تاریخ :	وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۶۰

موضوع هندسه 1(× هندسه و استدلال × مساحت و قضیه فیثاغورس × تشابه)

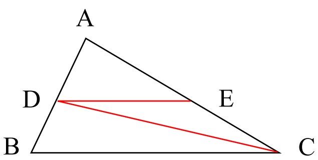
گروه مشاوره خاکسار

۱. در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A}=۲\hat{B}$، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه‌ی B است.)

۱) $a^۲=bc$	۲) $b^۲=ac$	۳) $a^۲-b^۲=bc$	۴) $a^۲-c^۲=bc$

-سراسری-۱۳۸۸-سخت

۲. در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟



۱) ۱٫۳۶	۲) ۱٫۴۴
۳) ۱٫۵۶	۴) ۱٫۶۴

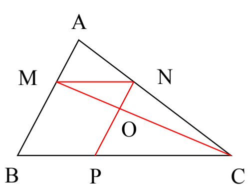
-سراسری-۱۳۹۰-سخت

۳. در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$	۲) $\frac{۲}{۳}$	۳) $\frac{۳}{۴}$	۴) $\frac{۱}{۲}$

-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

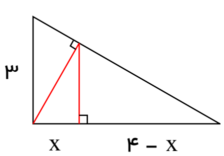
۴. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۷}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



۱) ۶۳	۲) ۶۰
۳) ۷۰	۴) ۸۴

-سراسری-۱۳۹۰-سخت

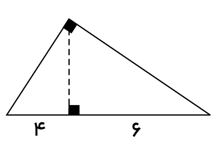
۵. در شکل مقابل، ارتفاع هر دومثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟



۱) ۱٫۹۶	۲) ۱٫۵۶
۳) ۱٫۶۴	۴) ۱٫۴۴

-سراسری-۱۳۸۹-سخت

۶. در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟



۱) $\sqrt{۵۰}$	۲) $\sqrt{۶۵}$
۳) $\sqrt{۷۰}$	۴) $\sqrt{۷۵}$

-سراسری-۱۳۸۶-سخت

۷. اندازه‌ی قاعده‌های یک ذوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه وسط قاعده‌ها را به هم وصل کند برابر ۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو قطر این ذوزنقه از وسط قاعده‌ی کوچکتر چقدر است؟

۱) ۳٫۶	۲) ۴٫۲	۳) ۴٫۸	۴) ۵٫۴

-سراسری-۱۳۸۵-سخت

۸. در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد فاصله نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۱٫۶ ۳) ۱٫۸ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۸۵-سخت

۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AB}{AC}$ ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

-سراسری-۱۳۸۴-سخت

۱۰. اندازه‌ی دوضلع قائم از مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است. عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله ی M ازنزدیکترین راس این مثلث چند واحد است؟

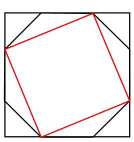
۱) ۷٫۵ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

-سراسری-۱۳۸۴-سخت

۱۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب $۲\sqrt{۲}$, ۳ است. اندازه‌ی ضلع متوسط این مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

-سراسری-۱۳۸۳-سخت

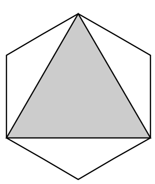


۱۲. درشکل مقابل اندازه‌ی طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است . مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟

۱) $۴\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۲) $۴\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

۳) $۸\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۴) $۸\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

-سراسری-۱۳۸۷-سخت



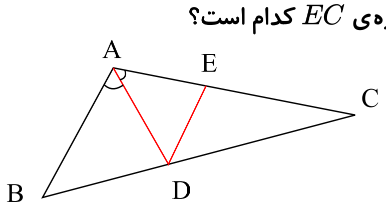
۱۳. اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل مقابل ۳ واحد باشد، مساحت مثلث سایه زده چند واحد مربع است؟

۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$

۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

-سراسری-۱۳۸۱-متوسط

۱۴. در شکل مقابل $۵AB=۳AC=۶۰$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. $DE||AB$ ، اندازه‌ی EC کدام است؟

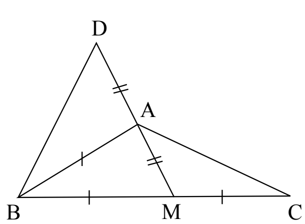


۱) ۱۲ ۲) ۱۲٫۵

۳) ۱۳٫۵ ۴) ۱۵

-سراسری-۱۳۸۱-سخت

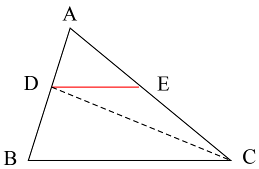
۱۵. در شکل مقابل $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ چند درجه است؟



۱) ۳۹° ۲) ۶۱°

۳) ۵۸° ۴) ۵۶°

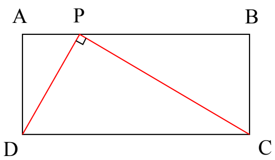
-سراسری-۱۳۸۹-سخت



-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۱۶. در شکل مقابل $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$، $DE \parallel BC$، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟

۱) ۷۰
۲) ۸۴
۳) ۷۸
۴) ۷۵

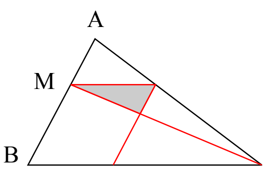


-سراسری-۱۳۸۱-سخت

۱۷. در مستطیل شکل مقابل $\hat{P}=۹۰^\circ$ ، $۳AP=BP=۹$. طول DP کدام است؟

۱) ۵
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۶

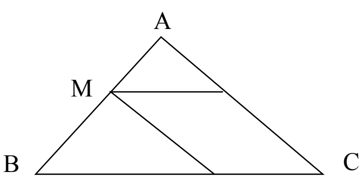
۱۸. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟



-خارج از کشور-۱۳۹۰-سخت

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۰

۱۹. در شکل مقابل، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



-خارج از کشور-۱۳۸۹-سخت

۱) ۴۸
۲) ۵۰
۳) ۵۴
۴) ۶۰

۲۰. در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴
۲) ۴٫۵
۳) ۵
۴) ۶

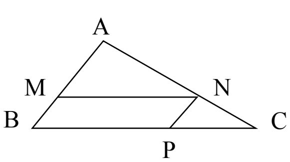
-خارج از کشور-۱۳۹۰-سخت

۲۱. مثلثی به اضلاع $a, ۴, ۵$، با مثلثی به طول اضلاع $b, ۷, ۹$، متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a، کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$
۲) $\frac{۴۵}{۷}$
۳) $\frac{۳۶}{۵}$
۴) $\frac{۳۵}{۴}$

-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۲۲. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



-خارج از کشور-۱۳۹۰-سخت

۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۵۴
۴) ۵۶

۲۳. در پنج ضلعی $ABCDE$ اگر دو قطر BD و CE یکدیگر را در M قطع کنند، چهارضلعی $ABME$ کدام است؟

۱) لوزی
۲) مستطیل
۳) مربع
۴) ذوزنقه متساوی الساقین

-سراسری-۱۳۷۲-متوسط

۲۴. در مثلث ABC از نقطه ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه $\widehat{A}$ با ضلع BC ، خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می کنیم تا آن ها را در M و N قطع کند، AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) فقط عمود بر هم
۲) فقط منصف هم
۳) زاویه ی بین آن ها مکمل زاویه A است.
۴) عمودمنصف هم

-سراسری-۱۳۷۷-سخت

۲۵. اگر هر زاویه ی داخلی یک n ضلعی منتظم فقط ۲ درجه کم تر از هر زاویه داخلی یک $n+۲$ ضلعی منتظم باشد، n کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۲

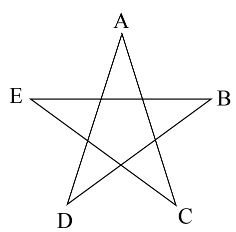
-سراسری-۱۳۷۰-متوسط

۲۶. یک n ضلعی محدب حداکثر چند زاویه ی حاده داخلی می تواند داشته باشد؟ (با تغییر)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

-سراسری-۱۳۷۶-سخت

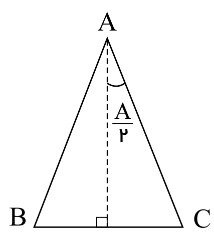
۲۷. در شکل مقابل مجموع زوایای A و B و C و D و E کدام است؟



