درس سوم: انتگرال‌گیری از عبارات گویا (تجزیه کسرها)

برای تجزیه کسرها باید مراحل زیر را دنبال کنیم

مرحله‌ی اول: با تقسیم صورت بر مخرج، درجه‌ی صورت عبارت گویا را کم‌تر از مخرج می‌کنیم. بدیهی است اگر در عبارت گویای داده شده درجه‌ی مخرج، کم‌تر از صورت بود نیازی به تقسیم نیست. اگر درجه صورت و مخرج مساوی بود هم باید تقسیم کنیم.

مرحله‌ی دوم: مخرج را تجزیه می‌کنیم تا به چندجمله‌ای‌های درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم تبدیل شود. سپس عبارت گویا را به صورت حاصل‌جمع عبارت‌های گویایی می‌نویسیم که مخرجشان قسمت‌های تجزیه شده‌ی مخرج است. اگر مخرج چندجمله‌ای درجه‌ی اول بود صورت کسر عدد و اگر مخرج چندجمله‌ای درجه‌ی دوم بود صورت کسر چندجمله‌ای درجه‌ی اول است.

مثال ۶۶. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x}$ را محاسبه کنید.

حل: پس از تقسیم کردن داریم

$$\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x}=x+5+\frac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^4+5x^3-3x^2-8x+5 & x^3+x \\ \cline{3-3}
- & x^4+x^2 & x+5 \\ \hline
 & 5x^3-4x^2-8x+5 & \\
- & 5x^3+5x & \\ \hline
 & -4x^2-13x+5 &
\end{array}$$

که عملیات تقسیم را در روبه‌رو می‌بینید. بر دانشجو لازم است که روش تقسیم کردن چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را دوباره مرور کند تا اشکالی در این زمینه وجود نداشته باشد. تجزیه‌ی چندجمله‌ای x^3+x با روش فاکتورگیری برابر $x(x^2+1)$ است. چندجمله‌ای x درجه‌ی اول است پس صورت آن عددی مانند A است. چندجمله‌ای x^2+1 درجه‌ی دوم است پس صورت آن یک چندجمله‌ای درجه‌ی اول مانند $Bx+C$ می‌شود. پس می‌نویسیم:

$$\frac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}$$

که حاصل، تساوی $\dfrac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x}=\dfrac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}$ است. دو عبارت گویای با مخرج مساوی برابرند. در نتیجه صورت آن‌ها برابرند. یعنی

$$\begin{cases} A=5 \\ C=-13 \\ A+B=-4 \Rightarrow 5+B=-4 \Rightarrow B=-4-5=-9 \end{cases}$$

یعنی به دست آمده است

$$\begin{aligned}\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x} &= x+5+\frac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}=x+5+\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=x+5+\frac{5}{x}+\frac{-9x-13}{x^2+1}\\ &= x+5+\frac{5}{x}+\frac{-9x}{x^2+1}+\frac{-13}{x^2+1}\end{aligned}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x}dx &= \int x\,dx+\int 5\,dx+5\int\frac{1}{x}dx-9\int\frac{x}{x^2+1}dx-13\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2+5x+5\ln|x|-9\times\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-13\arctan x\end{aligned}$$

تذکر ۶۷. چون دامنه‌ی تابع $\frac{1}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ یعنی اعداد حقیقی است. از این به بعد قرار می‌دهیم $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|$ تا دامنه‌ی تابع و دامنه‌ی انتگرال تابع یکسان شود. این مطلب باید برای کلیه عبارت‌های گویا رعایت شود تا بین دامنه‌ی تابع و دامنه‌ی انتگرال تابع مغایرتی پیش نیاید.

تذکر ۶۸. اگر در هنگام تجزیه مخرج عبارت گویا عاملی دوبار تکرار شد، باید آن را دو بار بنویسیم. یک‌بار با توان یک و بار دوم با توان دو به همین صورت اگر عاملی سه بار تکرار شد سه بار با توان‌های یک، دو و سه نوشته می‌شود.

مثال ۶۹. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x^2}$ را محاسبه کنید.

حل: با تقسیم کردن به دست می‌آید $f(x)=\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x^2}=x+4+\frac{-7x^2-8x+5}{x^3+x^2}$ و تجزیه‌ی x^3+x^2 به صورت $xx(x+1)$ است یعنی x دوبار تکرار شده است پس می‌نویسیم.

$$\frac{-7x^2-8x+5}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{xx(x+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx+B+Cx^2}{x^3+x^2}$$

و با دستگاه معادلات روبرو مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases}B=-8\\ A+B=5\Rightarrow A-8=5\Rightarrow A=5+8=13\\ A+C=-7\Rightarrow 13+C=-7\Rightarrow C=-7-13=-20\end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x^2}dx &= \int x\,dx+\int 4\,dx+13\int\frac{1}{x}dx-8\int\frac{1}{x^2}dx-20\int\frac{1}{x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2+4x+13\ln|x|-8\times\frac{-1}{x}-20\ln|x+1|\end{aligned}$$

مثال ۷۰. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ را محاسبه کنید.

حل: در این مثال چون درجه‌ی مخرج کوچک‌تر از درجه‌ی صورت است نیازی به تقسیم کردن نیست. تجزیه‌ی $1-x^2$ به صورت $(1-x)(1+x)$ است. پس می‌نویسیم.

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{A+Ax+B-Bx}{1-x^2}$$

و با دستگاه معادلات زیر مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases} A-B=0 \Rightarrow A=B \\ A+B=1 \Rightarrow A+A=1 \Rightarrow A=B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)\end{aligned}$$

مثال ۷۱. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{2x}{(1+x)(1-x)^3}$ را محاسبه کنید.

حل: در این مثال چون درجه‌ی مخرج کوچک‌تر از درجه‌ی صورت است نیازی به تقسیم کردن نیست. همچنین مخرج تجزیه شده است و $x-1$ سه بار تکرار شده پس سه بار نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1+x)(1-x)^3} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x} \\ &= \frac{A(1-x)^2(1+x) + B(1-x)(1+x) + C(1+x) + D(1-x)^3)}{(1+x)(1-x)^3} \\ &= \frac{A - Ax - Ax^2 + Ax^3 + B - Bx^2 + C + Cx + D - 3Dx + 3Dx^2 - Dx^3}{(1+x)(1-x)^3}\end{aligned}$$

و با دستگاه معادلات زیر مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases} A-D=0 \Rightarrow A=D \\ -A-B+3D=0 \Rightarrow -A-B+3A=0 \Rightarrow B=2A \\ -A+C-3D=2 \Rightarrow -A+C-3A=2 \Rightarrow C=2+4A \\ A+B+C+D=0 \Rightarrow A+2A+2+4A+A=0 \Rightarrow 8A=-2 \Rightarrow A=-\frac{1}{4}=D \Rightarrow B=\frac{-1}{2} \Rightarrow C=1 \end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(1+x)(1-x)^3}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{-1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{(1-x)^2}dx + \int \frac{1}{(1-x)^3}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{4}\ln|1+x|\end{aligned}$$

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int \frac{x^3+4x^2+5x-7}{x(x+3)}dx$ ۲) $\int \frac{x^3+4x^2+5x-7}{(x+1)^3}dx$ ۳) $\int \frac{5x^2}{x(x^2+1))}dx$

۴) $\int \frac{1}{x^3(2x+1)}dx$ ۵) $\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx$ ۶) $\int \frac{1}{x^3+5x^2+6x}dx$