فصل ششم: تبدیلات تنش و کرنش

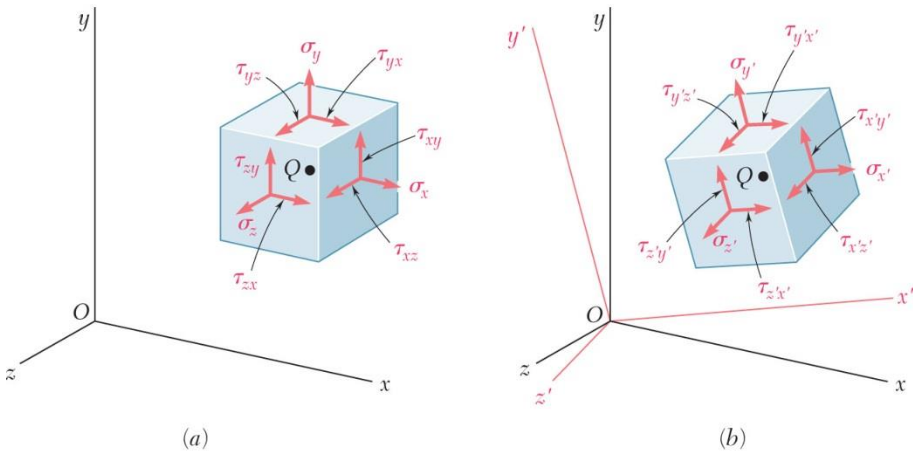
مقدمه:

کلی‌ترین حالت تنش در یک نقطه را می‌توان با ۶ مؤلفه نشان داد:

$$\sigma_x\,,\,\sigma_y\,,\,\sigma_z\,,\,\tau_{xy}\,,\,\tau_{yz},\,\tau_{zx}$$
$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\,\tau_{yz}=\tau_{zy},\,\tau_{zx}=\tau_{xz} \qquad (۶-۱)$$

در صورت چرخش محورها، همان حالت تنش با مجموعه دیگری از مؤلفه‌ها نمایش داده می‌شود.

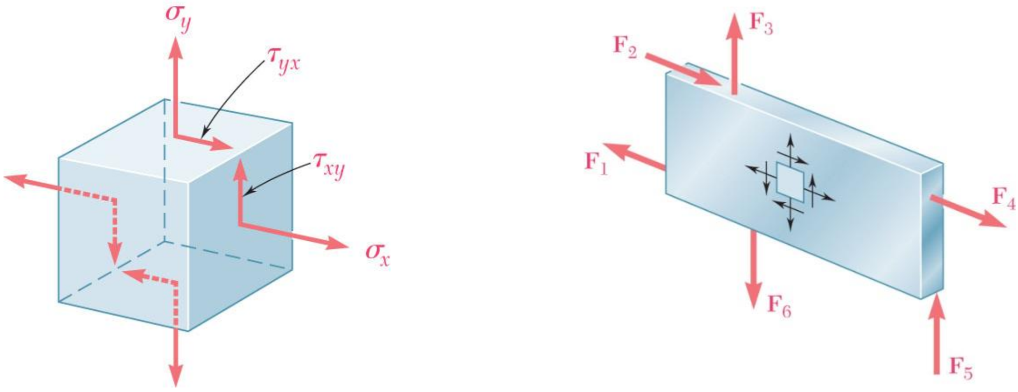
سپس به تحلیلی مشابه برای تبدیل مؤلفه‌های کرنش می‌پردازیم.



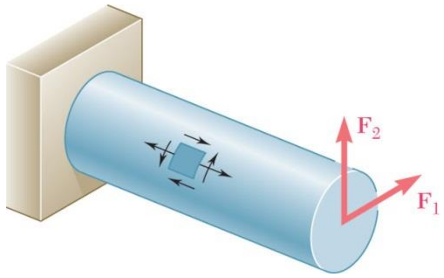
××

تنش صفحه‌ای: حالتی از تنش که در آن دو وجه از المان مکعبی عاری از تنش هستند.