۱) ۱۸۰°
۲) ۲۷۰°
۳) کم تر از ۱۸۰°
۴) بین ۱۸۰° و ۲۷۰°

-سراسری-۱۳۷۳-سخت

۲۸. در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ ، مقدار $\frac{b}{a}\sin\frac{A}{۲}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

-سراسری-۱۳۷۹-سخت

۲۹. در مثلثی $\widehat{A}=۶۰^\circ$ و $b=\sqrt{۳}+۱$ و $c=\sqrt{۳}-۱$، زاویه‌ی $\widehat{B}$ کدام است؟

۱) ۱۵°
۲) ۴۵°
۳) ۱۰۵°
۴) ۱۲۰°

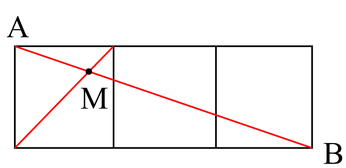
-سراسری-۱۳۷۹-سخت

۳۰. در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده ایم. نسبت AH به BH' کدام است؟

۱) $\frac{BC}{AC}$
۲) $\frac{(AC)^۲}{(BC)^۲}$
۳) $\frac{AC}{BC}$
۴) $\frac{(BC)^۲}{(AC)^۲}$

-سراسری-۱۳۶۷-سخت

۳۱. در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. فاصله‌ی MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

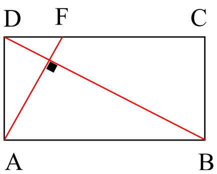
-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۳۲. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $۴-۲\sqrt{۳}$

-سراسری-۱۳۶۹-سخت

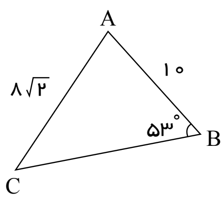
۳۳. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$. اگر $AB=۳AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟



۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۴ ۴) ۶

-سراسری-۱۳۶۹-متوسط

۳۴. در مثلث شکل مقابل، طول BC کدام است؟ $(\sin ۵۳^\circ \sim ۰/۸)$



۱) ۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۰ ۴) ۶

-خارج از کشور-۱۳۸۷-سخت

۳۵. یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است. کوتاه‌ترین فاصله رأس دیگر مربع از ضلع این مثلث، کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) ۱

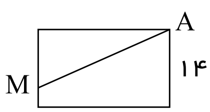
-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۳۶. در مثلث ABC داریم $AB=AC$ و $\widehat{A}=۸۰^\circ$ ، عمودمنصف های دو ساق مثلث، قاعده ی BC را در M و N قطع می کند. کوچک ترین زاویه ی مثلث AMN چنددرجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۳۷. در شکل روبه‌رو پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد، باشد، پاره خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱ ۲) ۲۳
۳) $۹\sqrt{۷}$ ۴) $۱۰\sqrt{۶}$

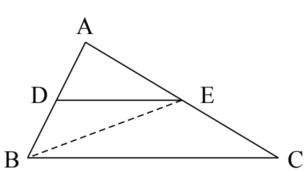
-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۳۸. در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه ی M و N قطع می کند. فاصله ی این دو نقطه چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

-خارج از کشور-۱۳۸۶-سخت

۳۹. در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{۴}{۵}BC$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

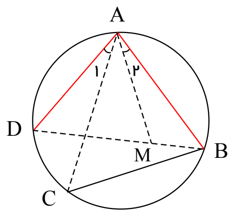


۱) ۲ ۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۴۰. در شکل مقابل $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ ، حاصل $AD\cdot BC$ برابر کدام است؟

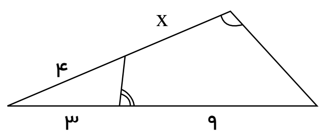
۱) $DM\cdot AC$ ۲) $BM\cdot AC$
۳) $AB\cdot CD$ ۴) $BD\cdot BM$



-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۴۱. در شکل مقابل، دو زاویه‌ی مقابل چهار ضلعی مکمل‌اند. اندازه‌ی x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵٫۵
۳) ۶ ۴) ۷٫۵



-خارج از کشور-۱۳۸۵-متوسط

۴۲. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه‌ی داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد. AD برابر کدام است؟

۱) AM ۲) MD ۳) MC ۴) $\frac{۱}{۲}AC$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۴۳. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. اگر زاویه‌ی خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC، چند درجه است؟

۱) ۳۴° ۲) ۳۸° ۳) ۴۲° ۴) ۴۴°

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۴۴. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۱۵° ۲) $۱۷٫۵^\circ$ ۳) $۲۲٫۵^\circ$ ۴) ۳۰°

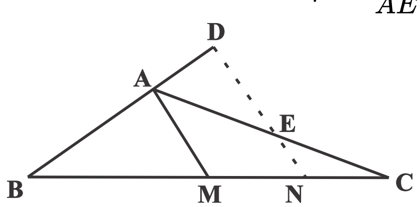
-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۴۵. در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\widehat{D}B=۳۴^\circ$ باشد، زاویه $O\widehat{A}D$ چند درجه است؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

-سراسری-۱۳۹۴-سخت

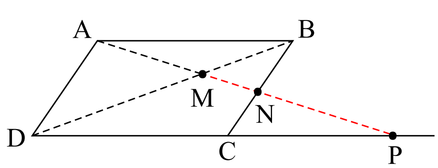
۴۶. در مثلث $ABC(AB=\frac{۲}{۳}AC)$ ، پاره خط ND موازی میانه‌ی AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

-سراسری-۱۳۹۴-سخت

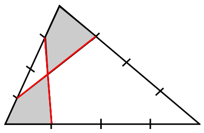
۴۷. در شکل روبه‌رو، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل $MP\times MN$ برابر کدام است؟



۱) $AB^۲$ ۲) $AD^۲$
۳) $MD^۲$ ۴) $MA^۲$

-خارج از کشور-۱۳۹۴-سخت

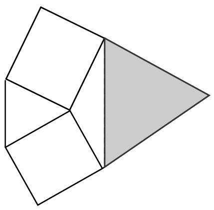
۴۸. در شکل مقابل هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهار ضلعی سایه زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم مساحت
۲) هم محیط
۳) هم نهشت
۴) متشابه

-خارج از کشور-۱۳۸۹-سخت

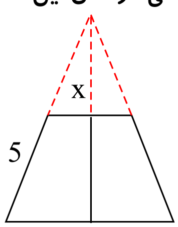
۴۹. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع آن، دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۲
۲) ۲٫۲۵
۳) ۳
۴) ۴

-خارج از کشور-۱۳۹۳-سخت

۵۰. در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

-خارج از کشور-۱۳۸۵-سخت

۵۱. اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه‌ی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

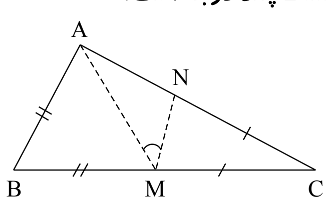
-خارج از کشور-۱۳۸۵-سخت

۵۲. در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۲۸

-سراسری-۱۳۹۵-سخت

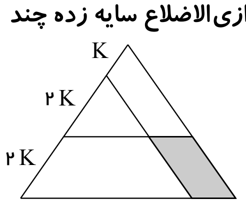
۵۳. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین هستند و $\hat{M} = ۴۳^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\widehat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳°
۲) ۹۴°
۳) ۹۶°
۴) ۹۷°

-خارج از کشور-۱۳۹۲-سخت

۵۴. در شکل روبه‌رو، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه زده چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

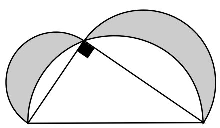
-خارج از کشور-۱۳۹۲-سخت

۵۵. در مثلث ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶٫۷۶ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

-سراسری-۱۳۹۱-سخت

۵۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند مجموع مساحت‌های دو ناحیه‌ی سایه‌زده کدام است؟



۱) ۲π ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۳π

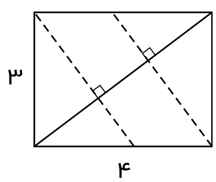
-خارج از کشور-۱۳۹۳-سخت

۵۷. در مثلث ABC، داریم $\hat{A}=۲\hat{B}$ و $BC=۶$ و $AC=۴$، اندازه‌ی ضلع AB کدام است؟

