانی که به این حالت می‌رسیم، عمل تقسیم پایان یافته است و در آخر، ارتباط بین مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج قسمت بیان گردد و بیان شود که باقیمانده یا صفر است و یا یک چندجمله‌ای که درجه آن اکیداً از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.

در تمرین ۱، نمونه‌های مختلفی از تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر عبارت یک‌جمله‌ای و دوجمله‌ای داده شده است که قسمت (ج) را در این قسمت حل می‌نماییم:

$$\begin{array}{l|l}
x^{۳}-۲۷ & x-۲ \\ \hline
\mp x^{۳}\pm ۲x^{۲} & x^{۲} \\ \hline
+۲x^{۲}-۲۷ & x-۲ \\ \hline
\mp ۲x^{۲}\pm ۴x & ۲x \\ \hline
۴x-۲۷ & x-۲ \\ \hline
\mp ۴x\pm ۸ & ۴ \\ \hline
\quad -۱۹ &
\end{array}$$

بنابراین‌داریم:

$$(x^{۳}-۲۷)\div(x-۲)=(x^{۲}+۲x+۴)(x-۲)-۱۹$$

در تمرین ۴، هدف این است که یک ارزیابی از مفهوم بخش‌پذیری توسط دانش‌آموز داشته

باشد که حل آن به‌صورت زیر است :

$$
\begin{array}{ll}
20x^3+23x^2-10x+a & \underline{|\,4x+3} \\
\mp 20x^3 \mp 15x^2 & \quad 5x^2 \\
\hline
\quad 8x^2-10x+a & \underline{|\,4x+3} \\
\quad -8x^2 \mp 6x & \quad 2x \\
\hline
\qquad -16x+a & \underline{|\,4x+3} \\
\qquad \pm 16x \pm 12 & \quad -4 \\
\hline
\qquad\qquad a-12 & \text{باقیمانده}
\end{array}
$$

چون باید بخش‌پذیر باشد، لذا باقی‌مانده صفر خواهد بود یعنی باید داشته باشیم $a-12=0$ و این یعنی اینکه $a=12$

توصیه‌های آموزشی

۱ــ تأکید می‌شود که در ابتدای شروع تقسیم چند جمله‌ای‌ها، تقسیم عددهای صحیح مورد توجه قرار گیرد و ضمن یادآوری مفهوم مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقیمانده، قوانین ساده‌کردن عبارت‌های گویا مجدداً یادآوری گردد.

۲ــ همواره از دانش‌آموزان بخواهید که قبل از شروع انجام تقسیم چند جمله‌ای بر یک چندجمله‌ای دیگر، نحوه مرتب شدن توان‌های متغیر داده شده را بررسی کنند و در صورتی که به ترتیب نزولی نوشته نشده است، آنها را ابتدا مرتب کنند و سپس عمل تقسیم را انجام دهند.

۳ــ در تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای باید متذکر شوید که روند تقسیم فقط تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

اشتباهات رایج

۱ــ یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان در تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، رعایت نکردن علامت منفی در بین عبارت داده شده در صورت کسر است. به این مثال توجه کنید.

$$-\frac{45x^3+35x^2-12x+15}{15}=-\frac{45x^3}{15}+\frac{35x^2}{15}-\frac{12x}{15}+\frac{15}{15}$$

که علامت منفی در پشت کسر باید در کل عبارت ضرب شود و صحیح آن به شکل زیر است :

$$-\frac{۴۵}{۱۵}x^{۳}-\frac{۳۵}{۱۵}x^{۲}+\frac{۱۲}{۱۵}x-\frac{۱۵}{۱۵}$$

۲ــ در الگوریتم تقسیم چند جمله‌ای‌ها، باید در اولین مرحله بعد از ضرب مقسوم علیه در خارج‌قسمت، عبارت حاصل که زیر مقسوم نوشته می‌شود را تغییر علامت دهند که بعضی مواقع اشتباه می‌کنند و با همان علامت به دست آمده، الگوریتم را ادامه می‌دهند.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ تقسیم‌های زیر را انجام دهید :

الف) $\frac{۲۰a^{۴}b^{۵}c^{۶}}{\sqrt{۸}a^{۲}b^{۶}c^{۳}}$ ب) $\frac{۲yz-xz^{۲}+۴xyz}{-۴z^{۲}}$

ج) $\frac{۲۲x^{۲}a^{۲}-۱۶x^{۴}a^{۳}+۱۲xa-x^{۲}a^{۳}}{۲a^{۲}x^{۲}}$ د) $(z^{۳}-۶۴)\div(z-۲)$

هـ) $(x+x^{۳}+۲x^{۲})\div(x-۳)$

۲ــ در هر یک از تقسیم‌های زیر، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید.

الف) $۱۰-۳x^{۲}+۲x^{۴} \,\big|\, \underline{x^{۲}-۵}$ ب) $x-۲x^{۲}+۴-۶x^{۳} \,\big|\, \underline{۱-x}$

۳ــ اگر در تقسیم $۲x^{۳}+۵x^{۲}+۳x+a$ بر $x+۲$ باقیمانده صفر شود، مقدار a را تعیین کنید.

۴ــ در تقسیم $۲x^{۳}-۲x^{۴}$ بر $۴+۲x^{۲}$، باقیماندهٔ تقسیم کدام عبارت زیر است؟

الف) $۲x+۴$ ب) $-۲x+۴$ ج) $۴x+۸$ د) $-۴x+۸$

۵ــ عبارت $۳x^{۳}+۳x^{۲}-۶$ بر کدام دو جمله‌ای زیر بخش‌پذیر است؟

الف) $x+۱$ ب) $x-۱$ ج) $x+۲$ د) $x^{۲}-x$

۶ــ در صورتی که مقسوم $۴x^{۲}-۴$، خارج قسمت $۴x-۴$ و باقیمانده صفر باشد، مقسوم علیه کدام است؟

الف) $x+۱$ ب) $x-۱$ ج) $-x+۱$ د) $-x-۱$

۷ــ مساحت یک متوازی الاضلاع برحسب x به صورت $-x^{۲}+x^{۳}+۱-x$ و قاعدهٔ آن $x-۱$ است. ارتفاع آن را بیابید.

۸ ــ مساحت یک مستطیل $x^{۲}+۴x-۵$ و عرض آن $x-۱$ است. طول آن را بیابید.

۹ــ اگر در تقسیم $۳x^{۳}+۴x+k$ بر $x-۱$، باقیمانده صفر شود، مقدار k را بیابید.

حل تمرین‌های فصل ۷

تمرین

۱ــ برای هر عبارت گویا، مقادیری را به‌دست آورید که عبارت به‌ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

$a = 0$

$b = 0$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$

$\boxed{y = 0}$

$2y - 6 = 0$

$\boxed{y = 3}$

ج) $\frac{2P}{P^2 - P - 12}$

$p^2 - p - 12 = 0$

$(p+3)(p-4) = 0$

$p = -3 \quad p = +4$

د) $\frac{2x+5}{x}$

$x = 0$

هـ) $\frac{x^2-1}{x+5}$

$x = -5$

و) $\frac{a+3}{2a+1}$

$2a + 1 = 0$

$2a = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$

۲ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{4x\cancel{(x+2)}}{12\cancel{(x+2)}} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{24x^2}{6x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{(y-3)\cancel{(y+1)}}{\cancel{(y+1)}} = y-3$

هـ) $\dfrac{۱-t^{۴}}{t^{۲}+۱}=\dfrac{(۱-t^{۲})\cancel{(۱+t^{۲})}}{\cancel{(۱+t^{۲})}}=۱-t^{۲}$

و) $\dfrac{۱۶x^{۲}-۹y^{۲}}{۸x-۶y}=\dfrac{\cancel{(۴x-۳y)}(۴x+۳y)}{۲\cancel{(۴x-۳y)}}=\dfrac{۴x+۳y}{۲}$

ز) $\dfrac{۶a^{۴}b^{۲}}{۴ab^{۸}}=\dfrac{۲a^{۳}}{۲b^{۶}}$

ح) $\dfrac{-۲a-۸}{a^{۲}+۲a-۸}=\dfrac{-۲\cancel{(a+۴)}}{\cancel{(a+۴)}(a-۲)}=\dfrac{-۲}{a-۲}$

۳ــ عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا ۱- است، معلوم کنید.

