

بسم الله الرحمن الرحيم

سوالات المپیاد ملی هند

سال های ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۷

تهیه و تنظیم : امیرحسین ذوالفقاری

۱- چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است نقاط E, F نقاطی روی AB, CD هستند بطوریکه قرینه A نسبت به خط EF روی ضلع BC قرار می گیرد. (غیر از نقاط B, C). فرض کنید A', D' به ترتیب قرینه نقاط A, D نسبت به خط EF باشند. اگر $A'D'$ ضلع CD را در نقطه G قطع کند، ثابت کنید شعاع دایره محاطی مثلث AGC' برابر است با مجموع شعاع دایره محیطی مثلث های $A'BE$ و GFD' .

۲- فرض کنید n یک عدد حقیقی نامنفی باشد بطوریکه همه ریشه های چندجمله ای $x^3 + \alpha x + 4 = 2 \times 2016^n$ صحیح باشند. تمامی مقادیر ممکن برای α را بیابید.

۳- تعداد سه تایی (x, a, b) را بیابید بطوریکه x یک عدد حقیقی باشد و $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ و $x^2 - a\{x\} + b = 0$ که منظور از $\{x\}$ جزء اعشاری عدد است.

۴- فرض کنید $ABCDE$ یک پنج ضلعی باشد به نحوی که $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120^\circ$ و همچنین طول اضلاع آن پنج عدد صحیح متوالی هستند. تمام مقادیر ممکن برای $AB + BC + CD$ را بیابید.

۵- فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه به راس قائمه A باشد ($AC > AB$) فرض کنید ارتفاع وارد بر وتر مثلث باشد و نقاط P, Q, I به ترتیب مراکز دایره محاطی مثلث های ABD, ACD, ABC باشند. ثابت کنید AI عمود بر PQ و برابر با آن است.

۶- فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد.

$$x = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

ثابت کنید $1, 2x, 2x - 1$ اضلاع مثلثی هستند که مساحت و شعاع دایره محاطی آن هردو صحیح اند.

سال ۲۰۱۶

۱- مثلث ABC یک مثلث متساوی الساقین در راس A می باشد. فرض کنید مرکز ارتفاعی مثلث روی دایره محاطی مثلث قرار گرفته باشد. مقدار $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۲- فرض کنید a, b, c سه عدد حقیقی و مثبت باشند. کدام دسته از معادلات زیر $a = b = c$ را نتیجه می دهد؟

$$a(b^3 + c^3) = b(c^3 + a^3) = c(a^3 + b^3) \quad (\text{الف})$$

$$a(a^3 + b^3) = b(b^3 + c^3) = c(c^3 + a^3) \quad (\text{ب})$$

۳- تابع $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ بدین گونه تعریف می شود:

$$T(2k) = k, T(2k+1) = 2k+2$$

الف) ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، یک k طبیعی وجود دارد که $T^k(n) = 1$
ب) برای هر عدد طبیعی k ، فرض کنید c_k تعداد n هایی باشد که $T^k(n) = 1$. ثابت کنید:

$$c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$$

۴- فرض کنید ۲۰۱۶ نقطه از محیط دایره را به رنگ قرمز و باقیمانده را آبی رنگ می کنیم. ثابت کنید به ازای هر $n > 2$ ، می توان n ضلعی یافت که همه نقاط آن روی دایره باشند و آبی رنگ نیز باشند.

۵- فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه به راس B باشد. فرض کنید نقطه D روی پاره خط AC باشد بطوری که شعاع دایره محاطی مثلث های DAC و BAD برابر باشند. اگر این شعاع برابر با r' و شعاع

$$\text{دایره محاطی مثلث } ABC \text{ باشد ثابت کنید } \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{BD}$$

۶- فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ یک دنباله حسابی ناآب و صعودی باشند. فرض کنید دو عدد طبیعی و بزرگ از یک و نسبت به هم اول p, q وجود داشته باشند به طوری که a_1^q و a_{p+1}^q و a_{q+1}^p نیز اعضای از همان دنباله a_i هستند. ثابت کنید قدرنسبت دنباله a_i صحیح است.

۱- فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه به راس قائمه B باشد. فرض کنید BD ارتفاع وارد بر وتر باشد و نقاط P, Q, I به ترتیب مرکز دایره محاطی های مثلث های ABD, BDC, ABC باشند. ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث PIQ روی وتر AC قرار دارد.

۲- بسط اعشاری و دوره گردش اعداد به فرم $\frac{1}{n}$ که در آن n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک است را می نویسیم. (به عنوان مثال $\frac{1}{4} = 0.25$ است و برابر با 0.5 نیست). طول قسمت غیر متناوب این بسط را بیابید. (به عنوان مثال برای حالت $n = 12$ این طول برابر با ۲ می باشد)

۳- تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید بطوریکه $f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y)$

۴- چهار بسکتبالیست به نام های A, B, C, D داریم و در ابتدا توپ در اختیار فرد A است. در هر مرحله توپ از فردی به فرد دیگری منتقل می شود. به چند طریق ممکن است توپ پس از هفت مرحله مجدداً به نفر A بازگردانده شود. مثلاً در زیر مثالی ارائه شده:

$$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

۵- فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدب باشد بطوریکه اقطار آن در نقطه P متقاطع باشند. فرض کنید PE, PF, PG, PH ارتفاع های رسم شده از نقطه P بر خطوط AB, BC, CD, DA باشند. ثابت کنید $ABCD$ محیطی است اگر و فقط اگر

$$\frac{1}{PE} + \frac{1}{PG} = \frac{1}{PF} + \frac{1}{PH}$$

۶- ثابت کنید از میان ۱۱ مربع کامل، می توان شش مربع کامل مثل $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ انتخاب نمود به طوری که

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv d^2 + e^2 + f^2 \pmod{12}$$