۱) ۴٫۵ ۲) ۵ ۳) ۵٫۵ ۴) ۶

-خارج از کشور-۱۳۸۸-سخت

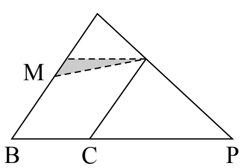
۵۸. در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل، کدام است؟



۱) ۵٫۲۵
۲) ۵٫۷۵
۳) ۶
۴) ۷٫۵

-سراسری-۱۳۹۶-سخت

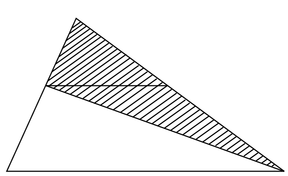
۵۹. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC=\frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۱۶}$

-سراسری-۱۳۹۶-سخت

۶۰. در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-سخت

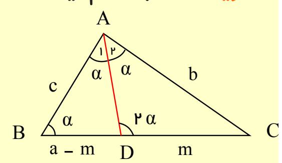
تاریخ : وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی : تعداد سوالات: ۶۰

موضوع هندسه 1(× هندسه و استدلال × مساحت و قضیه فیثاغورس × تشابه)

گروه مشاوره خاکسار

۱.گزینه ۳ با رسم نیمساز رأس A می‌توان گفت:



$$\begin{cases}\hat{D}=\hat{A}=۲\alpha\\ \hat{B}=\hat{A}_۲=\alpha\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADC}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{\underbrace{AD}_{BD}}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{m}=\frac{c}{a-m}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b^۲=am\\ a^۲-am=bc\end{cases}\Rightarrow a^۲-b^۲=ma+bc-am=bc$$

۲.گزینه ۳

دو مثلث DEC , ADE دارای ارتفاع یکسان از رأس D می‌باشند. اگر ارتفاع رسم شده از D برابر h باشد داریم:

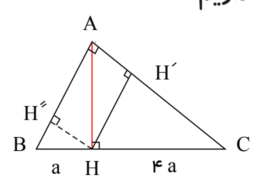
$$\left.\begin{array}{l}S_{DEC}=\dfrac{EC\cdot h}{۲}\\ S_{ADE}=\dfrac{AE\cdot h}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{AE}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{۸}{۵}\quad(I)$$

چون $BC||DE$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۵}{۸}$ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\left(\frac{AC}{AE}\right)^۲=\frac{۶۴}{۲۵}\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}\frac{S_{BDEC}}{S_{ADE}}=\frac{۳۹}{۲۵}=۱/۵۶$$

۳.گزینه ۴ از فرض تست نتیجه می‌گیریم مساحت مثلث ABH مساوی $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث AHC است، پس $CH=۴BH$

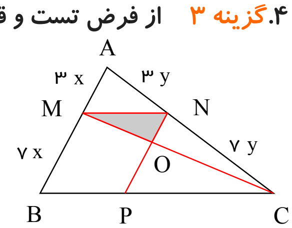
داریم:



$$AH^۲=a\times ۴a=۴a^۲\Rightarrow AH=۲a$$

$$\overset{\Delta}{AHB}\sim\overset{\Delta}{AHC}\Rightarrow \text{نسبت تشابه}=\frac{AH}{HC}=\frac{۲a}{۴a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{HH''}{HH'}=\frac{۱}{۲}$$

۴.گزینه ۳ از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می‌گیریم.



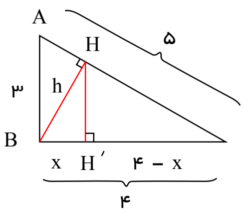
$$ON||AM\Rightarrow\frac{CN}{CA}=\frac{ON}{AM}\Rightarrow\frac{۷y}{۱۰y}=\frac{ON}{۳x}\Rightarrow ON=\frac{۲۱}{۱۰}x$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}ON\times MN\sin\hat{N}}{\frac{۱}{۲}AM\times MN\sin\hat{M}}\xrightarrow{\hat{N}=\hat{M}}\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{ON}{AM}=\frac{\frac{۲۱}{۱۰}x}{۳x}=\frac{۷}{۱۰}=۷۰\%$$

۵.گزینه ۴

وتر AC در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید.

$$AC=\sqrt{۲^{۲}+۴^{۲}}=۵$$



از طرفی داریم:

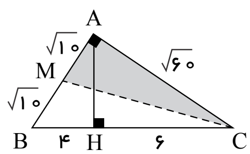
$$BH\times AC=AB\times BC\Rightarrow ۵h=۳\times ۴\Rightarrow h=\frac{۱۲}{۵}$$

یا $\quad$ ارتفاع وارد بر وتر $=\dfrac{\text{ضرب دو ضلع قائم}}{\text{وتر}}=\dfrac{۳\times ۴}{۵}=\dfrac{۱۲}{۵}$

$$\overset{\Delta}{BHC}: BH^{۲}=BH'\times BC\Rightarrow (\frac{۱۲}{۵})^{۲}=۴x\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$

۶.گزینه ۳

در ابتدا طول اضلاع قائمه را در مثلث ABC به‌دست می‌آوریم.



$$AB^{۲}=BH\cdot BC=۴\times ۱۰=۴۰\rightarrow AB=\sqrt{۴۰}\rightarrow ۲\sqrt{۱۰}\rightarrow AM=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

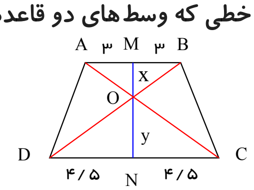
$$AC^{۲}=CH\cdot BC=۶\times ۱۰=۶۰\rightarrow AC=\sqrt{۶۰}$$

میانه‌ی وارد بر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین میانه است، پس باید طول میانه‌ی CM را به‌دست آوریم.

$$CM^{۲}=AM^{۲}+AC^{۲}\rightarrow CM^{۲}=۱۰+۶۰=۷۰\Rightarrow\rightarrow CM=\sqrt{۷۰}$$

۷.گزینه ۳

خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند از نقطه‌ی تلاقی دو قطر می‌گذرد.

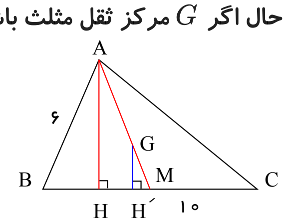


$$\overset{\Delta}{OMB}\sim\overset{\Delta}{OND}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴/۵}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{x}{\underbrace{x+y}_{۱۲}}=\frac{۳}{۷/۵}\rightarrow x=۴/۸$$

۸.گزینه ۲ $\quad$ **طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:**

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۶^{۲}+۸^{۲}\rightarrow BC=۱۰$$

حال اگر G مرکز ثقل مثلث باشد و از G عمود GH' را بر BC وارد کنیم، آنگاه داریم:



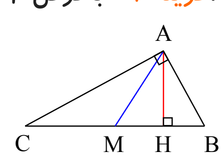
$$\left.\begin{array}{l}S=\dfrac{۶\times ۸}{۲}\\ S=\dfrac{AH\times ۱۰}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow AH=\frac{۶\times ۸}{۱۰}=۴/۸$$

$$\frac{GM}{AM}=\frac{GH'}{AH}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow GH'=\frac{۱}{۳}AH=\frac{۱}{۳}\times ۴/۸=۱/۶$$

بنابراین می‌توانیم نکته‌ی زیر را به خاطر بسپاریم:

فاصله‌ی محل تلاقی میانه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه از وتر برابر است با $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع وارد بر وتر.

۹.گزینه ۴ $\quad$ **با فرض $AC=۲$ و $AB=\sqrt{۳}$ داریم:**



$$AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow ۴+۳=BC^{۲}\Rightarrow BC=\sqrt{۷}$$

از طرفی: $AH\cdot BC=AB\cdot AC\rightarrow\sqrt{۷}AH=۲\sqrt{۳}\rightarrow AH=\dfrac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}$

در مثلث قائم الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین:

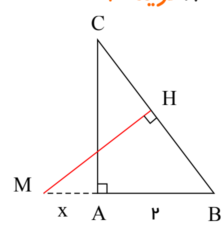
$$AM = BM = MC = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AHM}: AH^{۲} + HM^{۲} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow \frac{۱۲}{۷} + HM^{۲} = \frac{۷}{۴} \to HM^{۲} = \frac{۷}{۴} - \frac{۱۲}{۷} = \frac{۱}{۲۸}$$

$$\to HM = \frac{۱}{\sqrt{۲۸}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AMH}}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times BC}{\frac{۱}{۲}AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{\sqrt{۷}}{\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AMH}}} = ۱۴$$

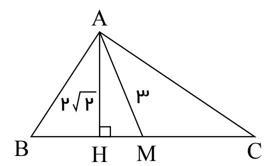
۱۰. گزینه ۲



$$BC^{۲} = ۳۶ + ۴ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow BH = CH = \sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle H = \angle A = ۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BMH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} = \frac{X+۲}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow X = ۸$$

۱۱. گزینه ۳ دقت کنید در شکل وتر BC بزرگترین ضلع و AB کوچکترین ضلع است پس AC ضلع متوسط می‌باشد.

