

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون ترکیبیات = بخش دهم

چهارشنبه ۲۹ مرداد ۱۳۹۳ دبیران: رضایی، اسدی، جیل عاملی مدت زمان آزمون: ۲ ساعت

پرومشی نخست. عدد سلطانی! ۳۰ امتیاز

پس از آن که سلطان مشاهده کرد اکثر دانش‌مندان مانند آوگادرو، کاتالان، رمزی و ... برای خود عددی دست و پا کرده‌اند (!)، تصمیم گرفت او نیز عدد خودش را معرفی کند.

(ا) به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد سلطانی نوع اول که با $S_{1,n}$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $1, 2, \dots, n$ در یک جدول $2 \times n$ است؛ طوری که هر عدد دست کم یک بار بیاید و هر عدد، بیش‌تر یا مساوی اعداد سمت چپ و پایین‌ش (در صورت وجود) باشد. اگر عدد کاتالان n -ام را با C_n نشان دهیم، ثابت کنید: (۱۵ امتیاز)

$$S_{1,n} \geq C_n$$

(ب) به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد سلطانی نوع دوم که با $S_{2,n}$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $1, 2, \dots, n$ در یک جدول $2 \times n$ است؛ طوری که هر عدد دقیقاً ۲ بار بیاید و هر عدد، بیش‌تر یا مساوی اعداد سمت چپ و پایین‌ش (در صورت وجود) باشد. اگر عدد کاتالان n -ام را با C_n نشان دهیم، ثابت کنید: (۱۵ امتیاز)

$$S_{2,n} \leq C_n$$

پرومشی دهم. دسته ۳۰ امتیاز

(ا) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n = 4k$ ، ماتریس آدام-هارد از مرتبه‌ی n وجود دارد، اگر و تنها اگر طرح بلوکی

$$2 - (4k - 1, 2k - 1, k - 1)$$

وجود داشته باشد. (۱۵ امتیاز)

(ب) فرض کنید تعداد صفحه‌های آفین از مرتبه‌ی n ، برابر $f(n)$ باشد. تعداد صفحه‌های تصویری از مرتبه‌ی n را بیابید. (۱۵ امتیاز)

پروستش سومه ترکیبیات یا تنبیهیات!؟ ۴۵ امتیاز

پوشش دوبخشی گراف G ، مجموعه‌ای از زیرگراف‌های دوبخشی آن است که هر یال از G حداقل در یکی از آنها آمده باشد. وزن این پوشش برابر با مجموع تعداد رئوس این زیرگراف‌ها است. فرض کنید $bc(G)$ کوچکترین عددی باشد که یک پوشش دوبخشی از G با آن وزن موجود باشد.

الف) ثابت کنید $bc(K_{2n}) \leq 2^n \cdot n$ (۱۵ امتیاز)

ب) ثابت کنید $bc(K_{2n}) \geq 2^n \cdot n$ (۳۰ امتیاز)

یادآوری: برای این بخش شاید مجبور به استفاده از نابرابری حسابی-هندسی شوید. طبق این نامساوی برای اعداد مثبت a_1, \dots, a_n داریم:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

در احتمال عاشقی، مخرج و بالم می‌شود
روزی سَرَم، سالی دلم، ترکیبیاتم می‌شود