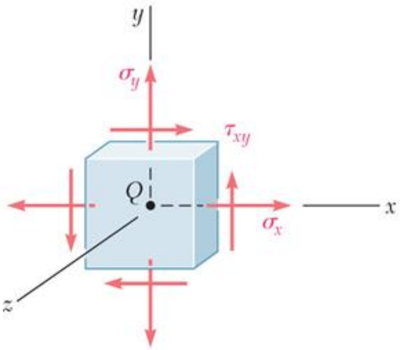
حالت تنش صفحه‌ای در ورقی نازک که نیروها در امتداد صفحه میانی آن وارد می‌شوند روی می‌دهد.

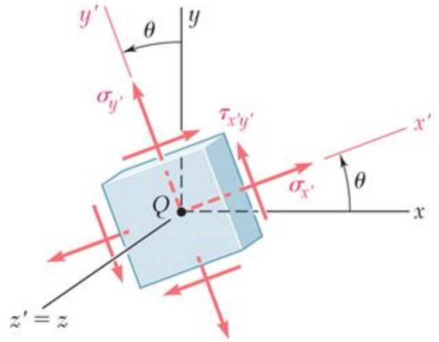


××



حالت تنش صفحه‌ای در هر نقطه از سطوح آزاد اجسام که در معرض نیروی خارجی نباشد نیز اتفاق می‌افتد.

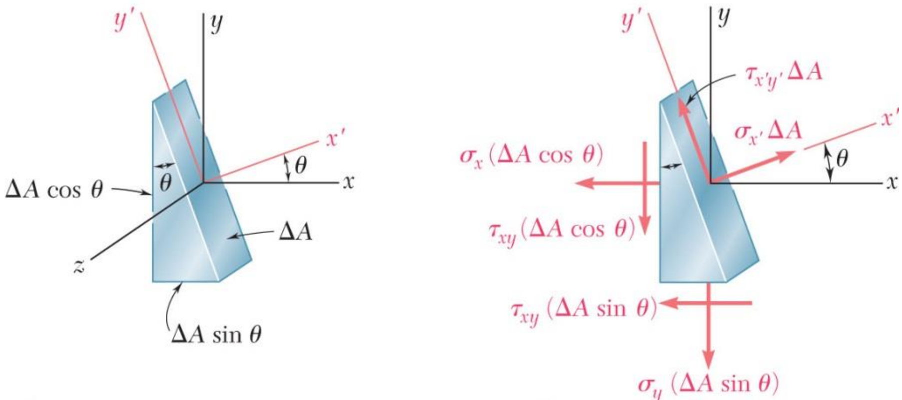




××××××××××××××××××××××××××××××××

تبدیل تنش صفحه‌ای

به این منظور المانی منشوری را در نظر بگیرید که وجوه آن بر محورهای x ، y و x' عمود باشد.



(a) (b)

××

$$\sum F_{x'}=0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x'}\Delta A-\sigma_x\left(\Delta A\cos\theta\right)\cos\theta-\tau_{xy}\left(\Delta A\cos\theta\right)\sin\theta-\sigma_y\left(\Delta A\sin\theta\right)\sin\theta-\tau_{xy}\left(\Delta A\sin\theta\right)\cos\theta=0$$

$$\sum F_{y'}=0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{x'y'}\Delta A+\sigma_x\left(\Delta A\cos\theta\right)\sin\theta-\tau_{xy}\left(\Delta A\cos\theta\right)\cos\theta-\sigma_y\left(\Delta A\sin\theta\right)\cos\theta+\tau_{xy}\left(\Delta A\sin\theta\right)\sin\theta=0$$

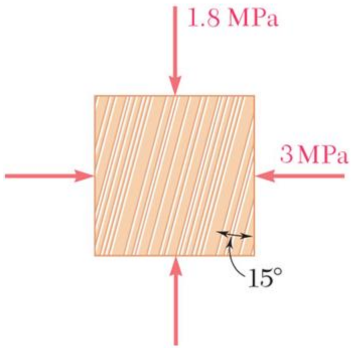
××

با ساده کردن این معادلات بدست می‌آید:

