به نام خدا

ترکیبات

جلسه سوم

۱۳۸۹/۴/۲۸

سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi۸@gmail.com

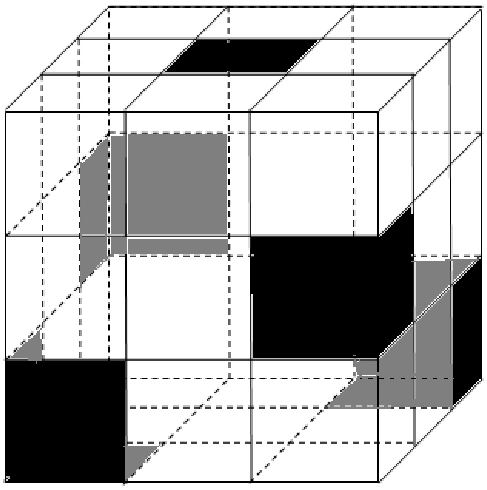
مکعب به ضلع n را به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده ایم. چند مکعب کوچک را انتخاب و از مرکز هر کدام از آن ها، سه خط راست موازی با سه یال مکعب رسم می کنیم. دست کم چند مکعب کوچک را باید انتخاب کرد تا این خط های راست، همه مکعب های کوچک را خط بزنند.

- برای $n = ۲$ پاسخ را پیدا کنید.

مکعب ۲ × ۲ × ۲ شامل ۸ مکعب کوچک است و با انتخاب یک مکعب کوچک دلخواه ۴ مکعب کوچک خط می خورند. پس لااقل به $\frac{۸}{۴} = ۲$ مکعب کوچک احتیاج داریم. با علامت زدن ۲ مکعب قطری به راحتی می توان دید تمام مکعب ها خط می خورند.

- برای $n = ۳$ پاسخ را پیدا کنید.

مکعب ۳ × ۳ × ۳ دارای ۲۷ مکعب واحد است. با انتخاب یک مکعب کوچک، ۷ مکعب خط می خورند. (به طور کلی در مکعب $n \times n \times n$، انتخاب یک مکعب $۲n - ۱$ را خط می زند) پس حداقل به $\left\lceil \frac{۲۷}{۷} \right\rceil = ۴$ مکعب نیاز داریم. از طرفی می توان نشان داد با علامت زدن ۵ مکعب می توان تمام مکعب ها را خط زد.

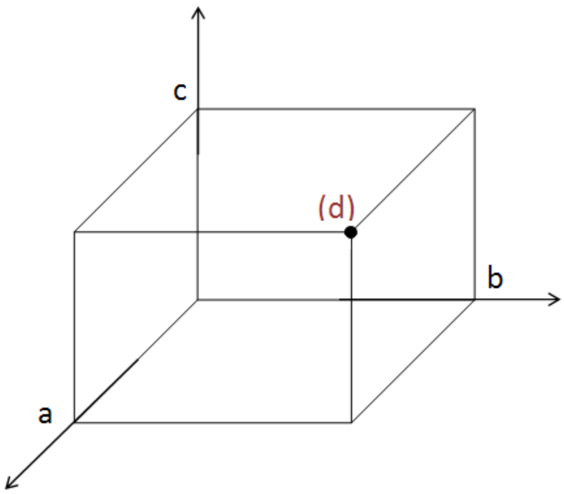


حال نشان می دهیم که با ۴ مکعب نمی توان این کار را انجام داد.

فرض کنید این کار امکان پذیر باشد، چون $۴ \times ۷ - ۱ = ۲۷$، بنابراین دقیقا یک مکعب کوچک وجود دارد که توسط دو مکعب علامت زده، خط خورده است. از طرفی به وضوح یکی از طبقه های افقی دارای دست کم ۲ مکعب علامت خورده، است. در این طبقه دو مکعب وجود دارند که هر دو توسط این دو مکعب خط می خورند که این با گفته ما در تناقض است(برهان خلف). بنابراین نتیجه می گیریم با ۴ مکعب نمی توان تمامی مکعب ها را خط زد، لذا پاسخ در این قسمت ۵ است.

- برای $n = ۴$ پاسخ را پیدا کنید.

