

$$f(x-2) = 2(x-2) + 2 = 2x - 1$$

$$f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{2} = \frac{x}{4} - \frac{2}{2}$$



- الف) $f(x) = x^2$ $D_f = \mathbb{Z}$
 ب) $g(x) = -x$ $D_g = \mathbb{R}$
 پ) $h(x) = \sqrt{x}$ $D_h = \mathbb{N}$
 ت) $t(x) = 2\sqrt{x}$ $D_t = \{-1, 0, 1, 8\}$

پاسخ کتاب کار و تمرین

مجموعه تمرینات

الف) -1

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, 4 \leq x < 8\}$$



$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 6\}$$



ب

$$A \cup B = (-2, 8) \quad A \cap B = [4, 6)$$

پ) مجموعه AUB شامل اعداد صحیح -1, 0, 1, ..., 7 می باشد. (تعداد 9 عدد)



$$f(10) = 200 \Rightarrow (10, 200) \in f$$

$$f(15) = 4000 \Rightarrow (15, 4000) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{4000-200}{15-10} = 760$$

$$\text{خط معادله } y - 200 = 760(x - 10) \Rightarrow y = 760x - 7400$$

$$f(x) = 760x - 7400$$



$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2, 0) \in f$$

$$f^{-1}(3) = 4 \Rightarrow (3, 4) \in f^{-1} \Rightarrow (4, 3) \in f$$

$$f \text{ ضابطه تابع خطی: } y - 0 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2, 0) \in f \Rightarrow (0, -2) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(3) = 4 \Rightarrow (3, 4) \in f^{-1}$$

$$f^{-1} \text{ ضابطه: } y - 4 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2$$

● -٤

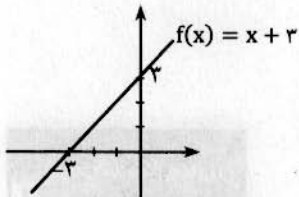
$$\begin{aligned} (50, 27000) \in f \\ (100, 38000) \in f \rightarrow \text{شیب خط} = \frac{38000 - 27000}{100 - 50} = 2200 \end{aligned}$$

$$\text{خط معادله: } y - 27000 = 2200(x - 50) \Rightarrow y = 2200x + 16000$$

$$f(x) = 2200x + 16000$$

$$f(80) = 2200(80) + 16000 = 336000 \text{ تومان}$$

● -٥



$$f(2) = 5$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2 + 2) = 2 + f(2) \Rightarrow f(f) = 2 + 5 = 7$$

$$\begin{aligned} (2, 5) \in f \\ (f, 7) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{7-5}{f-2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{خط معادله } y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3 \Rightarrow f(x) = x + 3$$

● -٦

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 3 \\ f^{-1}(3) &= 2 \\ f(0) &= -1 \\ f^{-1}(0) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(2)+f^{-1}(3)}{f(0)+f^{-1}(0)} = \frac{3+2}{-1+4} = \frac{5}{3}$$

● -٧

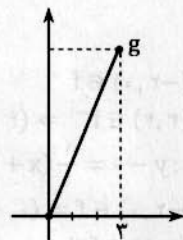
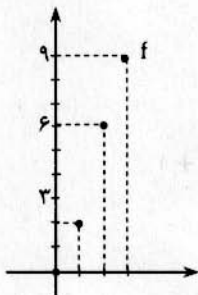
$$\text{الف) } f(x+2) - f(x) = 2(x+2) + 1 - (2x+1) = 4$$

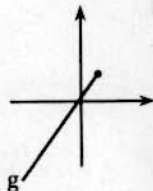
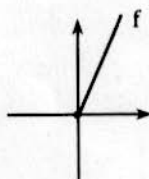
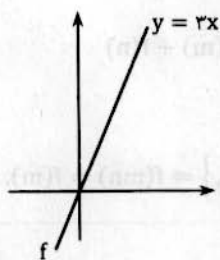
$$\text{ب) } f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = x + 1$$

$$\text{پ) } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2(x+h) + 1 - (2x+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

$$\text{ت) } \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{2x+1-5}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

● الف -٨





(ب)

(پ)

در این تمرین دانش آموز متوجه اهمیت دامنه تابع خواهد شد. در تمامی موارد ضابطه یکسان بود ولی با تغییر دامنه، نمودار تغییر پیدا می کند. می توانید یکی از سه قسمت فوق را به دلخواه خود برای دانش آموزان حل کنید.