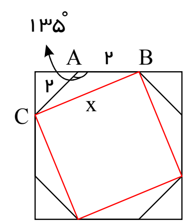


$$\begin{cases} BC = ۶ \\ MC = ۳ \end{cases}$$ میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس

در مثلث AHM با توجه به رابطه فیثاغورس $HM = ۱$

پس در مثلث AHC: $AC = \sqrt{HC^{۲} + AH^{۲}} = ۲\sqrt{۶}$

۱۲. گزینه ۲ باتوجه به مثلث ABC و قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



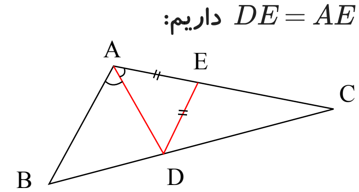
$$x^{۲} = ۴ + ۴ - ۲ \times ۲ \times ۲\cos ۱۳۵ \Rightarrow x^{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

۱۳. گزینه ۱

قسمت هاشورخورده مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$ است.

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳\sqrt{۳})^{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

۱۴. گزینه ۲ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{D}_{۱} = \hat{A}_{۱}$. چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_{۲} = \hat{A}_{۲}$، بنابراین $DE = AE$ داریم:



$$۵AB = ۳AC = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲۰ \\ AB = ۱۲ \end{cases}$$

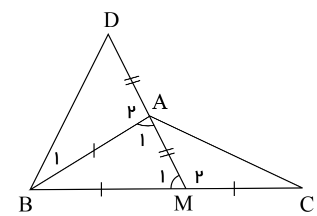
$$DE||AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DE}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{۱۲}=\frac{EC}{۲۰} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{۱۲}=\frac{EC}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{۱۲}{۲۰} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{EC}=\frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰}{EC}=\frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow EC=۱۲٫۵$$

۱۵.گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:



$$AB=BM \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{M}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{M}_۲$$

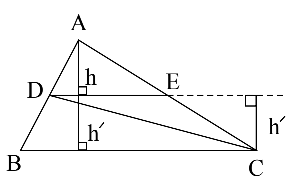
$$\left.\begin{array}{l} AB=MC \\ AD=AM \\ \hat{A}_۲=\hat{M}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}$$

طبق فرض: $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{D}=۶۱^\circ$

زاویه‌ی خارجی مثلث ABD: $\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱+\hat{D}=۶۱^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱=۶۱^\circ \Rightarrow A\hat{B}C=۱۸۰-۶۱-۶۱=۵۸$

۱۶.گزینه ۴

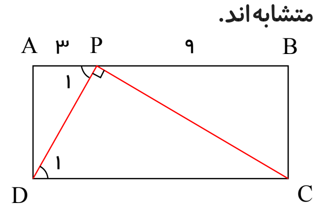
چون $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ است پس $\frac{AD}{DB}=\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.



$$DE||BC \xrightarrow{\text{رابطه‌ی تالس در } \overset{\Delta}{ABC}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{h}{h'}=\frac{۳}{۴}$$

پس: $\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{DE\times h}{۲}}{\frac{DE\times h'}{۲}}=\frac{h}{h'}=\frac{۳}{۴}=۰٫۷۵$

۱۷.گزینه ۴ دو زاویه‌ی $\hat{P}_۱ , \hat{D}_۱$ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب مساوی‌اند. پس دو مثلث قائم الزاویه ADP , PDC متشابه‌اند.



$$\overset{\Delta}{APD} \sim \overset{\Delta}{DPC} \Rightarrow \frac{DP}{DC}=\frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^۲=AP\cdot DC=۱۲\times۳=۳۶ \Rightarrow PD=۶$$

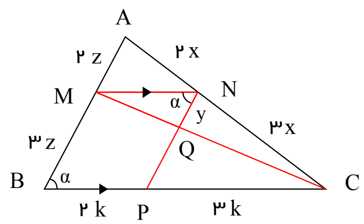
روش دوم: بنابر استدلال روش قبل در مثلث قائم الزاویه DPC می‌توان گفت مربع یک ضلع برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

اندازه‌ی AP با اندازه‌ی تصویر PD بر وتر برابر است، بنابراین:

$$PD^۲=AP\times DC=۱۲\times۳=۳۶ \rightarrow PD=۶$$

۱۸.گزینه ۱

فرض کنیم $AM=۲z$ و $MB=۳z$ باشد، حال طبق قضیه‌ی تالس $AN=۲x$ و $NC=۳x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN||BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم، با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم



$NQ = y$ داریم:

$$\frac{y}{۲}=\frac{۳x}{۲x+۳x}\Rightarrow y=\frac{۶}{۵}$$

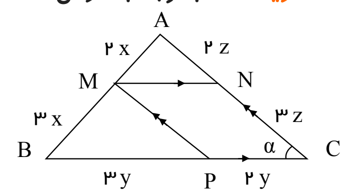
هم چنین باز بر طبق تالس:

$$\frac{NC}{NA}=\frac{CP}{BP}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{PC}{BP}\Rightarrow\begin{cases}PC=۳k\\BP=۲k=MN\end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$\frac{S\Delta MNQ}{SBMNP}=\frac{\frac{۱}{۲}\times MN\times NQ\times\sin\alpha}{MB\times BP\times\sin\alpha}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۲k\times\frac{۶}{۵}\times\sin\alpha}{۳\times ۲k\times\sin\alpha}=\frac{۱}{۵}=۲۰\%$$

.۱۹ گزینه ۱ باتوجه به فرض تست داریم:



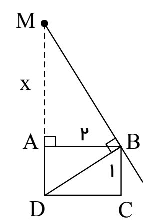
$$AM=\frac{۲}{۳}MB\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$$

$$MP||AC\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{SMNPC}{SABC}=\frac{۲y\times ۳z\times\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times ۵y\times ۵z\times\sin\alpha}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. توجه کنید که مساحت مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین دو ضلع می‌باشد.

.۲۰ گزینه ۳



$$\overset{\Delta}{ABD}\text{ فیثاغورس در}: BD^۲=AD^۲+AB^۲\Rightarrow BD=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\quad(۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABM}\text{ فیثاغورس در}: BM^۲=AB^۲+AM^۲\Rightarrow BM^۲=۴+x^۲\quad(۲)$$

$$\overset{\Delta}{BDM}\text{ فیثاغورس در}: MD^۲=BD^۲+MB^۲\xRightarrow{(۲),(۱)}(x+۱)^۲=۵+۴+x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۹+x^۲\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از سر دیگر این قطر، برابر $MD=۱+x=۵$ می‌باشد.

.۲۱ گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b<۷<۹\Rightarrow\frac{a}{۹}=\frac{۵}{۷}=\frac{۴}{b}\Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷},b=\frac{۲۸}{۵}$$

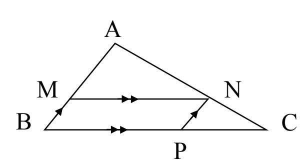
$$۷<b<۹\Rightarrow\frac{a}{۹}=\frac{۵}{b}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷},b=\frac{۳۵}{۴}$$

$$۷<۹<b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow\text{غیر قابل قبول}$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{۴۵}{۷}$ می‌باشد.