الف) $\dfrac{۲y+۳}{۲y-۳}$

ب) $\dfrac{۲y-۳}{۳-۲y}=-۱$

ج) $\dfrac{۲y+۳}{۳+۲y}=۱$

د) $\dfrac{۲y+۳}{-۲y-۳}=-۱$

۴ــ هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\dfrac{a-۲}{a+۵}$	۲) $\dfrac{a+۲}{a-۵}$	۳) $\dfrac{a-۲}{a-۵}$	۴) $\dfrac{a+۲}{a+۵}$	۵) $\dfrac{۲-a}{a+۵}$
۶) $\dfrac{-a-۲}{-a-۵}$ (۴)	۷) $\dfrac{-a-۲}{۵-a}$ (۲)	۸) $\dfrac{a-۲}{-a-۵}$ (۵)	۹) $\dfrac{۲-a}{-a-۵}$ (۱)	۱۰) $\dfrac{-a+۲}{-a+۵}$ (۳)

۵ــ در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف) $\dfrac{۱-z}{z}=\dfrac{\boxed{(۱-z)(z^{۲}+۱)}}{z^{۳}+z}$

ب) $\dfrac{۳x}{x-۳}=\dfrac{\boxed{۳x(x+۲)}}{\underset{(x+۲)(x-۳)}{\cancel{x^{۲}-x-۶}}}$

ج) $\dfrac{۳y+۲}{۵}=\dfrac{۱}{۵}(\boxed{۳y+۲})$

د) $\dfrac{(x-۵)\boxed{(x-۲)(x+۱)}}{(x-۲)(x-۵)}=x+۱$

۶ــ از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

✓ الف) $\frac{z}{t}(x+y)$　　ب) $\frac{zx+y}{t}$　　✓ ج) $\frac{۱}{t}\times z(x+y)$

✓ د) $z\times\frac{x+y}{t}$　　✓ هـ) $\frac{zx}{t}+\frac{zy}{t}$　　و) $\frac{zx}{t}+y$

تمرین

۱ــ ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید (در همهٔ تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است).

الف) $$\frac{a^{۲}-۱۶}{a+۴}\times\frac{a+۲}{a^{۲}-۸a+۱۶}=\frac{(a-۴)\cancel{(a+۴)}}{\cancel{(a+۴)}}\times\frac{a+۲}{(a-۴)^{۲}}=\frac{a+۲}{a-۴}$$

ب) $$\frac{m^{۲}-۴۹}{m+۱}\div\frac{۷-m}{m^{۲}-۱}=\frac{(m-۱)(m+۷)}{m+۱}\times\frac{(m-۱)(m+۱)}{۷-m}$$

$$=\frac{(m+۷)(m-۱)}{-۱}=-(m+۷)(m-۱)$$

ج) $$\frac{x^{۲}-۴x+۴}{۴x^{۲}y-۸xy}\div\frac{x^{۲}+x-۶}{۶x^{۲}+۱۸}=\frac{(x-۲)^{۲}}{۴xy(x-۲)}\times\frac{۶(x^{۲}+۳)}{(x+۳)(x-۲)}$$

$$=\frac{۶(x^{۲}+۳)}{۴xy}=\frac{۳(x^{۲}+۳)}{۲xy}$$

د) $$\frac{۱-c^{۲}}{b^{۳}}\times\frac{b^{۲}}{۱-۲c+c^{۲}}=\frac{(۱-c)(۱+c)}{b^{۳}}\times\frac{b^{۲}}{(۱-c)^{۲}}=\frac{۱+c}{b(۱-c)}$$

۲ــ جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $$\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}-\frac{y(x-y)^{۲}}{x^{۴}-y^{۴}}=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}-\frac{y(x-y)^{۲}}{(x^{۲}-y^{۲})(x^{۲}+y^{۲})}$$

$$=\frac{x(x^{۲}-y^{۲})-y(x-y)^{۲}}{(x^{۲}-y^{۲})(x^{۲}+y^{۲})}=\frac{x^{۳}+xy^{۲}-yx^{۲}-y^{۳}}{(x^{۲}-y^{۲})(x^{۲}+y^{۲})}=\frac{x^{۲}(x-y)+y^{۲}(x-y)}{(x^{۲}-y^{۲})(x^{۲}+y^{۲})}$$

$$=\frac{(x^{۲}+y^{۲})(x-y)}{(x^{۲}+y^{۲})(x^{۲}-y^{۲})}=\frac{x-y}{x^{۲}-y^{۲}}=\frac{۱}{x+y}$$

ب) $$\frac{x+۷}{\underbrace{ax-bx}_{x(a-b)}}+\frac{y+۹}{\underbrace{by-ay}_{-y(a-b)}}=\frac{(-y)(x+۷)+(y+۹)x}{x(a-b)(-y)}=\frac{-xy-۷y+xy+۹x}{x(a-b)(-y)}$$

$$=\frac{۹x-۷y}{x(a-b)(-y)}$$

ج) $$\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a-b}-\frac{a^{۳}-b^{۳}}{a^{۲}-b^{۲}}=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{(a-b)}-\frac{(a^{۳}-b^{۳})}{a^{۲}-b^{۲}}=\frac{(a+b)(a^{۲}-b^{۲})-a^{۳}+b^{۳}}{a^{۲}-b^{۲}}$$

$$=\frac{a^{۳}-ab^{۲}+ba^{۲}-b^{۳}-a^{۳}+b^{۳}}{a^{۲}-b^{۲}}=\frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{ab}{a+b}$$

د) $$\frac{۴+x^{۲}-۲x}{۲+x}-۲-x=\frac{۴+x^{۲}-۲x-(x+۲)^{۲}}{۲+x}$$

$$=\frac{x^{۲}-۲x+۴-x^{۲}-۴x-۴}{۲+x}=\frac{-۶x}{۲+x}$$

۳ــ فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^{۲}+۵}{a^{۲}} \quad و \quad \frac{a^{۲}+۳}{۳} \quad و \quad \frac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}} \quad و \quad \frac{a^{۲}-۵a}{a} \checkmark \quad =\frac{a(a-۵)}{a}=a-۵$$

۴ــ از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+۳}{y+۳}$ ب) $\frac{۳-x}{۳-y}$ ج) $\frac{۳x}{۳y}$ ✓   د) $\frac{x^{۳}}{y^{۳}}$ هـ) $\frac{a^{۳}x}{a^{۳}y}$ ✓

۵ــ عبارت $\frac{-x+۳}{x+۵}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+۳}{x+۵}$ ✓ب) $-\frac{x-۳}{x+۵}$ ج) $\frac{x-۳}{x+۵}$ د) $-\frac{۳-x}{x+۵}$

۶ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+۵}{a^۲-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=a-۵$ ✓ب) $\frac{a+۵}{a^۲-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=\frac{۱}{a-۵}$

۷ــ اگر $A=a^۲-b^۲$ و $B=a^۲+b^۲$ و $C=۲ab$، حاصل عبارت $\frac{A^۲-B^۲}{C^۲}$ را به‌دست آورید.

$$=\frac{(a^۲-b^۲)^۲-(a^۲+b^۲)^۲}{(۲ab)^۲}=\frac{a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴-a^۴-۲a^۲b^۲-b^۴}{۴a^۲b^۲}$$

$$=\frac{-۴a^۲b^۲}{۴a^۲b^۲}=-۱$$

۸ ــ کدام‌یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام‌یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید (همهٔ عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود).