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta \qquad , \qquad \sigma_{y'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (۶-۲)$$

$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

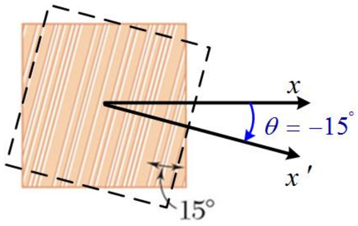
این معادلات را معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای می‌نامیم.



××

مثال ۶-۱

تنش برشی موازی و تنش نرمال عمود بر رگه‌های المان چوبی مقابل را تعیین کنید.



مطابق با شکل اگر از محور x به مقدار۱۵° ساعتگرد بچرخیم

به راستای ´x در المان جدید می‌رسیم. بنابراین: $\theta = -15^\circ \quad \rightarrow \quad 2\theta = -30^\circ$

××

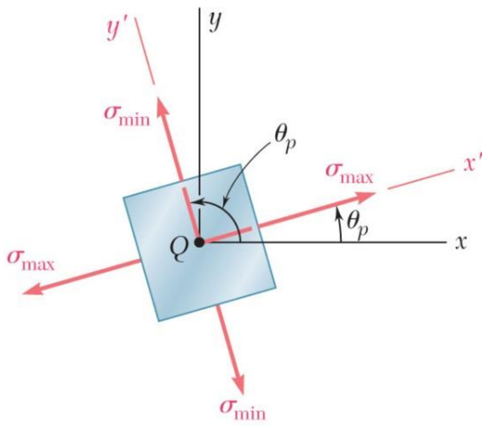
ضمناً داریم: $\sigma_x = -3 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_y = -1.8 \text{ MPa} \quad , \quad \tau_{xy} = 0$

حال از معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای در (۶-۲) بدست می‌آید:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = \frac{-3-1.8}{2} + \frac{-3+1.8}{2}\cos(-30^\circ) + 0 = -2.92 \text{ MPa}$$

××

تبدیل تنش صفحه‌ای



اگر در معادلات (۶-۲) از تنش σ یا τ نسبت به θ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم زوایایی بدست می‌آید که تنش در آن‌ها ماکزیمم یا مینی‌موم است.

زاویه‌ای که تنش نرمال در آن ماکزیمم یا مینی‌موم باشد زاویه یا جهت اصلی نام دارد.

جهت اصلی مربوط به تنش نرمال ماکزیمم با جهت اصلی مربوط به تنش نرمال مینی‌موم زاویه °۹۰ می‌سازد.

××

تنش‌های اصلی

مقادیر تنش‌های اصلی از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (۶-۳)$$

زاویه جهت‌های اصلی با محور x برابر است با:

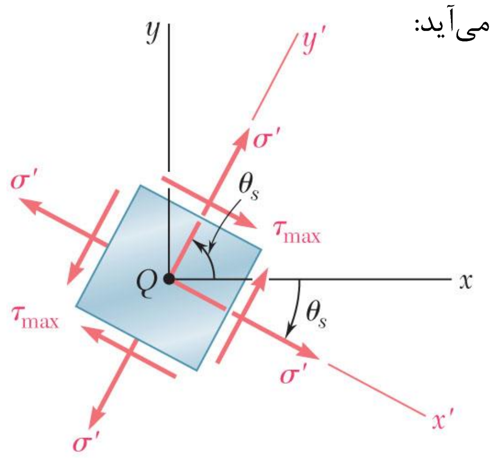
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (۶-۴)$$

تنش‌های برشی ماکزیمم هم در دو جهت که با هم زاویه ۹۰° می‌سازند ایجاد می‌شوند.

جهت‌های تنش برشی ماکزیمم با جهت‌های تنش اصلی زاویه ۴۵° درجه می‌سازند.

