

به نام خداوند جان و خرد

آزمون تئوری سوم

دپارتمان ریاضی و کامپیوتر مشهد

mathdpt.blog.ir

وقت آزمون: 300 دقیقه

نکات آزمون : هر گونه رابطه ای دو طرفه میباشد مگر برعکس آن در سوال اعلام شده باشد.

هر گرافی ساده و لبیل دار میباشد و دارای متناهی راس است.

سوالت به سبک مرحله دو تصحیح میشود در نوشتن خود دقت کنید.

سوال اول : باز هم مرتب سازی 20 امتیاز

n کارت بر روی یک خط داریم که بر روی هر کدام عددی نوشته شده است (ما اعداد را می بینیم). در هر مرحله تعدادی جفت دلخواه از کارت ها رو انتخاب کرده بصورتی که هر کارت حداکثر در یک جفت آمده باشد و کارت های هر جفت را جابجا می کنیم (لزومی ندارد کارت های جفت ها متوالی باشد). حداقل تعداد مراحل را به ازای هر n بگویید بصورتی که هر حالتی از این n کارت را بتوان با آن تعداد مرحله مرتب کرد (تعداد جابجایی ها مهم نیست).

سوال دوم : علم یعنی گراف 20 امتیاز

به ازای هر راس مانند v در یک تورنمنت n راسی قویا همبند و هر عددی مانند k ($2 < k \leq n$) ثابت کنید دوری به طول k وجود دارد که راس v در آن قرار دارد .

سوال سوم : جدول شکستی 30 امتیاز

جدولی $m \times n$ که از mn خانه واحد به رنگ سفید تشکیل شده داریم. در ابتدا خانه ی پایین چپ آن را سیاه می کنیم . بعد از آن در هر مرحله یک خانه ی سیاه را (به دلخواه خودتان) انتخاب کرده و آن را حذف می کنیم. سپس هر خانه ای که با آن در یک یال اشتراک دارد را تغییر رنگ می دهیم (یعنی اگر سیاه بود آن را سفید و اگر سفید بود آن را سیاه می کنیم). به ازای چه m و n هایی می توان پس از چند بار انجام عملیات بالا تمام خانه های جدول را حذف کرد؟

سوال چهارم : فقط 2 هفته مونده 30 امتیاز

مجموعه $M = \{0, 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر مجموعه n عضوی A که زیر مجموعه M است ثابت کنید مجموعه ای n عضوی مانند B (که زیر مجموعه M است) وجود دارد که اگر مجموعه C به صورت

$$C = \{(a+b) \bmod n^2 \mid a \in A, b \in B\}$$

تعریف شود آنگاه :

$$|C| \geq n^2/2$$