الف) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{ab}$ ب) $\frac{x^{۱۳}}{x^{۲۰}}=x^۷$

$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^۲-b^۲}{ab}$ $\frac{x^{۱۳}}{x^{۲۰}}=\frac{۱}{x^۷}$

ج) $\frac{a}{۵}-\frac{۷-b}{۵}=\frac{a-۷-b}{۵}$ د) $\frac{a-b}{b-a}=۱$

$\frac{a}{۵}-\frac{۷-b}{۵}=\frac{a-۷+b}{۵}$ $\frac{a-b}{b-a}=\frac{a-b}{-(a-b)}=-۱$

هـ) $\dfrac{۱}{a-b}=\dfrac{-۱}{a+b}$

$\dfrac{۱}{a-b}-\dfrac{-۱}{-a+b}$

و) ✓ $\dfrac{a^{۲}-b^{۲}}{a-b}=a+b$

ز) $\dfrac{ca+cb}{c+cd}=\dfrac{a+b}{d}$

$\dfrac{ca+cb}{c+cd}=\dfrac{c(a+b)}{c(۱+d)}=\dfrac{a+b}{۱+d}$

ح) ✓ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}}=\dfrac{c}{b}$

۹ــ طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به‌صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

عرض $= x$

طول $= ۲x-۱$

محیط $= ۲(x+۲x-۱)=۲(۳x-۱)=۶x-۲$

مساحت $= x(۲x-۱)=۲x^{۲}-x$

$$\frac{۶x-۲}{۲x^{۲}-x}$$

۱۰ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\dfrac{\dfrac{a-a^{۲}}{a^{۲}-۱}}{\dfrac{a}{a+۱}-a}=\dfrac{a(۱-a)(a+۱)}{(a^{۲}-۱)(a-a^{۲}-a)}=\dfrac{a(۱-a^{۲})}{(۱-a^{۲})(a^{۲})}=\dfrac{۱}{a}$

ب) $\dfrac{\dfrac{۱}{x-y}-\dfrac{۲}{x+y}}{\dfrac{x^{۲}-۹y^{۲}}{(x-y)^{۲}}}=\dfrac{\dfrac{x+y-۲x+۲y}{(x-y)(x+y)}}{\dfrac{(x-۳y)(x+۳y)}{(x-y)^{۲}}}=\dfrac{(x-y)^{۲}(-x+۳y)}{(x-y)(x+y)(x-۳y)(x+۳y)}$

$=\dfrac{-۱(x-y)}{(x+y)(x+۳y)}$

ج) $\dfrac{۲x}{x^{۲}+۲x+۱}+\dfrac{۱}{x^{۲}-۱}-\dfrac{۲}{x+۱}=\dfrac{۲x(x-۱)+(x+۱)-۲(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)^{۲}(x-۱)}$

$(x+۱)^{۲}\qquad(x-۱)(x+۱)$

$$=\frac{\cancel{۲x^{۲}}-۲x+x+۱-\cancel{۲x^{۲}}+۲}{(x+۱)^{۲}(x-۱)}=\frac{-x+۳}{(x+۱)^{۲}(x-۱)}$$

۱۱ــ دو عبارت گویا بنویسید که :

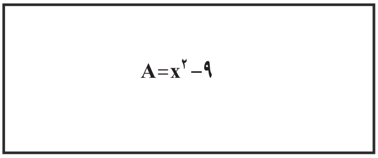
الف) حاصل‌ضرب آنها $\frac{a-۲}{a+۷}$ شود. $\frac{b}{a+۷},\frac{a-۲}{b}$

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-۲}{a+۷}$ شود. $\frac{-۲}{a+۷},\frac{a}{a+۷}$

۱۲ــ عرض مستطیل مقابل را برحسب x به‌دست آورید.

$$\frac{x^{۲}-x-۱۲}{x-۴}$$

مساحت مستطیل $x^{۲}-۹$ است.



$$(x^{۲}-۹)\div\frac{x^{۲}-x-۱۲}{x-۴}=\frac{(x-۳)(\cancel{x+۳})}{۱}\times\frac{(\cancel{x-۴})}{(\cancel{x-۴})(\cancel{x+۳})}=x-۳$$

تمرین

۱ــ تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-۲x^{۲}y^{۳}z^{۷}}{۱۸xz^{۵}}=\frac{-xy^{۳}z^{۲}}{۹}$

ب) $\frac{۲a^{۳}y-a^{۴}y^{۲}+۱۵xy}{-۵y^{۲}}=\frac{۲a^{۳}y}{-۵y^{۲}}-\frac{a^{۴}y^{۲}}{-۵y^{۲}}+\frac{۱۵xy}{-۵y^{۲}}$

$$=\frac{-۲a^{۳}}{۵y}+\frac{a^{۴}}{۵}-\frac{۳x}{y}$$

ج) $(x^3-27)\div(x-2)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-27 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x^3 \mp 2x^2} & x^2+2x+4 \\
2x^2-27 & \\
\underline{\pm 2x^2 \mp 4x} & \\
\quad 4x-27 & \\
\underline{\quad \pm 4x \mp 8} & \\
\qquad -19 &
\end{array}
$$

د) $(3y^2-10y-24)\div(3y-4)$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{3y^2}-10y-24 & 3y-4 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm\cancel{3y^2} \mp 4y} & y-2 \\
\quad -6\cancel{y}-24 & \\
\underline{\quad \mp\cancel{6}y \pm 8} & \\
\qquad -32 &
\end{array}
$$

هـ) $$
\begin{array}{l|l}
2\cancel{x^5}+5x^4-2x^3+2x^2-2x+3 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{2}x^5-6x^4} & 2x^2-x^3+x^2-x+1 \\
\quad -\cancel{x^4}-2x^3 & \\
\underline{\quad +\cancel{x}^4+3x^3} & \\
\qquad x^3+2x^2 & \\
\underline{\qquad -\cancel{x}^3-3x^2} & \\
\qquad\quad -\cancel{x^2}-2x & \\
\underline{\qquad\quad +\cancel{x}^2+3x} & \\
\qquad\qquad \cancel{x}+3 & \\
\underline{\qquad\qquad -\cancel{x}-3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

۲ــ خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^4+4x^6+x^2+5 & 1-x^3 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^6-3x^4+x^2+5 & -x^3+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^6+4x^3} & -4x^3+3x-4 \\
\quad -3\cancel{x}^4+4x^3+x^2+5 & \\
\underline{\quad +\cancel{3}x^4-3x} & \\
\qquad 4\cancel{x}^3+x^2-3x+5 & \\
\underline{\qquad -\cancel{4}x^3+4} & \\
\qquad\qquad x^2-3x+9 &
\end{array}
$$

$$4x^6-3x^4+x^2+5=(1-x^3)(-4x^3+3x-4)+x^2-3x+9$$

۳ــ حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^3+15x^2+28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به‌دست آورید.

$$\frac{2x^3+15x^2+28x}{x(x+4)}=\frac{\cancel{x}(2x^2+15x+28)}{\cancel{x}(x+4)}=2x+7$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^2}+15x+28 & x+4 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{2x^2}-8x} & 2x+7 \\
\quad 7x+28 & \\
\quad \underline{-7x-28} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

۴ــ اگر چند جمله‌ای $20x^3+23x^2-10x+a$ بر $4x+3$ بخش‌پذیر باشد، a را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{20x^3}+23x^2-10x+a & 4x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{20x^3}-15x^2} & 5x^2+2x-4 \\
\quad \cancel{8x^2}-10x & \\
\quad \underline{-\cancel{8x^2}-6x} & \\
\qquad -\cancel{16x}+a & \\
\qquad \underline{+\cancel{16x}+12} & \\
\qquad\quad a+12 &
\end{array}$$

$a+12=0$

$a=-12$

۵ــ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2-9x+9$ را بر هر یک از عبارت‌های زیر به‌دست آورید.

$2x+3$ و $2x-3$ و $x-3$ و $x+3$

$$\begin{array}{l|l}
2x^2-9x+9 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2-6x} & 2x-15 \\
\quad -15x+9 & \\
\quad \underline{15x+45} & \\
\qquad 54 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^2-9x+9 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2+6x} & 2x-3 \\
\quad -3x+9 & \\
\quad \underline{+3x-9} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^2-9x+9 & 2x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2+3x} & x-3 \\
\quad -6x+9 & \\
\quad \underline{+6x-9} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^2-9x+9 & 2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2-3x} & x-6 \\
\quad -12x+9 & \\
\quad \underline{+12x+9} &
\end{array}$$