××

مقدار و جهت تنش‌های برشی ماکزیمم (داخل صفحه) از روابط زیر بدست می‌آید:

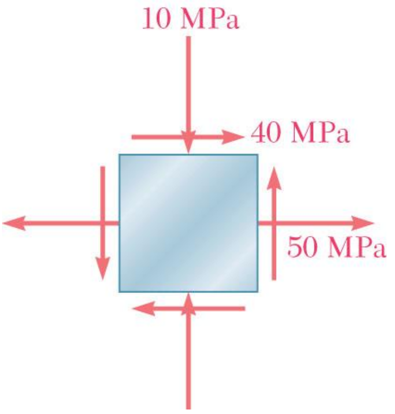


$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (۶-۵)$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (۶-۶)$$

مقدار تنش نرمال در صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم مساوی است با:

(۶-۷)



××

مثال ۶-۲

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، الف) صفحه‌های اصلی،

ب) تنشهای اصلی، ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش نرمال متناظر با آن را بیابید.

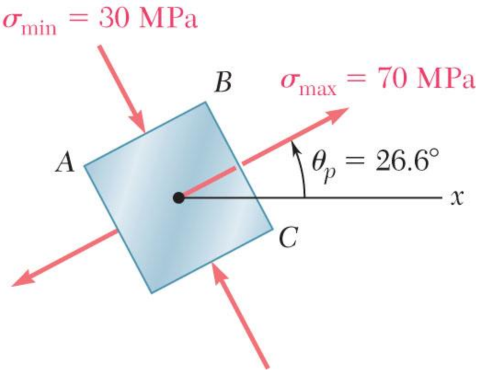
حل: مقادیر تنش‌ها در المان برابر است با:

تنش‌های اصلی از رابطه (۶-۳) بدست می‌آید:

$$\sigma_{\max,\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{50+(-10)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{50-(-10)}{2}\right)^2+(40)^2}=20\pm 50\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\sigma_{\max}=70\,\text{MPa}\\ \sigma_{\min}=-30\,\text{MPa}\end{array}\right.$$

××

برای یافتن جهت تنش‌های اصلی از رابطه (۶-۴) استفاده می‌کنیم:

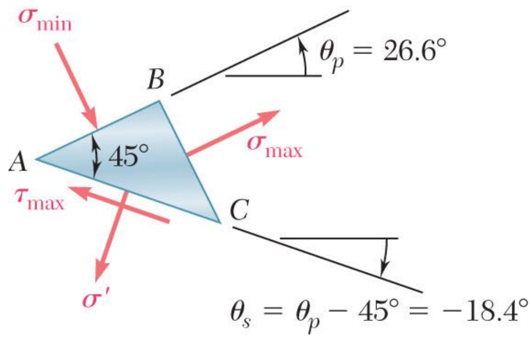


$$\Rightarrow\quad \theta_p=\frac{\tan^{-1}(1.333)}{2}\quad\Rightarrow\quad \theta_p=\left|\begin{array}{l}\dfrac{53.1^\circ}{2}=26.6^\circ\\ \dfrac{53.1^\circ}{2}+90^\circ=116.6^\circ\end{array}\right.$$

مطابق با شکل تنش برشی در صفحات تنش اصلی برابر صفر است.

××

تنش برشی ماکزیمم هم برابر است با:



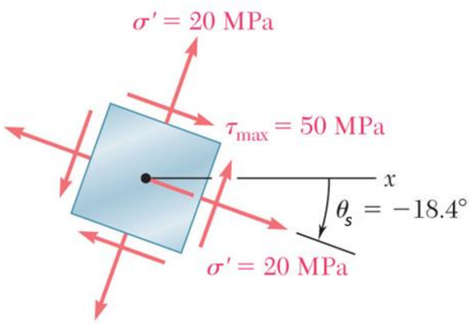
$$\tau_{\max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\sqrt{(30)^2+(40)^2}=50\text{ MPa}$$