با افزایش n، پیچیدگی تحلیل مساله بیشتر می شود و این باعث سخت شدن مسئله می شود. اما می توان با مدل سازی هایی پیچیدگی را کمتر کرد یا تجسم را راحت تر نمود. اگر بتوانیم یک نمود ۲ بعدی برای مسئله پیدا کنیم، راحت تر می توانیم آن را روی کاغذ تحلیل کنیم.



برای تجسم یک نقطه در بعد چهارم مانند (a, b, c, d) می توان مدل فضای سه بعدی نقطه (a, b, c) را تصور کرد و روی آن عدد d را نوشت. در واقع ما شکل را روی بعد سوم تصویر می کنیم و ارتفاع آن نقطه را روی نقطه تصویر می نویسیم.

در این جا نیز از چنین ایده ای استفاده می کنیم. مکعب را بر روی مربع زیرینش تصویر می کنیم و ارتفاع مکعب مورد نظر را روی تصویر آن می نویسیم. حال شکل مسئله به یک جدول $n \times n$ شامل اعدادی از ۱ تا n، تبدیل شده است.

شکل زیر معادل مکعب جواب آورده شده در قسمت قبل می باشد.

	۲	
۳		۱
۱		۳

اکنون پس از تبدیل شکل مسئله باید حکم آن را ترجمه کنیم. یعنی حکمی معادل حکم مسئله اصلی برای این شکل جدید بیابیم.

برای مکعب های طبقه اول، هر یک یا توسط یک مکعب هم طبقه خود خط می خورد یا توسط مکعبی که بالای سر آن قرار دارد. پس در این جدول $n \times n$، هر خانه یا هم سطر یا هم ستون یک خانه با شماره ۱ است یا عددی در آن نوشته شده است. برای طبقات دیگر نیز، مشابه همین اتفاق رخ می دهد. لذا، حکم معادل را می توان این گونه درنظر گرفت:

به ازای هر i، ۱ $\leq i \leq n$، هر خانه خالی جدول، هم سطر یا هم ستون یک خانه به شماره i است. تحقیق کنید کـه جـدول زیر یک جدول مطلوب برای مسئله است و تصور کنید که معادل چه حالتی از مسئله است.

۴		۲	۳
۳		۴	۲
	۱		
۲		۳	۴

تلاش کنید تا کمترین تعداد مکعب مورد نیاز را پیدا کنید و کمینه بودن آن را ثابت کنید و کمتر به ادامه این قسمت احتیـاج پیدا کنید.

مثالی برای ۸ مکعب ذکر می کنیم.

۲			۱
	٤	۳	
	۳	٤	
۱			۲

حال نشان می دهیم با کمتر از این تعداد نمی توان همه مکعب ها را خط زد. فرض کنیـد بـا علامـت زدن کمتـر از ۸ مکعـب بتوان کل مکعب ها را خط زد.(فرض خلف) پس در یکی از طبقات حداکثر ۱ مکعب را علامت زده ایم. فرض کنید این پیشامد در طبقه اول رخ دهد. پس ۹ خانه در این طبقه هستند که باید توسط مکعبات طبقات دیگر خط بخورنـد. امـا هـر مکعـب در طبقات دیگر حداکثر یک مکعب در طبقه اول را خط می زند و این بدان معناست کـه دسـت کـم بایـد ۹ مکعـب را در سـایر طبقات علامت زد که این با فرض اولیه (کمتر از ۸ بودن تعداد مکعب ها) تناقض دارد. بنابراین نمی توان این کار را انجام داد.

- برای $n =$ ۱۰ پاسخ را پیدا کنید.

با بزرگتر شده n، کارایی مدل ارائه شده بیشتر می شود. اما این بدان معنی نیست که ارائه مدل کار را تمام می کند. در این حالت سعی می کنیم استدلالات را در مدلی که پیشنهاد می شود، بیان کنیم. در وهله اول سعی می کنیم با شماره گذاری خانه ها (یک خانه ممکن است چندین شماره را بپذیرد) شرط مسئله را ارضا کنیم سپس سعی در کم کردن تعداد شماره ها می کنیم. تلاشمان بر این است این کار را به صورت هدفمند و با توجه به ساختارهای بدست آمده در قسمت های پیشین، انجام دهیم. همچنین برای حدس حداقل تعداد شماره ها می توان از اعداد قبلی کمک گرفت.