حجم و مساحت

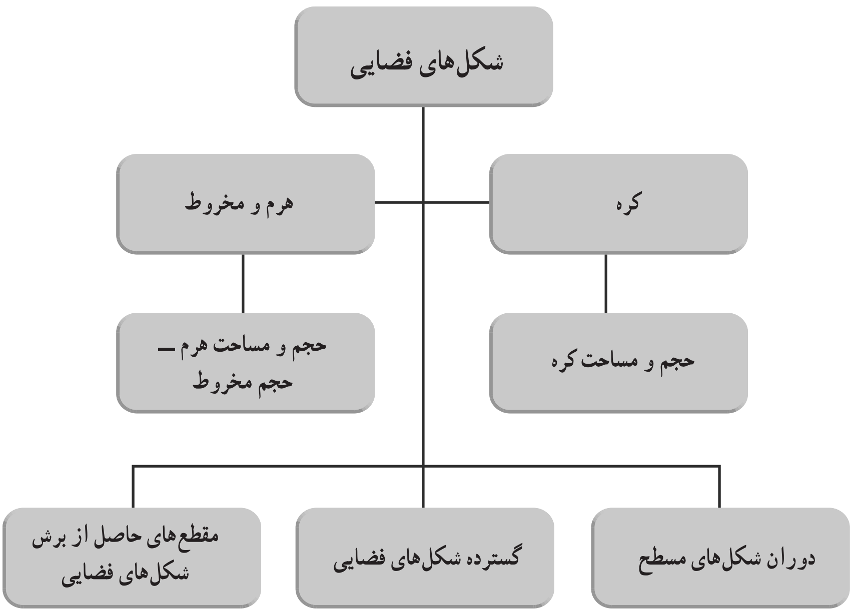
فصل ۸

گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبدکاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

نگاه کلی به فصل

در کتاب ریاضی هفتم در مورد شکل‌های فضایی، توضیحاتی داشتیم و تقسیم‌بندی کلی آنها به سه دستهٔ حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی را انجام دادیم. همچنین در آنجا با دستورات محاسبهٔ مساحت جانبی و کل و حجم منشور و حجم‌های منشوری آشنا شدیم. در این کتاب دنبالهٔ این کار را با ارائه مفاهیم و دستورات مرتبط با حجم‌های کروی و هرمی پی می گیریم. ابتدا دستور حجم کره را به روش تجربی به دست می‌آوریم، سپس به دستور مساحت رویهٔ کره با همان روش می‌پردازیم. در درس دوّم دستور حجم هرم را به روشی نسبتاً دقیق به دست می‌آوریم و کمی هم به مساحت آن توجه می کنیم و دستور حجم مخروط را نیز از تعمیم آن به دست می‌آوریم و در درس سوّم (درس آخر) جمع‌بندی از دستورات قبلی محاسبهٔ سطح و حجم داریم و در کنار آن نگاهی به تقویت قوّهٔ شهود فضایی دانش‌آموزان نیز داریم. برای این منظور تمریناتی در ارتباط با ایجاد شکل‌های فضایی از طریق دوران شکل‌های مسطح هندسی و نیز کار با گستردهٔ شکل‌های فضایی و نیز تصور هندسی نسبت به برش‌های مقطعی شکل‌های فضایی داریم.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

یکی از کاربردهای اصلی هندسه، در معماری بناها بوده است و در تاریخ کشورمان از دوران کهن تا معاصر صدها نمونهٔ ممتاز از تأثیر آشنایی دانشمندان، ریاضی‌دانان و مهندسان و معماران ایرانی با دانش هندسه به وضوح دیده می‌شود. بنای تاریخی گنبد قابوس واقع در شهر گنبد کاووس که در قرن چهارم هجری بنا شده است یک نمونه از این بناها است. در این بنا حجم‌های هندسی مانند استوانه، مخروط و منشور به چشم می‌خورند. تقارن و زیبایی اثر، نمایانگر تسلط کامل معماران آن با دانش هندسهٔ فضایی می‌باشد.

دانستنی‌هایی برای معلم

مباحث هندسهٔ فضایی از دیر باز مورد توجه ریاضی‌دانان و حکمای قدیم بوده‌اند. وجود اهرام ثلاثه در مصر باستان به خوبی بیانگر آشنایی هندسه‌دانان مصری با شکل‌های فضایی بوده است. حکما و ریاضی‌دانان یونان باستان نیز در این زمینه تحقیقات و بحث‌های بسیاری داشته‌اند. یکی از قدیمی‌ترین این بحث‌ها، موضوع تضعیف مکعب بوده است. مسئله‌ای مشهور در تاریخ ریاضیات که قرن‌ها باعث بحث‌های مختلف شده است و امروزه لاینحل بودن آن به اثبات رسیده است. تضعیف مکعب، یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد (فقط به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار) که معادل با رسم خط راستی به طول $\sqrt[3]{۲}$ می‌باشد. در یونان باستان، ائودوکسوس (حدود ۳۷۰ قبل از میلاد) و اراتستن (حدود ۲۳۰ قبل از میلاد) و آپولونیوس (حدود ۲۲۵ قبل از میلاد) از جملهٔ افرادی بوده‌اند که برای این کار روش‌هایی ارائه کرده‌اند. مسئله تضعیف مکعب به همراه دو مسئلهٔ مشهور دیگر (تثلیث زاویه و تربیع دایره) از مسائل بحث برانگیز در طی قرن‌ها بوده‌اند. یکی دیگر از ریاضی‌دانان یونان قدیم که کارهای برجسته‌ای در هندسه فضایی انجام داد، نابغهٔ آن عصر، یعنی ارشمیدس بود. ارشمیدس تحقیقات مفصلی در زمینهٔ محاسبات مربوط به کره، استوانه و مخروط و قطعات آنها انجام داد. یونانیان قدیم با چند وجهی‌های منتظم (چهاروجهی منتظم یا هرم منتظم مثلث‌القاعده – شش‌وجهی منتظم یا مکعب – هشت‌وجهی منتظم، دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم) آشنا بودند و حتی نسبت به آنها دیدگاه‌های فلسفی خاصی داشتند. قرن‌ها بعد اویلر ریاضی‌دان بنام سوئیسی رابطهٔ معروف خود را درباره تعداد رئوس، یال‌ها و وجه‌های هر چندوجهی منتظم، اثبات کرد. این رابطه قبلاً توسط دکارت نیز کشف شده بود. مطابق این دستور اگر E تعداد یال‌ها، F تعداد وجه‌ها و V تعداد

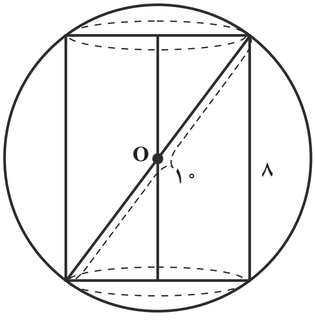
رئوس یک چندوجهی محدب باشد، آنگاه : E=V+F−۲. ریاضی‌دان اروپایی دیگر که در زمینهٔ هندسهٔ فضایی کارهای ماندگاری انجام داد، کاوالیری بود که در سال ۱۵۹۸در میلان به دنیا آمد و زیر نظر گالیله درس خوانده بود و در فاصلهٔ سال‌های ۱۶۲۹ – ۱۶۴۷ استاد ریاضیات دانشگاه بولونیا بود. اصول بنیان گذاشته توسط او کاربردهای زیادی در محاسبهٔ سطح و حجم دارند. این دو اصل عبارت‌اند از :

۱ــ اگر دو قطعه چنان باشند که بین یک جفت خط موازی قرار گیرند و هر خط موازی آن دو خط، روی این دو قطعه، پاره خط‌های برابر جدا کند، آنگاه مساحت‌های این دو قطعه برابر است.

۲ــ اگر دو شکل فضایی بین یک جفت صفحهٔ موازی قرار گیرند و هر صفحه موازی آن دو صفحه، روی این دو شکل سطح مقطع‌های برابر ایجاد کنند، آنگاه حجم‌های این دو شکل برابر است.

به کمک این اصول دستورهای مربوط به حجم هرم و کره به طور دقیق اثبات می‌شود.