زوایای متناظر با تنش برشی ماکزیمم را می‌توان از رابطه

(۶-۶) یا بصورت زیر حساب کرد:

××

تنش نرمال متناظر با تنش برشی ماکزیمم هم مساوی تنش میانگین است:



××

دایره موهر برای تنش صفحه‌ای

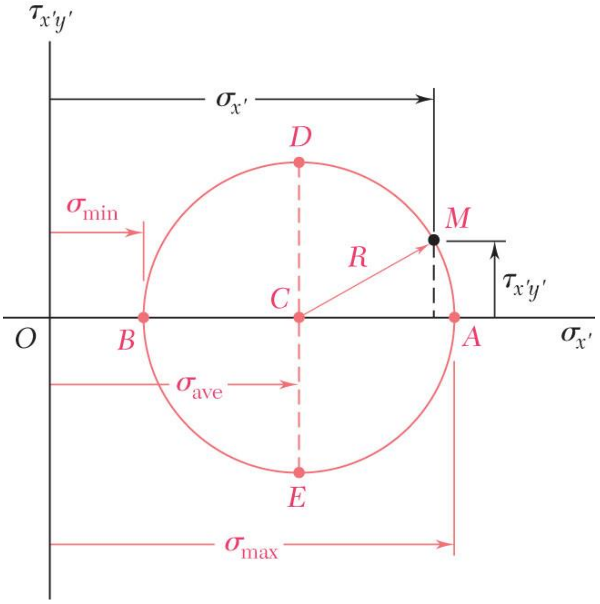
یک روش گرافیکی برای بیان روابط بخش قبل استفاده از دایره موهر است.

اگر رابطه اول و دوم معادله (۶-۲) را با هم ترکیب کنیم رابطه پارامتری یک دایره بدست می‌آید:

$$\left(\sigma_{x'} - \sigma_{ave}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (۶-۸)$$

این دایره را دایره موهر می‌نامیم.

مختصات مرکز دایره موهر برابر است با:



(۶-۹)

××

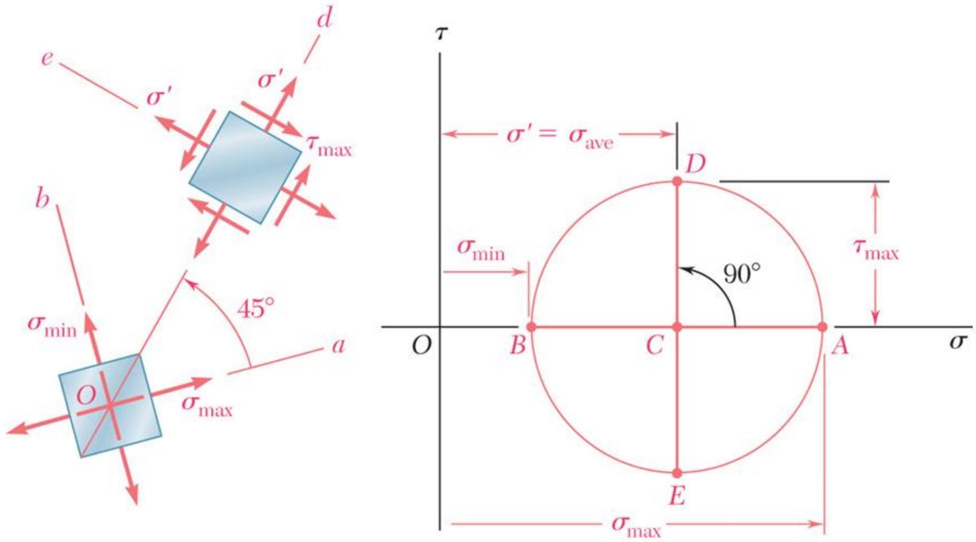
شعاع دایره موهر هم مساوی است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (۶-۱۰)$$

(۶-۱۱)