.۲۲ گزینه ۱

$MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:



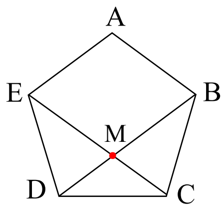
$$MN||BC\quad,\quad NP||AB$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\text{ترکیب در مخرج}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{BM}{AB}=\frac{۲}{۵}\quad(۱)$$

$$MN||BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\xRightarrow{MN=BP}\frac{BP}{BC}=\frac{۳}{۵}\quad(۲)$$

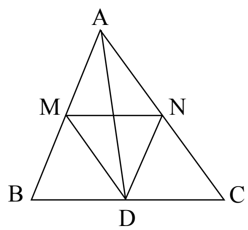
$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{MB\times BP\times\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}}\underset{\overline{\overline{\quad}}}{(۱),(۲)}\frac{\frac{۲}{۵}AB\times\frac{۳}{۵}BC}{\frac{۱}{۲}AB\times BC}=\frac{۱۲}{۲۵}=۰/۴۸=۴۸\%$$

.۲۳گزینه ۱



BD موازی AE و EC موازی AB است پس چهارضلعی $ABME$ متوازی الاضلاع است (رد گزینه ۴) و در آن نیز زاویه قائمه وجود ندارد (رد گزینه ۲ و ۳)

.۲۴گزینه ۴ **AN موازی MD و AM موازی ND است پس چهار ضلعی $AMDN$ متوازی الاضلاع است و چون AD قطر آن نیم ساز زاویه های آن نیز است پس چهار ضلعی لوزی است. در نتیجه قطرهای آن یعنی MN و AD ، عمود منصف اند.**



.۲۵گزینه ۲

$$\frac{(n+۲-۲)\times ۱۸۰}{n+۲}-\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=۲\Rightarrow\frac{۱۸۰n}{n+۲}-\frac{۱۸۰n}{n}+\frac{۳۶۰}{n}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۱۸۰n^{۲}-۱۸۰n(n+۲)}{n(n+۲)}+\frac{۳۶۰}{n}=۲\Rightarrow\frac{۱۸۰n^{۲}-۱۸۰n^{۲}-۳۶۰n}{n(n+۲)}+\frac{۳۶۰}{n}+۲$$

$$\Rightarrow\frac{۳۶۰}{n}-\frac{۳۶۰}{n+۲}=۲\Rightarrow n(n+۲)=۳۶۰\Rightarrow\begin{cases}n=۱۸ & \text{ق ق}\\ n=-۲۰ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

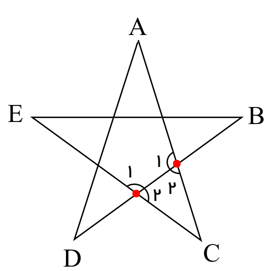
.۲۶گزینه ۲ **برای هر زاویه داخلی، یک زاویه خارجی وجود دارد که اگر زاویه داخلی حاده باشد، زاویه خارجی منفرجه است، حال اگر فرض کنیم ۴ زاویه حاده داخلی داشته باشیم مجموع زوایای خارجی آن ها بزرگ تر از ۳۶۰° می شود (همان طور که می دانید مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی ۳۶۰° است). پس حداکثر هر n ضلعی ۳ زاویه ی حاده دارد.**

.۲۷گزینه ۱

$\widehat{M}_{۲}$ زاویه خارجی مثلث $M\overset{\Delta}{E}B$ است: $\widehat{M}_{۲}=\widehat{E}+\widehat{B}$

$\widehat{N}_{۲}$ زاویه خارجی مثلث $A\widehat{D}N$ است: $\widehat{N}_{۲}=\widehat{A}+\widehat{D}$

و در مثلث $M\overset{\Delta}{N}C$ داریم:



$$\hat{C}+\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\hat{C}+\hat{A}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{B}=۱۸۰^{\circ}$$

.۲۸گزینه ۲

در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه هم هست پس $BH=CH=\frac{a}{۲}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{AHC} : \sin\frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{\frac{a}{۲}}{b} = \frac{a}{۲b}$$

$$? = \frac{b}{a}\sin\frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{۲b} = \frac{۱}{۲}$$

۲۹.گزینه ۳ ابتدا باید a را از طریق قضیه‌ی کسینوس‌ها به دست آوریم.

$$a^{۲}=(\sqrt{۳}+۱)^{۲}+(\sqrt{۳}-۱)^{۲}-۲(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)\cos ۶۰^{\circ}$$
$$\Rightarrow a^{۲}=۸-۴\times\frac{۱}{۲}=۶\Rightarrow a=\sqrt{۶}$$

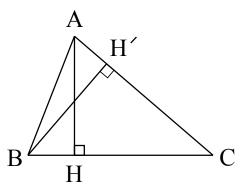
حال هم از قضیه‌ی سینوس‌ها $\widehat{B}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{\sin\widehat{B}}{\sqrt{۳}+۱}$$
$$\Rightarrow \sin\widehat{B}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱/۷+۱}{۲\times ۱/۴}=\frac{۲/۷}{۲/۸}$$

حال که می‌بینید $\sin\widehat{B}$ عبارتی ناآشنا است پس گزینه‌ی ۲ و ۴ که $\sin$ آن‌ها را می‌دانیم جواب نیست اما گزینه‌ی ۱ و ۳ و مقدار sinB عبارتی نزدیک به ۱ است، پس B زاویه‌ی نزدیک به ۹۰° است. پس عبارت درست گزینه‌ی ۳ است.

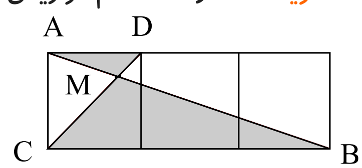
۳۰.گزینه ۳

$$S=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{BH'\times AC}{۲}\Rightarrow\frac{AH}{BH'}=\frac{AC}{BC}$$



توجه: به طور کلی نسبت ۲ ارتفاع مثلث عکس نسبت اضلاع متناظر آنهاست.

۳۱.گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC وتر AB برابر $\sqrt{۱۰}=\sqrt{۱+۹}$ است.

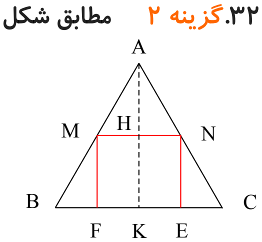


مثلثهای AMD و MBC متشابه‌اند زیرا $AD\parallel BC$ پس:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AD}{BC}\Rightarrow\frac{AM}{\sqrt{۱۰}-AM}=\frac{۱}{۳}$$
$$۴AM=\sqrt{۱۰}\Rightarrow AM=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

۳۲.گزینه ۲ مطابق شکل ارتفاع AK را رسم کرده داریم:

$$MN\parallel BC\Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AH}{AK}$$



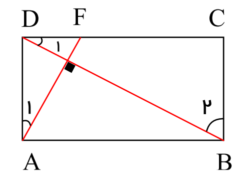
اگر طول ضلع مربع را x فرض کنیم با توجه به اینکه در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a طول ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است، پس:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AH}{AK}\Rightarrow\frac{x}{۱}=\frac{AK-HK}{AK}\Rightarrow x=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-x\Rightarrow x\left(\sqrt{۳}+۲\right)=\sqrt{۳}$$

$$x=\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}-۳$$

.۳۳ گزینه ۲ $\Delta ADF\sim\Delta DBC$ زیرا دو زاویه مساوی دارند.



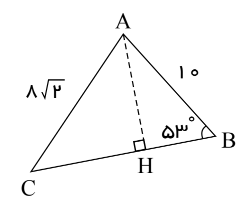
$$\begin{cases}\angle D=\angle C=۹۰^\circ\\ \angle D_۱=\angle A_۱\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{ADC}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{DF}{BC}=\frac{AF}{DB}\Rightarrow\frac{AD}{۳AD}=\frac{DF}{\frac{۱}{۳}AB}$$

پس $DF=\frac{۱}{۹}AB$ و $AB=۹DF$ بنابراین $DC=۹DF$

نکته: اگر طول مستطیل K برابر عرض مستطیل بود، $DC=K^۲DF$ است.