مسیرهایی برای توسعه

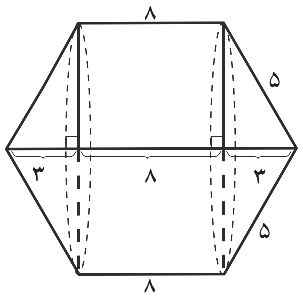


۱ــ در فعالیت مربوط به محاسبهٔ حجم کره، با مفهوم محیط شدن و محاط شدن آشنا می‌شویم. این یکی از مباحثی است که قابلیت توسعه و تعمیق دارد و می‌توان براساس آن مسائل بیشتری را مطرح کرد، از جمله این مسئله :

ــ استوانه‌ای به ارتفاع ۸ سانتی‌متر در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است. حجم استوانه و حجم فضای ما بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲ــ در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۶ همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با تغییر مکان رأس هرم‌ها روی وجه بالایی مکعب، حجم هرم‌ها تغییر نمی‌کند. این می‌تواند مقدمه‌ای بر شکل‌گیری مفهوم مکان هندسی در ذهن دانش‌آموزان باشد : «مکان هندسی رأس هرم‌هایی با قاعدهٔ مستطیل ABCD که حجم ثابتی داشته باشند، صفحه‌ای موازی این مستطیل است، از اینجا می‌توان بدون نام بردن از اصطلاح «مکان هندسی» درکی شهودی از آن ایجاد کرد و مثال‌هایی از هندسهٔ مسطحه آورد تا این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان جایی باز کند.

۳ــ دوران شکل‌های هندسی و ایجاد شکل‌های فضایی و محاسبهٔ حجم آنها نیز می‌تواند به توسعهٔ مفاهیم این فصل بیانجامد.



از جمله این مسئله :

حجم حاصل از دوران یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۱۴ و ۸ سانتی‌متر و ساق‌های ۵ سانتی‌متر حول قاعدهٔ بزرگ آن را به دست آورید.

معرفی منابع برای معلمان

دایرةالمعارف هندسه جلد ۱۵ و ۱۶ نوشتهٔ : محمدهاشم رستمی انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

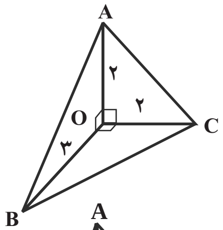
۱ــ مساحت رویهٔ کره‌ای، مساوی ۱۰۰π واحد مربع است. حجم این کره را به دست آورید.

۲ــ اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟ حجم آن چند برابر می‌شود؟

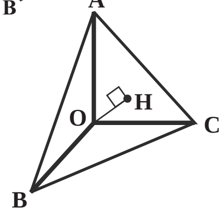
۳ــ کره‌ای در یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم مکعب را به دست آورید.

۴ــ رأس یک نیم کره، نقطه‌ای از آن است که از قاعدهٔ نیم‌کره بیشترین فاصله را دارد. فاصلهٔ رأس نیم کره از مرکز قاعده و از محیط قاعده را برحسب شعاع کره (R) به دست آورید.

۵ــ مخروطی در یک نیم‌کره محاط شده است، به طوری که رأس مخروط بر رأس نیم کره واقع است و قاعده‌های مخروط و نیم‌کره نیز بر هم منطبق است. نسبت حجم مخروط به حجم نیم کره را به‌دست آورید.



۶ــ در شکل مقابل OA و OB و OC دوبه‌دو بر هم عمودند. حجم هرم AOBC را به‌دست آورید.



۷ــ در شکل مقابل OA و OB و OC دوبه‌دو بر هم عمودند و OA=OB=OC=۲.

الف) حجم هرم AOBC را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

ج) با توجه به حجم هرم، با قاعدهٔ مثلث ABC، فاصلهٔ O از این

قاعده (OH) را به دست آورید.

۸ ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۶ و ۸ سانتی‌متر هستند، یک بار حول ضلع ۶ سانتی‌متری و بار دیگر حول ضلع ۸ سانتی‌متری دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو شکل ایجاد شده را به‌دست آورید.

۹ــ نیم‌دایره‌ای به شعاع R را به شکل یک مخروط در می‌آوریم. حجم مخروط را بر حسب R به دست آورید. اگر همین نیم‌دایره را حول قطر آن دوران دهیم، حجم حاصل چقدر است؟ نسبت حجم این دو شکل (مخروط و شکل حاصل از دوران) را به دست آورید.

اهداف

ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم کره با داشتن اندازهٔ شعاع آن

ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ مساحت رویهٔ کره با داشتن اندازهٔ شعاع آن

ابزار مورد نیاز :

۱ــ ورقهٔ طلقی شکل شفاف ۲ــ چسب و ابزار برش به مقدار کافی

۳ــ ورقه‌های کاغذی ۴ــ توپ پلاستیکی کوچک

روش تدریس

در ابتدای درس، پس از یادآوری انواع حجم‌ها از کتاب هفتم، تعریف کره با استفاده از مشابهت بین مفاهیم دایره (در صفحه) و کره در فضا انجام می‌گیرد : کره مجموعه نقاطی از فضا است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه در فضا به نام مرکز، به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازه، شعاع کره می‌گوییم.

در ادامه با انجام دو فعالیت، دانش‌آموزان با دستورات محاسبهٔ حجم و سطح کره به طور عملی آشنا می‌شوند، بدون اینکه نیازی به حفظ کردن آنها داشته باشند. هدف از انجام این دو فعالیت این است که دانش‌آموزان با این دو اصل آشنا شوند :

۱ــ حجم کره‌ای به شعاع R، $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه‌ای است که این کره در آن قابل محاط شدن است.

۲ــ مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع R چهار برابر مساحت دایره‌ای به همین شعاع است. با انجام درست فعالیت اوّل، اصل اوّل توسط دانش‌آموزان به خوبی درک شده و به خاطر سپرده می‌شود. دانش‌آموزان باید خود با دست‌ورزی و سعی و خطا، استوانهٔ طلقی‌ای که از اطراف بر کره (توپ پلاستیکی) محیط می‌شود را بسازند و سپس توپ را از استوانه خارج کرده و به ترتیبی که در کتاب بیان شده است، آن را از خط برش آن نصف کرده و به دو نیم کره تفکیک کنند. یکی از دو نیم کره را در استوانه قرار دهند (هدف از این کار این است که برابری شعاع نیم کره و شعاع قاعدهٔ استوانه به صورت عملی دیده شود) آنگاه با ریختن آب توسط نیم کره دیگر، اولاً برابری حجم‌های دو نیم کره یادآوری شود، ثانیاً نتیجه شود که حجم استوانه سه برابر حجم نیم کره است. بنابراین حجم استوانه ۱/۵ ($\frac{۳}{۲}$)

برابر حجم کره و لذا حجم کره $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه است.

$$(\text{کره})\ V = \frac{۲}{۳}\ (\text{استوانه})\ V=\frac{۲}{۳}\times\pi R^{۲}\times ۲R = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۲ نیز روی همین موضوع کار شده است و محاسبه‌ای عملی در ارتباط با حجم کره‌ای محاط در استوانه انجام می‌گیرد تا همان فعالیت دوباره به‌صورت محاسباتی تکرار شود.

در فعالیت صفحهٔ ۱۳۳، با استفاده از یکی از همان دو نیم کرهٔ پلاستیکی دستور محاسبهٔ مساحت رویهٔ نیم‌کره و از آنجا مساحت رویهٔ کره به‌صورت تجربی به‌دست می‌آید. دانش‌آموزان باید سعی کنند به کمک دو ورقهٔ کاغذی دایره شکل که شعاع آنها با شعاع نیم‌کره برابر است، روی نیم‌کره را به‌طور کامل بپوشانند. یکی از راه‌های این کار، تقسیم هر دایره به هشت قطاع برابر است. البته بدیهی است که این پوشاندن سطح به‌صورت تقریبی و با خطا انجام می‌شود، ولی شهودی که از رابطه بین مساحت رویهٔ نیم‌کره و مساحت دایرهٔ قاعده آن به‌دست می‌دهد این آمادگی ذهنی را به‌دانش‌آموزان می‌دهد که مساحت رویهٔ نیم‌کره دو برابر مساحت دایره و در نتیجه مساحت رویهٔ کره ۴ برابر مساحت این دایره است :

$$S = ۴\pi R^{۲}$$

در کار در کلاس این صفحه نیز محاسباتی در همین ارتباط داریم. نکتهٔ قابل توجه آن است که تفاوت بین مساحت کل یک نیم‌دایره توپر و یک نیم‌کرهٔ تو خالی در این محاسبه‌ها تجربه می‌شود.

