حل سوال سه امتحان اخترفیزیک :

الف) برای یک گاز کامل داریم :

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$PV = N k_B T \rightarrow P = \frac{N k_B T}{V} = \frac{N\bar{m}}{V}\frac{k_B T}{\bar{m}} = \frac{\rho k_B T}{\bar{m}}$$

در نتیجه :

$$U = \frac{3}{2} PV \Rightarrow \frac{U}{\bar{m}} = \frac{3}{2}\ P \frac{V}{\bar{m}}$$

با توجه به تعریف :

$$u = \frac{U}{\bar{m}} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{\rho}$$

در حالتی که گازی بی دررو با نمایه پلی تروپیک γ داریم ، می دانیم :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

$$u = n\ \frac{P}{\rho}$$

در نتیجه :

$$n = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\gamma = \frac{5}{3}}$$

ب) با مشتق گیری از معادله حالت گاز کامل داریم :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{k_B T}{\bar{m}}\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho k_B}{\bar{m}}\frac{dT}{dr} = \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T}\frac{dT}{dr}$$

با مشتق گیری از معادله حالت گاز بی دررو نیز داریم :

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr} = \gamma\frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr} \rightarrow \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}\frac{dP}{dr}$$

با جاگذاری عبارت بدست آمده در رابطه اول :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho}\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}\frac{dP}{dr} + \frac{P}{T}\frac{dT}{dr} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{dr} + \frac{\rho k_B}{\bar{m}}\frac{dT}{dr}$$

از رابطه تعادل هیدرواستاتیک داریم :

$$\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{dr} = \frac{\rho k_B}{\bar{m}}\frac{dT}{dr} \rightarrow \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{Gm\rho}{r^2}\right) = \frac{\rho k_B}{\bar{m}}\frac{dT}{dr}$$

در نتیجه :

$$\frac{dT}{dr} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\bar{m}}{k_B}\left(-\frac{Gm}{r^2}\right)$$

برای گاز کامل ($\gamma = \frac{5}{3}$) داریم :

$$\frac{dT}{dr} = \left(1-\frac{3}{5}\right)\frac{\bar{m}}{k_B}\left(-\frac{Gm}{r^2}\right) = -\frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{Gm(r)}{r^2}$$

ج) با فرض چگالی ثابت :

$$m(r) = M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3 = -\frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{R^3}r$$

در نتیجه با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم :

$$\int_{T(r)}^{T_{Surface}} dT = -\frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{R^3}\int_r^R r\,dr$$

$$\rightarrow T_{Surface} - T(r) = -\frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{R^3}(R^2 - r^2)$$

$$\boxed{T(r) = \left[T_{Surface} + \frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{R}\right] - \frac{2}{5}\frac{\bar{m}}{k_B}\frac{GM}{R^3}r^2}$$

$$T(r) = A - Br^2$$

د) برای خورشید و با استفاده از مقادیر عددی داریم :

$$w = \lambda_{max} . T_{Surface} \Rightarrow T_{Surface} = 5796\ k$$

برای مرکز خورشید $r = 0$:

$$T_{center} = \left[T_{Surface} + \frac{2}{5} \frac{\bar{m}}{k_B} \frac{GM}{R} \right] \Rightarrow T_{center} = 9.25 \times 10^6 \approx 10^7\ kelvin$$

جالب است بدانید که دمای واقعی مرکز خورشید 1.57×10^7 کلوین است و در واقع مدل ما تا حد بسیار خوبی رفتار خورشید را توجیه می کند !