.۳۴ گزینه ۲ با استفاده از قانون $\sin$ها در مثلث ABC داریم:



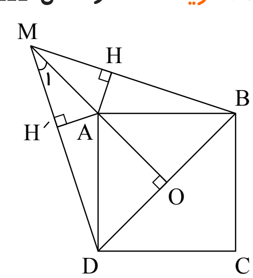
$$\frac{\sin ۵۳^\circ}{AC}=\frac{\sin\widehat{C}}{AB}\Rightarrow\frac{۰/۸}{۸\sqrt{۲}}=\frac{\sin\widehat{C}}{۱۰}\Rightarrow\sin\widehat{C}=\frac{۸}{۸\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون $\widehat{C}=۱۳۵^\circ$ نمی‌تواند باشد، لذا $\widehat{C}=۴۵^\circ$ اگر ارتفاع AH را رسم کنیم آنگاه $BH=AB\cos B\ ,\ CH=AC\cos C$ داریم:

$$BC=CH+BH=AC\times\cos\widehat{C}+AB\cos\widehat{B}=۸\sqrt{۲}\times\cos ۴۵^\circ+۱۰\times\cos ۵۳^\circ$$

$$=۸\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱۰\times\sqrt{۱-(۰/۸)^۲}\Rightarrow BC=۸+۱۰\times ۰/۶=۸+۶=۱۴$$

.۳۵ گزینه ۲ در شکل AH یا AH' مورد سؤال است.



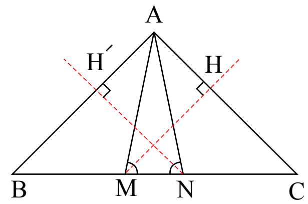
ارتفاع مثلث $=MO=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\Rightarrow MO=۲\sqrt{۳}$

$MA=MO-OA=۲\sqrt{۳}-۲$

در مثلث قائم الزاویه MAH' زاویه $M_۱$ برابر ۳۰ درجه است. پس ضلع روبه روی آن نصف وتر می‌باشد.

$$\hat{M}_۱=۳۰\Rightarrow AH'=\frac{۱}{۲}AM=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}-۲)=\sqrt{۳}-۱$$

.۳۶ گزینه ۲ با توجه به اینکه هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است، می توان دریافت که مثلث های AMC و ANB متساوی الساقین هستند.بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} \xrightarrow{\hat{A}=۸۰} \hat{B} = \hat{C} = ۵۰^\circ$$

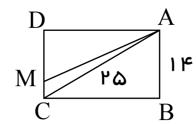
$$\overset{\Delta}{AMC}: AM = MC \Rightarrow \widehat{MAC} = \hat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow \hat{M_۱} = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۵۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ANB}: AN = BN \Rightarrow \widehat{BAN} = \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow \hat{N_۱} = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۵۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

با توجه به روابط فوق در مثلث MAN خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{MAN}: \widehat{MAN} + \hat{N_۱} + \hat{M_۱} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} + ۸۰^\circ + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = ۲۰^\circ$$

۳۷.گزینه ۲ **ابتدا با استفاده از روابط محاسبه‌ی مساحت مثلث و مستطیل ، طول DM را محاسبه می‌کنیم:**



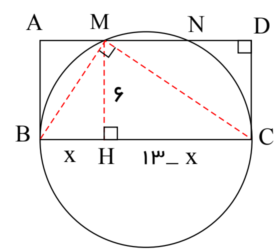
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{S_{ABCM}} = \frac{۵}{۹} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{S_{ABCD}} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲} \times DM \times AD}{AD \times AB} = \frac{۵}{۱۴} = \frac{DM}{۱۴} = \frac{۵}{۷}$$
$$\Rightarrow DM = ۱۰$$

حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث ابتدا طول AD و سپس طول AM را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ \Rightarrow ۲۵^۲ = AD^۲ + ۱۴^۲ \Rightarrow AD^۲ = ۶۲۵ - ۱۹۶ = ۴۲۹$$

$$\overset{\Delta}{AMD}: AM^۲ = AD^۲ + DM^۲ \Rightarrow AM^۲ = ۴۲۹ + ۱۰۰ = ۵۲۹ \Rightarrow AM = ۲۳$$

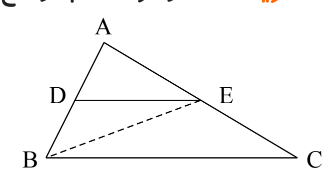
۳۸.گزینه ۳ **مثلث MBC در رأس M قائمه است چون دایره است و زاویه ی محاطی روبه رو به قطر ۹۰° است. حال در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه ی هندسی بین دو قطعه ی ایجاد شده بر وتر است. بنابراین:**



$$۶^۲ = x(۱۳ - x) \Rightarrow x^۲ - ۱۳x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = ۹ \end{cases}$$

بنابراین قطعه ی کوچک تر یعنی $BH = ۴$ می باشد و در نتیجه $AM = ۴$ و به همین ترتیب $ND = ۴$. در نتیجه $MN = ۱۳ - (۴+۴) = ۵$.

۳۹.گزینه ۲ **در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.**



$$\frac{SEBC}{SAEB} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{۵}{۴}$$
$$\frac{SEBD}{SAEB} = \frac{BD}{AB} = \frac{۵}{۹}$$

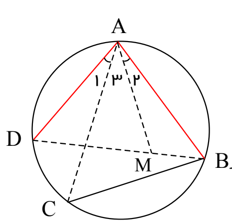
دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{SEBC}{SAEB}}{\frac{SEBD}{SAEB}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{SEBC}{SEBD} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۴۰.گزینه ۱

چون $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ ، پس $\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۲ + \widehat{A}_۳$ ؛ و در نتیجه، $C\widehat{A}B = M\widehat{A}D$.

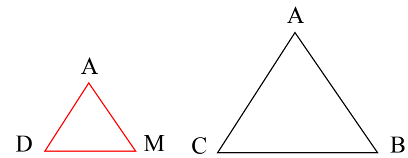
هم چنین:



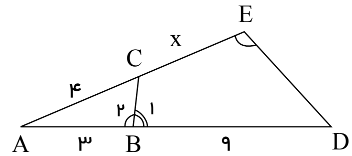
$$A\widehat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = A\widehat{D}M$$

بنابراین، دو مثلث ACB و ADM بنابر سه زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{DM}{BC}\Rightarrow AD\cdot BC=AC\cdot DM$$



۴۱.گزینه ۱



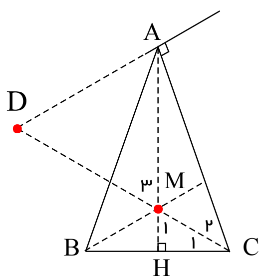
$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{B}_۲+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\rightarrow\hat{E}=\hat{B}_۲$$

دو مثلث ABC و AED متشابه هستند ($\hat{A}$ مشترک و $\hat{E}=\hat{B}_۲$) اکنون نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}\rightarrow\frac{۴}{۳+۹}=\frac{۳}{x+۴}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{x+۴}\Rightarrow x=۵$$

۴۲.گزینه ۱

در مثلث متساوی الساقین ABC ارتفاع AH نیمساز نیز می باشد. داریم:

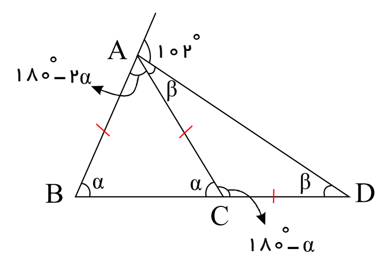


قائم‌الزاویه است $\overset{\Delta}{MHC}:\hat{M}_۱+\hat{C}_۱=۹۰^\circ\rightarrow\hat{M}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}_۱\xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C}_۲}\hat{M}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}_۱\quad(I)$

قائم‌الزاویه است $\overset{\Delta}{DAC}:\hat{D}+\hat{C}_۲=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{D}=۹۰^\circ-\hat{C}_۲\xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C}_۲}\hat{D}=۹۰^\circ-\hat{C}_۱\quad(II)$

$I,II\Rightarrow\hat{M}_۱=\hat{D}\xrightarrow{\hat{M}_۱=\hat{M}_۳}\hat{D}=\hat{M}_۳\rightarrow$ **بنابراین مثلث AMD متساوی‌الساقین است و $AD=AM$ است.**

۴۳.گزینه ۴



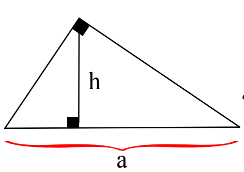
$$\overset{\Delta}{ACD}:\hat{\beta}+\hat{\beta}+۱۸۰^\circ-\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ\rightarrow\hat{\alpha}=۲\hat{\beta}\rightarrow\hat{\beta}=\frac{\hat{\alpha}}{۲}$$