در تمرین ۱ هدف کارکردن برروی اعداد بزرگ و یادآوری نماد علمی است. شعاع کره زمین ۶۴۰۰ و یا $۶/۴ \times ۱۰^{۳}$ کیلومتر و در نتیجه مساحت رویهٔ کره زمین برابر است با :

$$S = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(۶/۴ \times ۱۰^{۳})^{۲} = ۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}\ km^{۲}$$

و نسبت مساحت کشور عزیزمان به مساحت رویهٔ کره زمین برابر است با :

$$\frac{۱/۶۴۸\times ۱۰^{۶}}{۱/۶۳۸۴\times ۱۰^{۸}} \approx ۱/۰۰۶\times ۱۰^{-۲} = \%۱/۰۰۶$$

یعنی مساحت کشور ما تقریباً یک درصد مساحت کره زمین است!

در تمرین ۲ توجه می‌کنیم که ارتفاع کپسول با ارتفاع استوانه برابر نیست (بدفهمی رایج) ارتفاع نیم‌کرهٔ بالایی، مساوی شعاع قاعدهٔ استوانه، یعنی ۳۰ سانتی‌متر است و لذا ارتفاع استوانه ۷۰ سانتی‌متر

است. پس حجم کپسول برابر است با :

$$V\ (\text{کپسول}) = V\ (\text{استوانه}) + V\ (\text{نیم‌کره}) \quad V = \pi(۰/۳)^۲ \times ۰/۷ + \frac{۲}{۳}\pi(۰/۳)^۳ = ۰/۰۸۱\,\pi \approx ۰/۲۵۴\ m^۳ = ۲۵۴\ lit$$

برای محاسبهٔ سطح کپسول، برای پاسخ به قسمت بعدی مسئله، دقت کنیم که مساحت قاعدهٔ نیم‌کره نباید محاسبه شود (بدفهمی رایج) همچنین مساحت کل استوانه هم نباید محاسبه شود زیرا قاعده بالایی آن رنگ نمی‌شود؛ بنابراین :

$$S\ (\text{کپسول}) = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی استوانه} + \text{مساحت نیم‌کره}$$

$$= \pi\,(۰/۳)^۲ + ۲\pi\,(۰/۳)(۰/۷) + ۲\pi\,(۰/۳)^۲ =$$

$$= ۰/۶۹\pi \approx ۲/۱۶۶۶\ m^۲$$

پس مقدار رنگ لازم برابر است با : $۲/۱۶۶۶ \times ۱۰۰ = ۲۱۶/۶۶g$

توصیه‌های آموزشی و بدفهمی‌های رایج

توصیه می‌شود که در حل مسائل این بخش، دانش‌آموزان به‌طور فعال با ماشین‌حساب کار کنند و سعی شود از مثال‌های عینی استفاده شود که معمولاً اندازه‌ها، عددهای صحیح نیستند. همچنین به تبدیل‌های واحدها دقت شود. برای محاسبهٔ حجم و سطح لازم است که همهٔ متغیرها دارای واحد (یکای) اندازه‌گیری همسان باشند. به‌عنوان مثال، اگر حجم برحسب مترمکعب خواسته شده است، لازم است که شعاع یا ارتفاع با واحد متر بیان شود و این یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است.

همچنین توصیه می‌شود که حجم‌هایی که اندازهٔ آنها به‌دست می‌آید، با حجم‌هایی که دانش‌آموزان می‌توانند آنها را مجسم کنند مقایسه شود، مانند کاری که در رابطه با حجم کپسول انجام شده است و به‌واحد لیتر تبدیل شده است. مثلاً می‌توان اشاره کرد که حجم کپسول که حدود ۲۵۴ لیتر است، چند برابر حجم یک بطری نوشابهٔ ۱/۵ لیتری است.

درس دوم: حجم هرم و مخروط

اهداف

ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم هرم

ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم مخروط

روش تدریس

در ابتدای این درس تعریف‌های اولیهٔ مربوط به هرم انجام می‌گیرد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد و ابهام دانش‌آموزان را نسبت به آن رفع نمود، این است که قاعدهٔ هرم نیز جزء وجه‌های آن است و در فعالیت ابتدای درس نیز روی این امر تأکید شده است. در قسمت دوم فعالیت (صفحهٔ ۱۳۵ و ۱۳۶) هدف این است که دانش‌آموزان به‌طور شهودی به این حقیقت واقف شوند که اگر دو هرم دارای مساحت‌های قاعده یکسان و ارتفاع‌های برابر باشند، حجم‌های برابر دارند. اثبات دقیق این موضوع به کمک اصل کاوالیری انجام می‌شود. کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۶ هم معطوف به همین موضوع است. در فعالیت صفحهٔ ۱۳۷ می‌خواهیم از همین موضوع استفاده کرده و دستور حجم هرم را استنتاج نمائیم. توصیه می‌شود که پرسش‌های انجام یافته را قدم به قدم با دانش‌آموزان مطرح نموده و پاسخ بگیریم.

پرسش ۱ : چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟

پاسخ : با توجه به تعریف منشور، این چهار ضلعی مستطیل است و قطر هر مستطیل، آن را به دو مثلث هم‌نهشت و هم مساحت تفکیک می‌کند.

پرسش ۲ : چرا هرم‌های CBED و CBAD دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ : این دو هرم در رأس C مشترک‌اند و قاعده‌های آنها طبق آنچه که در پرسش (۱) دیدیم هم مساحت‌اند، پس ارتفاع آنها برابر است (عمودی که از رأس C بر هر دو قاعده رسم می‌شود) و لذا طبق نتیجهٔ فعالیت قبل، حجم‌های یکسان دارند.

پرسش ۳ : چرا مثلث‌های DEF و ABC هم مساحت‌اند؟

پاسخ : زیرا وجه‌های روبه‌رو (قاعده‌های) منشور هستند و در نتیجه هم‌نهشت و هم مساحت‌اند.

پرسش ۴ : چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ : زیرا قاعده‌های آنها (مثلث‌های DEF و ABC) هم مساحت‌اند و ارتفاع‌های آنها (CF و AD) برابرند.

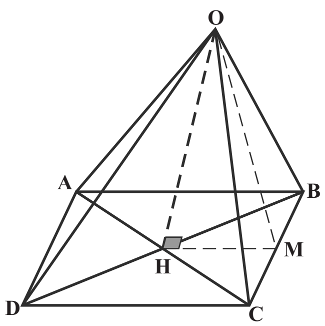
پرسش ۵ : با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

پاسخ : سه هرم مشخص شده در شکل، حجم‌های برابر دارند و در نتیجه حجم هر یک، مساوی یک سوم حجم منشور است. کار در کلاس و فعالیت بعدی نیز به‌کار با دستور حجم هرم اختصاص دارد. در فعالیت (۱) کاربرد قضیهٔ فیثاغورس را در محاسبهٔ ارتفاع هرم منتظم با قاعدهٔ مربع می‌بینیم و از آنجا می‌توانیم حجم هرم را به دست آوریم. همانطور که می‌بینیم مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس OM میانه و ارتفاع این مثلث بوده و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBM داریم : $OB = ۱۰$ و $BM = \frac{BC}{۲} = ۶$ در نتیجه : $OM = \sqrt{OB^۲ - BM^۲} = ۸$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM، HM موازی و نصف AB و در نتیجه مساوی ۶ سانتی‌متر است، پس : $OH = \sqrt{OM^۲ - HM^۲} = \sqrt{۲۸}$ و از آنجا می‌توان حجم هرم را به‌دست آورد. در قسمت دوم، به تعریف مخروط از روی هرم منتظم می‌رسیم و از آنجا دستور محاسبهٔ حجم مخروط را به‌دست می‌آوریم.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۹، که یادآوری از فعالیتی از کتاب ریاضی هشتم می‌باشد، مخروطی را به کمک قطاع می‌سازیم. توصیه می‌شود که این کار را به‌صورت عملی و با استفاده از برش‌هایی از یک دایرهٔ کاغذی، نمایش دهیم. در این صورت بدیهی است که مولد مخروط (پاره‌خطی که از رأس به محیط قاعدهٔ مخروط وصل می‌شود) مساوی شعاع قطاع یعنی ۱۰cm بوده و با توجه به اندازهٔ شعاع قاعده مخروط (۶cm) به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توان ارتفاع مخروط را به‌دست آورد و از آنجا حجم مخروط را محاسبه کرد.