(۲ → ۲ ، ۳ → ۵ ، ۴ → ۸)

مشاهده می کنیم که خانه های با شماره i، $1 \leq i \leq n$، بهتر است در سطرها و ستون های مختلف شوند. به طوری کـه ۱۰ خانه با شماره i که در سطرها و ستون های مختلف قرار دارند، تمامی خانه های طبقه i را می پوشانند. بـا همـین اسـتدلال خواهیم دید که بهتر است که دو مکعب علامت خورده در یک ردیف (در راستای محور سوم) قرار نگیرند یا معـادلا دو شـماره در یک خانه نوشته نشود.

به کمک این مشاهدات و سعی و تلاش فراوان به ساختار زیر هدایت می شویم. این ساختار متناظر ۵۰ مکعب علامـت خـورده است. ممکن است شما هم توانسته باشید ساختار مشابهی را پیدا کنید، در این صورت به شما تبریک می گوییم!

١	٥	٤	٣	٢					
٢	١	٥	٤	٣					
٣	٢	١	٥	٤					
٤	٣	٢	١	٥					
٥	٤	٣	٢	١					
					٦	١٠	٩	٨	٧
					٧	٦	١٠	٩	٨
					٨	٧	٦	١٠	٩
					٩	٨	٧	٦	
					١٠	٩	٨	٧	٦

قاعدتا باید تلاش کنیم که تعداد مکعب ها را کمتر کنیم. اما پس از کمی تلاش، حس ششـمان ممکـن اسـت مـا را از تـلاش بیشتر در این راستا بازدارد و ما را به مرحله دوم راهنمایی کند.

در این مرحله باید ادعایمان (لازم بودن ۵۰ مکعب علامت خورده) را ثابت کنیم.

توجه به جاهای خالی جدول می تواند ایده ای کارساز باشد.

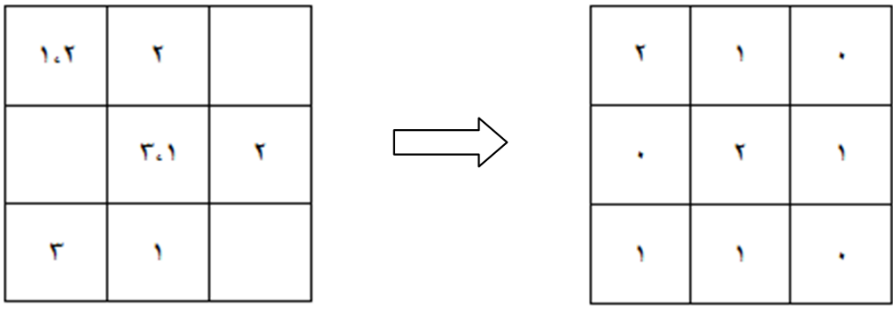
مطمئنا در بهترین حالت، تعدادی از خانه ها خالی هستند. می دانیم برای هر خانه های خالی، در هـر طبقـه یکـی از مکعـب های هم سطر یا ستونش علامت خورده اند (به ازای هر طبقه یک شماره در خانه تصویرش نوشته شده بود). پـس حـداقل ۱۰ شماره، در خانه های هم سطر و هم ستون هر خانه ی خالی وجود دارد. می بینیم که در ساختار ارائه شده، دقیقـا ۱۰ شـماره برای هر خانه خالی وجود دارد که این می تواند ما را نسبت به درستی ادعایمان امیدوارتر کند.

حال سعی می کنیم به کمک این گزاره، ثابت کنیم دست کم از ۵۰ عدد باید استفاده شود. کـافی اسـت مسـاله زیـر را ثابـت کنیم.

- در برخی از خانه های یک جدول ۱۰×۱۰، اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را قرار می دهیم. فرض کنید برای هر خانه خالی مجموع اعداد هم سطر و هم ستونش حداقل برابر ۱۰ باشد. نشان دهید مجموع اعداد روی جدول حداقل ۵۰ است.