$\overset{\Delta}{ABD}:A$ **زاویه‌ی خارجی رأس** $=\hat{B}+\hat{D}\rightarrow۱۰۲^\circ=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\rightarrow۱۰۲^\circ=\hat{\alpha}+\frac{\hat{\alpha}}{۲}$

$$\rightarrow۱۰۲^\circ=\frac{۳\hat{\alpha}}{۲}\rightarrow۳\hat{\alpha}=۲۰۴^\circ\rightarrow\hat{\alpha}=۶۸^\circ$$

پس: A **زاویه‌ی رأس** $=۱۸۰^\circ-۲\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ-۱۳۶^\circ=۴۴^\circ$

۴۴.گزینه ۱

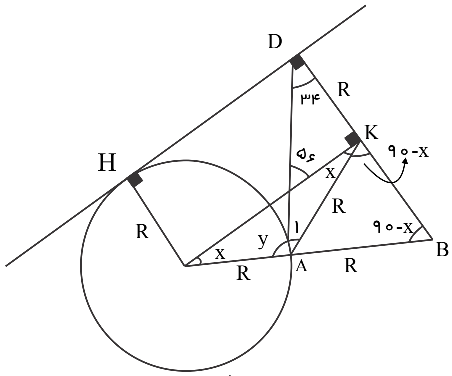


مساحت مثلث قائم‌الزاویه $=\frac{۱}{۸}\times$ **مجذور وتر** $\rightarrow\frac{a\times h}{۲}=\frac{۱}{۸}a^۲\rightarrow h=\frac{۱}{۴}a$

در مثلث قائم‌الزاویه اگر ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر باشد زوایا به‌صورت $۹۰^\circ, ۷۵^\circ, ۱۵^\circ$ هستند پس کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث ۱۵° است.

۴۵.گزینه ۳

بعد از رسم شکل عمود OK را بر BD رسم می‌کنیم. در این صورت $OHDK$ مستطیل و مثلث OBK قائم‌الزاویه است و AK میانه وارد بر وتر است بنابراین مثلث‌های OAK و



$$\left.\begin{array}{l} x+y+۵۶=۱۸۰ \\ y+۲x+۳۴=۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x+۳۴-۵۶=۰$$

$$\Rightarrow x=۲۲$$

$$x+y+۵۶=۱۸۰ \xrightarrow{x=۲۲} y=۱۰۲$$

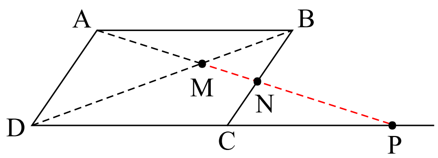
۴۶.گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} AM\|DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD}=\frac{BM}{MN} \\ AM\|EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC}=\frac{MN}{MC}\end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD}\times\frac{AE}{AC}=\frac{BM}{MN}\times\frac{MN}{MC}=۱ \Rightarrow AB\times AE=AD\times AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow{\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}}\frac{AD}{AE}=\frac{۲}{۳}$$

۴۷.گزینه ۴

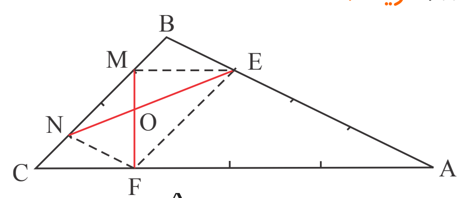
از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} BN(\|AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM}=\frac{BM}{MD} \\ AB\|DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD}=\frac{AM}{MP}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM}=\frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^{۲}=MN\times MP$$

۴۸.گزینه ۱



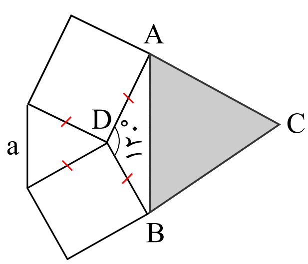
$\frac{BE}{EA}=\frac{CF}{FA}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF\parallel BC \Rightarrow$ MNFE ذوزنقه است

MNEF در ذوزنقه $\Rightarrow S_{M\overset{\triangle}{E}F}=S_{N\overset{\triangle}{E}F}$

(زیرا ارتفاع و قاعده مشترک دارند.) $\xrightarrow{OO\overset{\triangle}{E}F} S_{M\overset{\triangle}{O}E}=S_{O\overset{\triangle}{N}F}$

$$\left.\begin{array}{l} MB=CN \text{ از طرفی} \\ C\overset{\triangle}{N}F\,,\ M\overset{\triangle}{B}E \text{ دارای ارتفاع برابر هستند}\end{array}\right\} \Rightarrow S_{M\overset{\triangle}{B}E}=S_{C\overset{\triangle}{N}F} \Rightarrow S_{MOEB}=S_{NOFC}$$

۴۹.گزینه ۳



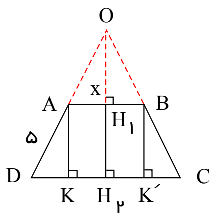
اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را a در نظر بگیریم، آن گاه در مثلث متساوی‌الساقین DAB $(DA=DB=a)$ با زاویه‌ی رأس ۱۲۰° طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$AB^{۲}=a^{۲}+a^{۲}-۲(a)(a)\cos ۱۲۰^\circ=۳a^{۲}\Rightarrow AB=a\sqrt{۳}$$

نسبت مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع سایه زده شده ABC به مساحت مثلث اصلی برابر است با:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a\sqrt{۳})^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}=۳$$

۵۰.گزینه ۲ **اگر ارتفاع‌های AK و BK' را رسم کنیم آنگاه دو مثلث قائم الزاویه ADK و $BK'C$ همنهشت می‌شوند پس $DK=K'C$ داریم:**



$$DK=\frac{CD-AB}{۲}=\frac{۱۵-۹}{۲}=۳$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ي DAK داریم:

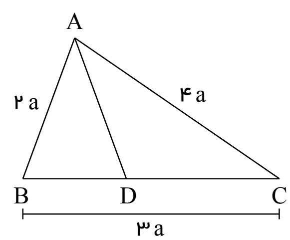
فیثاغورس : $AK=\sqrt{AD^۲-DK^۲}=\sqrt{۲۵-۹}=۴\Rightarrow H_۱H_۲=۴$

از طرفی $AB||DC$ است پس در مثلث تالس می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{ODH_۲}:\frac{OH_۱}{OH_۲}=\frac{AH_۱}{DH_۲}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱۵}{۲}}\Rightarrow ۵x=۳x+۱۲\Rightarrow x=۶$$

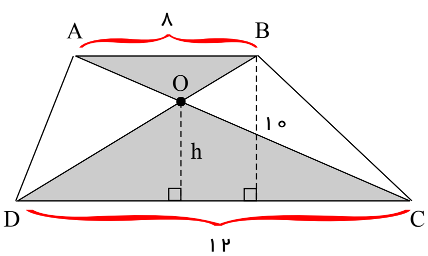
۵۱.گزینه ۳

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲a}{۴a}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{SABD}{SABC}=\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۳}$$



۵۲.گزینه ۳

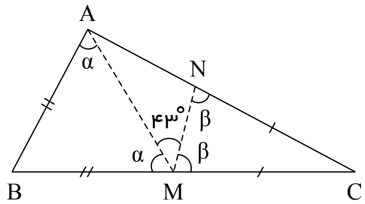
دو مثلث OAB و OCD متشابه هستند. بنابراین نسبت ارتفاعها با نسبت اضلاع، مساوی است.



$$\frac{h}{۱۰-h}=\frac{۱۲}{۸}\rightarrow\frac{h}{۱۰-h}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲h=۳۰-۳h\rightarrow ۵h=۳۰\rightarrow h=۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{OBC}}=S_{\overset{\Delta}{BCD}}-S_{\overset{\Delta}{OCD}}=(\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۲)-(\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۲)=۶۰-۳۶=۲۴$$

.۵۳گزینه ۲



$$\rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}+۴۳^{\circ}=۱۸۰^{\circ} \rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}=۱۳۷^{\circ}$$