تمرین ۲ شبیه فعالیت صفحهٔ قبل است :

$$BC = ۴ \Rightarrow BM = ۲ \text{ و } OB = OC = ۸$$



$$\Rightarrow OM = \sqrt{OB^۲ - BM^۲} = \sqrt{۶۰}$$

$$HM = \frac{AB}{۲} = ۲$$

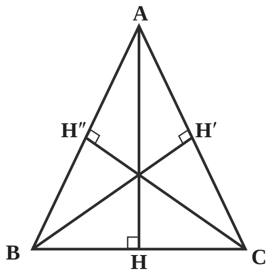
$$OH = \sqrt{OM^۲ - HM^۲} = \sqrt{۵۶} = ۲\sqrt{۱۴}$$

$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times ۲\sqrt{۱۴} = \frac{۳۲\sqrt{۱۴}}{۳}$$

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که به دانش‌آموزان تأکید شود که در هرم‌های چهاروجهی (هرم‌هایی که قاعدهٔ آنها مثلث است) رأس هرم می‌تواند هر یک از چهار رأس باشد و قاعدهٔ هرم نیز متغیر است و با تغییر رأس، تغییر می‌کند. درست مانند مثلث در صفحه که مساحت آن مساوی نصف حاصل‌ضرب هر ضلع (قاعده) در ارتفاع وارد بر آن ضلع است :

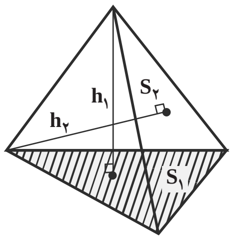
$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}BH'\times AC=\frac{۱}{۲}CH''\times AB$$



در مورد این گونه هرم‌ها نیز داریم :

$$V=\frac{۱}{۳}s_{۱}h_{۱}=\frac{۱}{۳}s_{۲}h_{۲}=$$

$$\frac{۱}{۳}s_{۳}h_{۳}=\frac{۱}{۳}s_{۴}h_{۴}$$



اهداف

ــ توانایی انجام محاسبه در هندسهٔ فضایی (یافتن اندازه‌های پاره‌خط‌های مجهول، مساحت رویه‌ها و حجم‌ها)

ــ یادآوری گستردهٔ شکل‌های فضایی و اندازه‌ها روی آن

ــ توانایی تجسم فضایی و نیز توصیف دوران یافتهٔ شکل‌های مسطح که منجر به ایجاد شکل‌های فضایی شناخته شده می‌شود.

روش تدریس

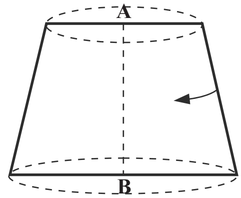
در ابتدای این بخش، فعالیتی مطرح شده که بی‌مقدمه، گستردهٔ شکل‌های فضایی را مطرح کرده و اندازه‌ها را روی آن مشخص می‌کند. دانش‌آموزان باید بتوانند با توجه به اندازه‌های روی شکل فضایی آن اندازه‌ها را در گستردهٔ آن شکل، همانندسازی کرده و از روی آنها مساحت‌ها را اندازه‌گیری کنند. یکی از محاسباتی که در اینجا یادآوری می‌شود، استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برای محاسبهٔ مساحت مثلث‌های متساوی‌الساقین با استفاده از طول‌های ساق و قاعده آنها است.

مانند محاسبهٔ مساحت کل هرمی با قاعدهٔ مربع به ضلع ۴ و وجه‌های جانبی مثلث‌های متساوی‌الساقین با ساق‌های ۸، که با رسم ارتفاع هر مثلث و این واقعیت که ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث‌ها میانه نیز هست، به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول ارتفاع مساوی $\sqrt{۸^۲-۲^۲}=\sqrt{۶۰}$ به‌دست آمده و مساحت هر مثلث متساوی‌الساقین برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\times۴\times\sqrt{۶۰}=۴\sqrt{۱۵}$ و مساحت گستردهٔ هرم برابر است با: $۱۶+۱۶\sqrt{۱۵}$ که همان مساحت کل هرم است. کار در کلاس صفحهٔ بعد نیز همین هدف را تعقیب می‌کند و دستوری برای محاسبهٔ مساحت کل یک هرم منتظم چهاروجهی به‌دست می‌دهد: $S=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\sqrt{۳}a^۲$

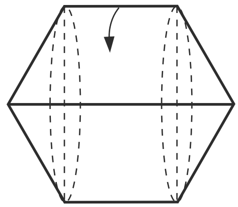
بخش (۲) کار در کلاس هم همین بحث را پی می‌گیرد (محاسبهٔ مساحت جانبی هرمی با قاعدهٔ شش ضلعی منتظم، که مساوی شش برابر مساحت مثلثی متساوی‌الساقین است).

فعالیت صفحهٔ ۱۴۱، به هدف سوم، یعنی دوران شکل‌های هندسی و رابطهٔ آن با شکل‌های فضایی می‌پردازد. دانش‌آموزان باید به این توانایی برسند که بتوانند دوران یافتهٔ شکل‌های مسطح را در فضا تجسم کرده و آنها را رسم کنند. پیشنهاد می‌شود که در کلاس درس این کار به‌صورت عملی و به کمک ورقه‌های مقوایی صُلب و تخت انجام گیرد تا دانش‌آموزان به تصور بهتری دست یابند. به

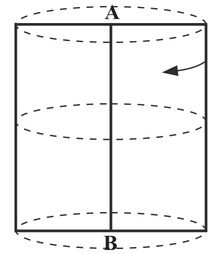
نمونه‌های زیر توجه شود :



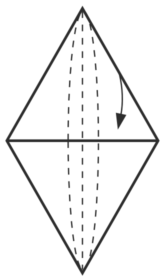
دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ
متساوی‌الساقین حول محور
تقارن AB (مخروط ناقص)



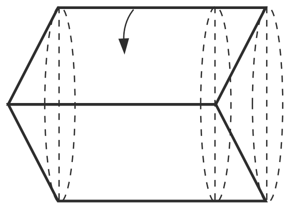
دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ
متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ
بزرگ آن (یک استوانه و دو
مخروط متصل به آن)



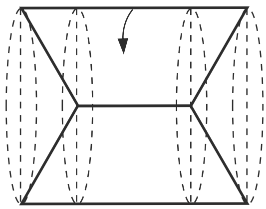
دوران یافتهٔ مستطیل
حول ضلع AB (استوانه)



دوران یافتهٔ مثلث
متساوی‌الاضلاع حول یک
ضلع آن (دو مخروط که
قاعدهٔ مشترک دارند)



دوران یافتهٔ متوازی‌الاضلاع
حول ضلع بزرگ آن (یک استوانه که از یک
طرف یک مخروط از آن حذف شده و از
طرف دیگر مخروط به آن وصل شده است)



دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ
متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ
کوچک (استوانه‌ای که دو
مخروط از آن حذف شده‌اند)

در کار درکلاس صفحهٔ ۱۴۲، دانش‌آموزان می‌توانند با تجربهٔ قبلی خود، تشخیص دهند که از دوران ربع دایره، حول شعاع آن، یک نیم کره ایجاد می‌شود و با داشتن طول شعاع آن، حجم آن را به‌دست آورند.

در فعالیت بعدی (در سه قسمت) تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم فضایی دانش‌آموزان است. در قسمت اول و دوم، تجسم نگاه فضایی به یک شکل و تصویری که در ذهن از آن (از سمت و سوهای مختلف) ایجاد می‌شود مدّ نظر است. در قسمت سوم و چهارم تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم نسبت به مقطع‌های حاصل از برش شکل‌های فضایی است. کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۲

نیز همین موضوع را دنبال می‌کند. پیشنهاد می‌شود که این فعالیت نیز به‌صورت عملی در کلاس درس اجرا شود و دانش‌آموزان با استفاده از اشیاء مناسب و قابل برش در کلاس یا منزل آن را انجام دهند و تجربه کنند.

در تمرین ۱ نسبت حجم به سطح در مورد این چهار شکل به ترتیب برابر است با :

۱) مکعب به ضلع a : $\frac{V}{S}=\frac{a^۳}{۶a^۲}=\frac{۱}{۶}a$

۲) کره به شعاع a : $\frac{V}{S}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{۱}{۳}a$

۳) استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع a : $\frac{V}{S}=\frac{\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{۱}{۴}a$

۴) استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a : $\frac{V}{S}=\frac{\frac{\pi a^۳}{۴}}{\frac{۳\pi a^۲}{۲}}=\frac{۱}{۶}a$

و چنانچه دیده می‌شود در مورد کره، این نسبت از همهٔ موارد دیگر، بزرگ‌تر است. این نسبت بیانگر آن است که به لحاظ اقتصادی، ساختن شکل‌ها به شکل کره به صرفه‌تر است، یعنی در میان اشکال هندسی با مساحت برابر، حجم کره بیشتر است، زیرا توزیع حجم آن در سطح واحد، بیشتر است.

