آزمون ریاضی نیم‌ترم ۳ دوم : (رشته ریاضی)

۱- ابتدا تابع را به صورت $y^3+y=1-2x$ می‌نویسیم

$x_1=x_2 \longrightarrow 2x_1=2x_2 \longrightarrow 1-2x_1=1-2x_2 \longrightarrow y_1^3+y_1=y_2^3+y_2$

$\longrightarrow y_1^3-y_2^3+y_1-y_2=0 \longrightarrow (y_1-y_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+1)=0$

$\longrightarrow (y_1-y_2)(\frac{1}{4}y_1^2+\frac{3}{4}y_1^2+y_2^2+y_1y_2+1)=0 \longrightarrow (y_1-y_2)((\frac{1}{2}y_1+y_2)^2+\frac{3}{4}y_1^2+1)$

$=0 \longrightarrow$ می‌دانیم عبارت $((\frac{1}{2}y_1+y_2)^2+\frac{3}{4}y_1^2+1)$ همیشه بزرگتر مساوی "۱" است.

$\longrightarrow y_1=y_2$ ✓

۲- الف) $f(x)=x$

ب) از آنجایی که به تابع عدد ۲ دارد اضافه می‌شود می‌فهمیم تابع ما تابع لگاریتم است.

$\longrightarrow \log_a(2x)=\log_a(x)+2 \longrightarrow 2=\log_{\sqrt{2}}2$

پس $a=\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$\longrightarrow \log_{\sqrt{2}}(2x)=\log_{\sqrt{2}}(x)+\log_{\sqrt{2}}(2)$

$\longrightarrow \log_{\sqrt{2}}(2x)=\log_{\sqrt{2}}(2x)$ ✓

۳- ۱) $\log_{3x}3=\log_{x^2}3 \longrightarrow 3x=x^2 \longrightarrow x^2-3x=0 \longrightarrow \frac{3\pm\sqrt{9+0}}{2}=x$

$\longrightarrow x=0$ ✗ یا $\boxed{x=3}$ ✓

۲) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1 \longrightarrow \frac{1+\log x+10-2\log x}{5+5\log x-\log x-(\log x)^2}=1$

$\longrightarrow 11-\log x=5+4\log x-(\log x)^2 \longrightarrow (\log x)^2-5\log x+6=0$

$\longrightarrow \log x=t \longrightarrow t^2-5t+6=0 \longrightarrow \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=t=3,2$

$\longrightarrow \log x=2 \longrightarrow x=100$ و $\log x=3 \longrightarrow x=1000$

۴- عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم.

$\sin(\pi+\frac{\pi}{9})+2\sin(\pi-\frac{\pi}{9})-\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9})+3\sin(2\pi-\frac{\pi}{9})-4\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9})$

$=-\sin(\frac{\pi}{9})+2\sin(\frac{\pi}{9})-\sin(\frac{\pi}{9})-3\sin(\frac{\pi}{9})+4\sin(\frac{\pi}{9})=\sin(\frac{\pi}{9})$

شرح جواب: ابتدا تمام عبارات را به صورت سینوس نوشته با استفاده از رابطهٔ $\cos(\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$
بعد هم جواب بدست آمد!!!؟ ☺

$$-\frac{2}{3}\cos(1-3x) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-1+3x\right) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi-1+3x\right)$$ ۵-

$$=\frac{2}{3}\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}+x\right) \longrightarrow \frac{2}{3}\sin 3\left(x-\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\longrightarrow \alpha=\frac{2}{3},\ k=3,\ \beta=\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\sin(2x)+3\cos(2x)\right)\times\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \left(\frac{\sin(2x)}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{9}\cos(2x)}{\sqrt{10}}\right)\times\sqrt{10}$$ ۶-

$$=\sin(2x+\alpha)\times\sqrt{10} \xrightarrow{max} =1\times\sqrt{10}$$

$$3\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$ ۷-

از اتحادهای (سینوس و کسینوس) استفاده می‌کنیم.

$$3\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin(\pi-3x) = 3\sin(3x)\times\frac{\sqrt2}{2}-3\cos(3x)\frac{\sqrt2}{2}-0\times\cos(3x)$$

$$+\sin(3x)\times(-1) = \sin(3x)\underbrace{\left(\frac{3\sqrt2}{2}-1\right)}_{\cos(\alpha)}+\cos(3x)\underbrace{\left(\frac{-3\sqrt2}{2}\right)}_{\sin(\alpha)}$$

$$\longrightarrow \sin(3x+\alpha)=\sin \underbrace{3}_{k}\left(x+\frac{\alpha}{3}\right) \longrightarrow \text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{3}$$

۸- صورت و مخرج کسر سمت راست را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم

$$\tan x+\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}} = \tan x+\frac{2\tan x+1}{\tan x+1} = k = \frac{\tan^2 x+\tan x+2\tan x+1}{\tan x+1}$$

$$=\frac{\tan^2 x+3\tan x+1}{\tan x+1} \longrightarrow \tan x = t \longrightarrow \frac{t^2+3t+1}{t+1}=k$$

حال عبارت را تعیین علامت می‌کنیم عبارت صورت ریشه ندارد و عبارت مخرج نیز در ازای $t=-1$ تعریف نشده می‌شود برای همین k به ازای $\mathbb{R}-(-1)$ جواب دارد.