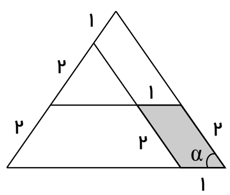
$$\hat{B}+\hat{\alpha}+\hat{\alpha}=۱۸۰^{\circ} \rightarrow ۲\hat{\alpha}=۱۸۰^{\circ}-\hat{B} \rightarrow \hat{\alpha}=۹۰^{\circ}-\frac{\hat{B}}{۲}$$

$$\hat{C}+\hat{\beta}+\hat{\beta}=۱۸۰^{\circ} \rightarrow ۲\hat{\beta}=۱۸۰^{\circ}-\hat{C} \rightarrow \hat{\beta}=۹۰^{\circ}-\frac{\hat{C}}{۲}$$

از طرفی: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۱۳۷^{\circ} \rightarrow ۹۰^{\circ}-\frac{\hat{B}}{۲}+۹۰^{\circ}-\frac{\hat{C}}{۲}=۱۳۷^{\circ} \rightarrow \frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۴۳^{\circ} \rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۸۶^{\circ}$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^{\circ} \rightarrow \hat{A}+۸۶^{\circ}=۱۸۰ \rightarrow \hat{A}=۹۴^{\circ}$$

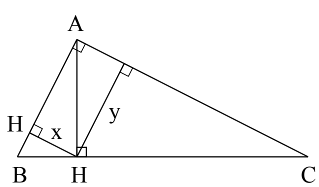
.۵۴گزینه ۱



$$\frac{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}}{\text{مساحت مثلث}}=\frac{۱\times ۲\times \sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵\times \sin\alpha}=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$$

توجه کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع a و b برابر $ab\sin\alpha$ و مساحت مثلث برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع یعنی $\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ است.

.۵۵گزینه ۱



مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث ABH را S' و مساحت مثلث ACH را S'' می‌نامیم.

$$\frac{S}{S'}=۶/۷۶ \rightarrow \frac{S'+S''}{S'}=۶/۷۶ \xrightarrow{\text{تفکیک}} ۱+\frac{S''}{S'}=۶/۷۶ \rightarrow \frac{S''}{S'}=۵/۷۶$$

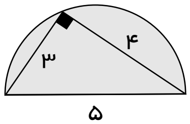
چون دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر مجذور نسبت تشابه است. لذا داریم:

$$\frac{S''}{S'}=۵/۷۶=k^{۲} \rightarrow k=۲/۴$$

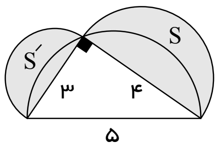
طراح سوال نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه را خواسته است که همان برابر نسبت تشابه است.

$$\frac{y}{x}=۲/۴=\frac{۲۴}{۱۰}=\frac{۱۲}{۵} \longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{۵}{۱۲}$$

.۵۶گزینه ۲



$$\rightarrow S_{\text{نیم‌دایره به قطر ۵}} = \frac{۱}{۲}\pi R^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۵}{۲})^{۲} = \frac{۲۵\pi}{۸}$$

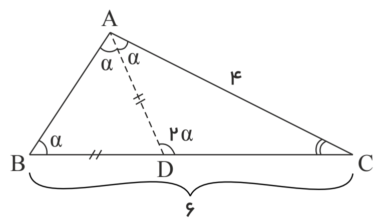


$$\rightarrow \begin{cases} S'_{\text{نیم‌دایره به قطر ۳}} = \frac{۱}{۲}\pi R^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۹\pi}{۸} \\ S''_{\text{نیم‌دایره به قطر ۴}} = \frac{۱}{۲}\pi R^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۴}{۲})^{۲} = ۲\pi \end{cases}$$

$$S_{\text{سایه‌زده}} = \left(S'_{\text{نیم‌دایره به قطر ۳}} + S''_{\text{نیم‌دایره به قطر ۴}}\right) - \left(S_{\text{نیم‌دایره به قطر ۵}} - S'_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}}\right)$$

$$= (\frac{۹\pi}{۸} + ۲\pi) - (\frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۳ \times ۴}{۲}) = ۶$$

۵۷.گزینه ۲ در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی رأس A را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ACD به علت برابری دو زاویه، متشابه هستند.



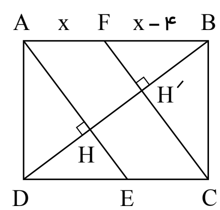
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ACD} \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{۴}{CD} = \frac{۶}{۴}$$

$$\rightarrow CD = \frac{۸}{۳} \;,\quad BD = ۶ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است پس $AD = BD = \frac{۱۰}{۳}$.

$$\text{نسبت تشابه:} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{AB}{\frac{۱۰}{۳}} = \frac{۴}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۶}{۴} \rightarrow AB = ۵$$

۵۸.گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABD} : AB^{۲} + AD^{۲} = BD^{۲} \rightarrow ۴^{۲} + ۳^{۲} = BD^{۲} \rightarrow BD = ۵$$

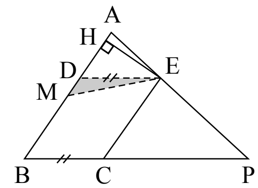
$$\overset{\Delta}{ABD} : AD^{۲} = DH \times BD \rightarrow ۹ = DH \times ۵ \rightarrow \begin{cases} DH = \frac{۹}{۵} \\ BH' = \frac{۹}{۵} \end{cases}$$

$$\rightarrow HH' = BD - DH - BH' = ۵ - \frac{۹}{۵} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : FH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BH'}{BH} \rightarrow \frac{۴ - x}{۴} = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۹}{۱۶} \rightarrow ۱۶ - ۴x = ۹ \rightarrow x = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{AFCE} = AD \times AF = ۳ \times x = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

۵۹.گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{PEC} \sim \overset{\Delta}{APB} \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{PEC}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}} = (\frac{PC}{PB})^{۲} = (\frac{۲}{۳})^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

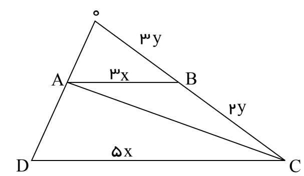
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{APB} \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{APE}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}} = (\frac{DE}{BP})^{۲} = (\frac{BC}{BP})^{۲} = (\frac{۱}{۳})^{۲} = \frac{۱}{۹}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۲} \times DM \times HE \\ S_{DECB} = BE \times HE = ۲DM \times HE \end{array}\right\} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۴} S_{DECB}$$

$$S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}} - S_{\overset{\Delta}{ADE}} - S_{\overset{\Delta}{ECP}}) = \frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}} - \frac{۱}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}} - \frac{۴}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}) = \frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}) = \frac{۱}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DEM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABP}}} = \frac{۱}{۹}$$

۶۰.گزینه ۴



$$AB || DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{DC} = \frac{OB}{OC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} OB = ۳y \\ OC = ۵y \end{cases}$$

از طرفی مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع یکسانی دارند پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۳S \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} ۲S = \frac{۱}{۲} \times ۳x \times h \Rightarrow xh = \frac{۴S}{۳} \end{cases}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۸x}{۲} \times h = ۴xh = ۴ \times \frac{۴s}{۳} = \frac{۱۶s}{۳}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAC}}}{S_{\text{ذوزنقه}}} = \frac{۵s}{\frac{۱۶s}{۳}} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۳۴۵۲۰

۱- ۳	۲- ۳	۳- ۴	۴- ۳	۵- ۴
۶- ۳	۷- ۳	۸- ۲	۹- ۴	۱۰- ۲
۱۱- ۳	۱۲- ۲	۱۳- ۱	۱۴- ۲	۱۵- ۳
۱۶- ۴	۱۷- ۴	۱۸- ۱	۱۹- ۱	۲۰- ۳
۲۱- ۲	۲۲- ۱	۲۳- ۱	۲۴- ۴	۲۵- ۲
۲۶- ۲	۲۷- ۱	۲۸- ۲	۲۹- ۳	۳۰- ۳
۳۱- ۲	۳۲- ۲	۳۳- ۲	۳۴- ۲	۳۵- ۲
۳۶- ۲	۳۷- ۲	۳۸- ۳	۳۹- ۲	۴۰- ۱
۴۱- ۱	۴۲- ۱	۴۳- ۴	۴۴- ۱	۴۵- ۳
۴۶- ۳	۴۷- ۴	۴۸- ۱	۴۹- ۳	۵۰- ۲
۵۱- ۳	۵۲- ۳	۵۳- ۲	۵۴- ۱	۵۵- ۱
۵۶- ۲	۵۷- ۲	۵۸- ۱	۵۹- ۲	۶۰- ۴