هدف از تمرین ۲، ایجاد یک شهود ابتدایی نسبت به شکلی فضایی است که از یک ورقهٔ مسطح ساخته می‌شود و در سال‌های بالاتر مسائلی از آن مطرح می‌شود. برای آنکه ۴ کره در این جعبهٔ در باز جا شوند، باید داشته باشیم : $a-۲x=۴x$ و در نتیجه : $a=۶x$

لازم به ذکر است که البته کره‌ها از بالا، از جعبه بیرون می‌مانند و نصف آنها داخل جعبه قرار می‌گیرد.

حل تمرین‌های فصل ۸

تمرین

۱ــ قطر تقریبی کرهٔ زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

الف) قطر $= ۱/۲۸ \times ۱۰^{۴}$

شعاع $= ۶/۴ \times ۱۰^{۳}$

ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.

ب) قطر $= ۱/۲۸ \times ۱۰^{۷}$

شعاع $= ۶/۴ \times ۱۰^{۶}$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

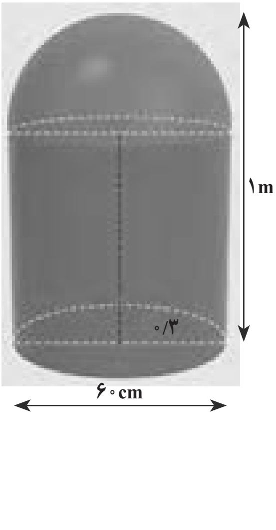
ج) $S = ۴\pi R^{۳}$

$$S = ۴\pi\,(۶/۴ \times ۱۰^{۳})^{۲} = ۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{km}^{۲}$$

$$S = ۴\pi\,(۶/۴ \times ۱۰^{۶})^{۲} = ۵/۱۴۵ \times ۱۰^{۱۴}\,\mathrm{m}^{۲}$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱٬۶۴۸٬۰۰۰ کیلومترمربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

د) $\dfrac{۱/۶۴۸ \times ۱۰^{۶}}{۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}} \approx ٪۱$



۲ــ یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم‌کره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به‌دست آورید.

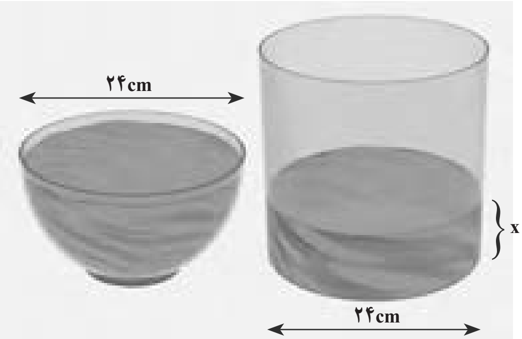
اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به‌شرط اینکه رنگ‌آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

$$V = ۰/۳^{۲} \times \pi \times ۰/۷ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \pi \times ۰/۳^{۳}$$

$$= ۰/۰۶\pi + ۰/۰۱۸\pi = ۰/۰۷۸\pi \simeq ۰/۲۴m^{۳}$$

$$S = ۰/۳^{۲} \times \pi + ۰/۶ \times \pi \times ۰/۷ + \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \pi \times ۰/۳^{۲} = ۰/۰۹\pi + ۰/۴۲\pi + ۰/۱۸ = ۲/۱۷m^{۲}$$

رنگ لازم $= ۲/۱۷ \times ۰/۱ = ۰/۲۱۷kg$



۳ــ پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر دهانه **۲۴** سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

حجم نیم‌کره $= \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۱۲^{۳} = ۱۱۵۲\pi$

حجم آب درون استوانه $= ۱۲^{۲} \times \pi \times x$

$$۱۱۵۲\pi = ۱۲^{۲} \times \pi \times x$$

ارتفاع آب درون استوانه $x = \frac{۱۱۵۲\cancel{\pi}}{۱۴۴\cancel{\pi}} = ۸cm$

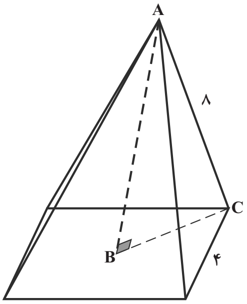
تمرین

۱ــ حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مستطیلی به ابعاد **۶** و **۵** سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳} \times ۵ \times ۶ \times ۱۰ = ۱۰۰\,cm^{۳}$$

۲ــ حجم هرمی با قاعدهٔ مربع را به‌دست آورید که ضلع قاعدهٔ آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی

آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

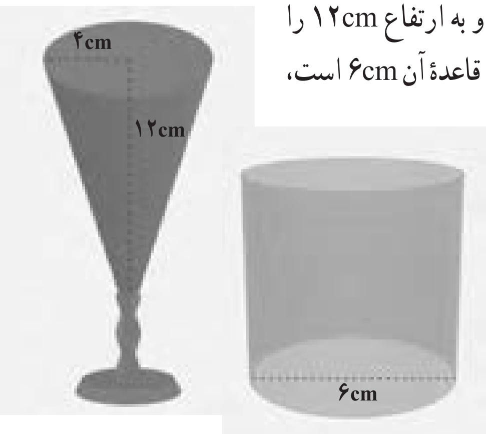


قطر قاعده به کمک رابطه فیثاغورث برابر $۴\sqrt{۲}$ است.

پس $BC = ۲\sqrt{۲}$ $\qquad AB^۲ = AC^۲ - BC^۲$

$AB = \sqrt{۵۶}$ $\qquad AB^۲ = ۸^۲ - (۲\sqrt{۲})^۲ = ۶۴ - ۸ = ۵۶$

$$V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times \sqrt{۵۶} = \frac{۱۶}{۳}\sqrt{۵۶} = \frac{۳۲\sqrt{۱۴}}{۳}$$



۳ــ ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانهٔ ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعدهٔ آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

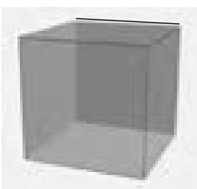
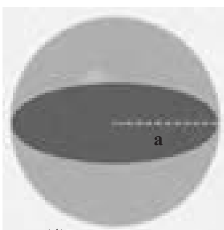
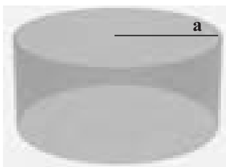
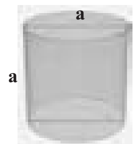
حجم آب درون استوانه = حجم آب مخروط

$$\frac{۱}{۳}\cancel{\pi} \times ۴^۲ \times ۱۲ = \cancel{\pi} \times ۳^۲ \times h$$

$$h = \frac{۶۴}{۹}$$

تمرین

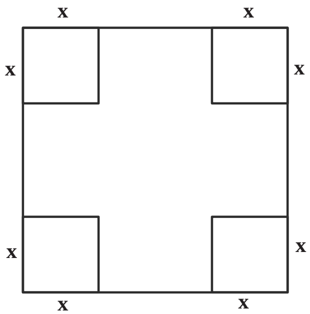
۱ــ حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

مکعب به ضلع a	کره به شعاع a	استوانه به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ a	استوانه به ارتفاع و قطر قاعدهٔ a
			
$V=a^۳$	$V = \frac{۳}{۴}\pi a^۳$	$V = \pi a^۳$	$V = \pi(\frac{a}{۲})^۲ a = \frac{\pi a^۳}{۴}$
$S= ۶a^۲$	$S= ۴\pi a^۲$	$S= ۲\pi a^۲+۲\pi a^۲$	$S = ۲(\frac{a}{۲})^۲ \pi + a^۲$
		$=۴\pi a^۲$	$= \frac{۳a^۲\pi}{}$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به‌دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

$\frac{v}{s}=\frac{a}{۶}$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{۳}$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{۴}$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{۶}$

۲ــ از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.



$۴x = a - ۲x$

$a = ۶x$

$x = \frac{a}{۶}$