پادشاه پژوهگار

شما هم تجربه خود را در سایت مرات www.meraat.ir بخش صندوق تجربیات به اشتراک بگذارید

-۹

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(x) &= 3 - ax \\ f(1) &= 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = 3 - a(5) \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$f^{-1}(x) = 3 - \frac{2}{5}x$$

یک نقطه دلخواه روی تابع f^{-1} در نظر می گیریم.

$$x = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 3 \Rightarrow (0, 3) \in f^{-1} \Rightarrow (3, 0) \in f$$

$$f(1) = 5 \Rightarrow (1, 5) \in f$$

$$f \text{ معادله تابع: } y - 0 = \frac{5}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$$

$$f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$$

-۱۰

الف) $D_f = [-2, 6]$, $R_f = [0, 2]$

ب) $D_g = (0, +\infty)$, $R_g = (-1, +\infty)$

۱۱- الف

$$\left. \begin{aligned} f(m+n) &= a(m+n) + b = am + an + b \\ f(m) + f(n) &= am + b + an + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(m+n) \neq f(m) + f(n)$$

(ب)

$$\left. \begin{aligned} f(mn) &= a(mn) + b = amn + b \\ f(m) \times f(n) &= (am + b)(an + b) = a^2mn + abm + abn + b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(mn) \neq f(m) \cdot f(n)$$

۱۲- الف

علی: $A = [۸, ۱۶]$

رضا: $B = [۷, ۱۴]$

$A \cap B = [۸, ۱۴]$

$A - B = [۸, ۱۶] - [۷, ۱۴] = (۱۴, ۱۶]$

$(A - B) \cup (B - A) = (۱۴, ۱۶] \cup [۷, ۸)$

■ ویژه دانش آموزان علاقه مند

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

۲- هر خط به موازات محور xها که از نقطه $A(-۲, ۴)$ بگذرد نمودار تابع خطی است که یک به یک نمی باشد از

آن جا که فقط یک خط از نقطه A به موازات محور xها می توان رسم کرد پس تنها یک تابع خطی می توان ساخت با

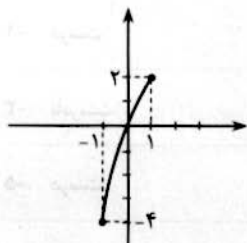
ضابطه $f(x) = ۴$

۳- تابع g عدد a را می گیرد و (-۷) تحویل می دهد، پس:

$$g(a) = -۷ \Rightarrow ۴a - ۳ = -۷ \Rightarrow ۴a = -۴ \Rightarrow a = -۱$$

تابع f عدد (-۷) را گرفته و b را تحویل می دهد، پس:

$$f(-۷) = b \Rightarrow ۲(-۷) + ۱ = b \Rightarrow b = -۱۳$$



$$\frac{g(x^2+2x+2)}{f(\sqrt{x})} = \frac{g((x+1)^2+1)}{f(\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}-1}{(\sqrt{x})^2+1} = \frac{|x+1|}{x+1}$$

چون $x \geq 1$ پس عبارت $(x+1)$ مقداری مثبت است و داریم:

$$\frac{x+1}{x+1} = 1$$

۶ - برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس از روی ضابطه تابع، کافی است ضابطه تابع f را بر حسب x (بر حسب y) به دست آوریم و نقش x و y را عوض کنیم.

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$



یادداشتی بر روی همکار

می‌توانیم دو نقطه دلخواه $(0, b)$ و $(1, a+b)$ را روی تابع f در نظر بگیریم و با استفاده از نقاط متناظر در f ، ضابطه تابع خطی f^{-1} را به دست آوریم.

شما هم تجربه خود را در سایت مرات www.meraat.ir بخش صندوق تجربیات به اشتراک بگذارید

$$f(x) + f^{-1}(x) = x \Rightarrow ax + b + \frac{x-b}{a} = x$$

$$ax + \frac{1}{a}x - x = \frac{b}{a} - b \Rightarrow x(a + \frac{1}{a} - 1) = b(\frac{1}{a} - 1)$$

چون رابطه به ازای هر مقدار x باید برقرار و سپس تنها در یک صورت ممکن است که $\Delta < 0$ امکان ندارد:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ امکان ندارد} \\ b(\frac{1}{a} - 1) = 0 \end{cases}$$