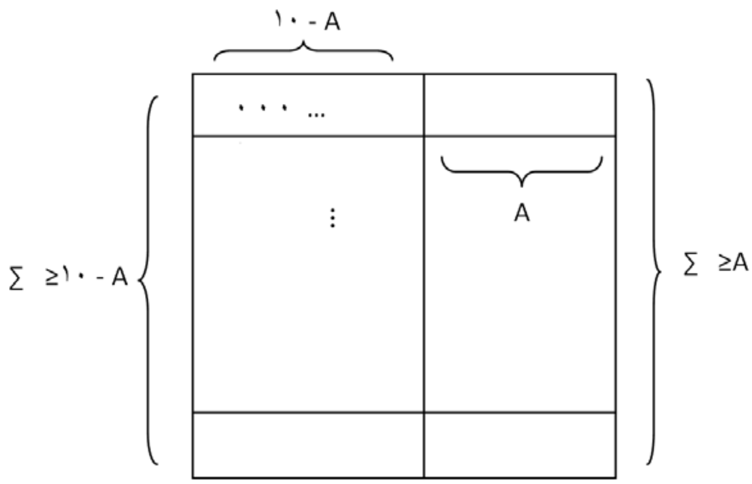
اعداد نوشته شده بر روی خانه های جدول تعداد مکعب های علامت خورده در راستای محور سوم می باشند. در واقع این اعداد، تعداد شماره های طبقاتی است که در خانه های جدول قبلی (تصویر مکعب بر یک وجهش) می نوشتیم.

شکل زیر تناظر یک مکعب علامت گذاری شده به جدول مورد نظر را نشان می دهد.



سطر یا ستونی را در نظر بگیرید که در میان این ۲۰ سطر و ستون، مجموع اعداد روی آن کمترین باشند.(ممکن است چند سطر یا ستون با این خاصیت موجود باشند؛ در این صورت یکی از آن ها را در نظر می گیریم.) فرض کنید سطر اول با مجموع A دارای این کمترین مقدار باشد. دست کم $۱۰ - A$ خانه از این سطر خالی هستند که با توجه به شرط مسئله، مجموع اعداد روی ستون هر یک از آن ها حداقل $۱۰ - A$ است.

حال در A ستون دیگر مجموع اعداد حداقل A است(با توجه به فرض مینیمم بودن A) . پس حداقل مجموع اعداد کل جدول برابر $(۱۰ - A)^۲ + A^۲$ است. از طرفی می توان نشان داد $(۱۰ - A)^۲ + A^۲ \geq ۵۰$. بنابراین مجموع اعداد روی جدول حداقل ۵۰ است.



- مسئله را برای حالت کلی حل کنید.

در این جا باید با توجه به اعداد بدست آمده در قسمت های قبل، حدسی بزنیم و آن را ثابت کنیم. با توجه بـه پاسـخ قسـمت های قبل می توان $\left\lceil\frac{n^۲}{۲}\right\rceil$حدس را زد. اثبات این ادعا را به عهده خواننده واگذار می کنیم.

مسئله را می توان در ابعاد بالاتر نیز مطرح کرد. اما تصور آن بسیار دشوار است. برای همین سعی می کنیم که از معادل سازی جبری استفاده کنیم. ببینید که مسئله ای که مطرح شد با مسئله زیر معادل است و مسئله در ابعـاد بـالاتر را بـه کمـک ایـن معادل سازی بیان کنید.

- فرض کنید $A=\{(a,b,c)|a,b,c\in N,a,b,c\leq n\}$. M را یک زیرمجموعه ی مجموعه پوشا می گـوییم اگـر به ازای هر عضو در A، عضوی در M موجود باشد که تنها در یک مولفه (یکی از اعضای سه تـایی) بـا آن تفـاوت داشـته باشد. کمترین مقدار ممکن $|M|$ را برحسب n بیابید.

در این مقاله نشان دادیم با تبدیل یک مسئله به مسئله ای دیگر و ثابت کردن حکم معادل می توان بـه حـل یـک سـوال پرداخـت. همچنین می توان با کمک گرفتن از حالت های ساده تر، مدلی برای جواب مساله در حالت کلی ارائه داد.