چون به ازای هیچ a این رابطه امکان ندارد پس تابع خطی مانند f نمی‌تواند وجود داشته باشد که $f(x) + f^{-1}(x) = x$

$$f(x) = x^{1389}(x^2 - 4x + 1) - 2 = x^{1389}((x-2)^2 - 3) - 2$$

$$2 + \sqrt{3} = x \Rightarrow x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow (x-2)^2 - 3 = 0$$

$$f(2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^{1389} \cdot 0 - 2 = -2$$

دوره سریع مطالب ■

۱- درست ۲- نادرست

۳- نادرست ۴- نادرست

۵- درست ۶- نادرست

۷- {۴} ۸- ۵

۹- $m = -13$ ۱۰- $(10, +\infty)$

۱۱- درست ۱۲- نادرست

آزمون چهارگزینه‌ای ■

۱- گزینه «۱»

$$f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1) \in f \Rightarrow (-1, 0) \in f^{-1}$$

$$(4, 1) \in f^{-1}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{1-0}{4+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{معادله خط: } y - 0 = \frac{1}{5}(x + 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \Rightarrow f^{-1}(9) = 2$$

۲- گزینه «۳»

$$f^{-1}(2) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, 2) \in f \Rightarrow 2 = 6m + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

۳- گزینه «۲» دو نقطه از تابع معکوس می‌یابیم.

$$f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2) \in f \Rightarrow (-2, 0) \in f^{-1}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow (1, \frac{1}{2}) \in f \Rightarrow (\frac{1}{2}, 1) \in f^{-1} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y - 0 = \frac{2}{5}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$$

۴- گزینه «۴»

$$\frac{rf(r) - g^{-1}(r)}{g(0) + f^{-1}(r)} = \frac{r(-1) - (1)}{(1) + 1} = \frac{-2}{2}$$

گزینه «۱» -۵

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1 - 1)^2 = 2$$

گزینه «۳» -۶ هر ساعت ۶۰ دقیقه است، بنابراین $f(t) = 60 \cdot (100t) = 6000t$

گزینه «۱» -۷

$$\left. \begin{aligned} f(ab) &= \Delta(ab) \\ f(a) \cdot f(b) &= \Delta a \cdot \Delta b = 2\Delta ab \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(ab) \neq f(a) \cdot f(b)$$

سایر گزینه‌ها برقرارند و می‌توان نشان داد که عبارات طرفین با هم مساوی هستند.

گزینه «۳» -۸

$$g(-1) = 1 \Rightarrow f(g(-1)) = f(1) = 1$$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow g(f(4)) = g(2) = 4$$

$$\frac{f(g(-1))}{g(f(4))} = \frac{1}{4}$$

گزینه «۱» -۹

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow f(3) + 3f(-3) = 19 \\ x = -3 \Rightarrow f(-3) - 3f(3) = 19 \end{cases}$$

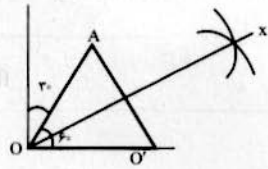
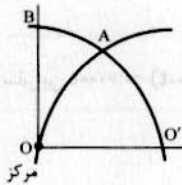
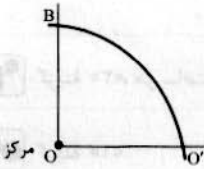
$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \left. \begin{aligned} f(3) + 3f(-3) &= 19 \\ -3f(-3) + 9f(3) &= -57 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \cdot f(3) = -38 \Rightarrow f(3) = -38$$

گزینه «۲» -۱۰

$$f(1) = 0 \Rightarrow f(f(1)) = f(0) = -1$$

پاسخ ایستگاه فکر

دهانه پرگار را به یک مقدار دلخواه باز می‌کنیم ولی این مقدار را تا آخر کار تغییر نمی‌دهیم. حالا مراحل کار را مشاهده می‌کنیم:



ابتدا به مرکز O یک ربع دایره رسم کردیم تا O' و B بدست آید. سپس به مرکز O' یک دایره می‌زنیم تا A حاصل شود. $\triangle OAA'$ متساوی‌الاضلاع است. پس $\angle AOO' = \angle BOA = 60^\circ$ هستند. با رسم نیمساز AOO' زاویه 90° به 3 تا زاویه مساوی تقسیم شده است.