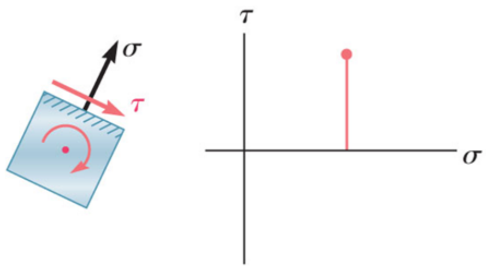
××

(۶-۱۲)



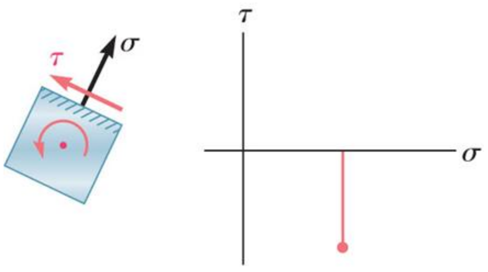
××

قرارداد تنش برشی در دایره موهر (فقط در دایره موهر):



(*a*) Clockwise ⟶ Above

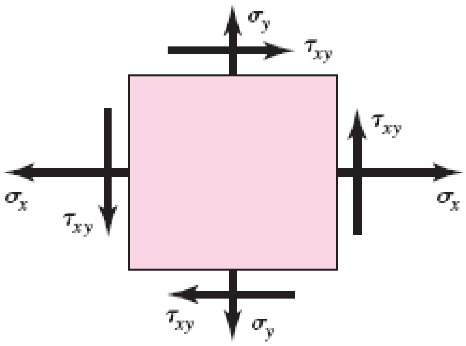
تنشهای برشی که تمایل به چرخاندن ساعتگرد (cw) المان دارند بالای محور σ رسم می‌شوند.



(b) Counterclockwise ⟶ Below

×××

در شکل زیر در وجوه عمودی المان، تنش برشی چون تمایل به چرخاندن پادساعتگرد المان دارد پایین محور σ رسم می‌شود.

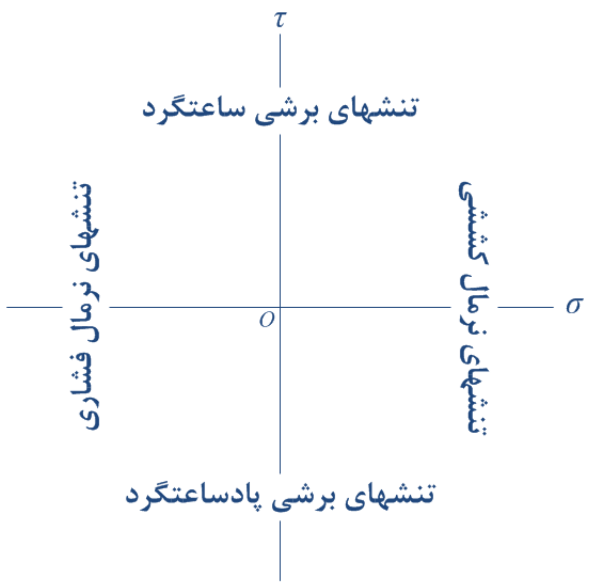


×××

روش رسم دایره موهر

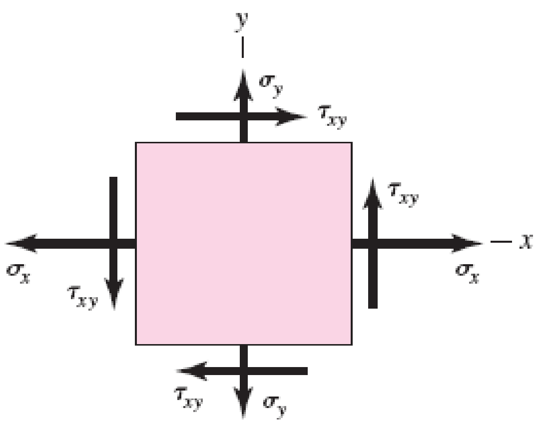
دستگاه مختصاتی تشکیل می‌دهیم که محور افقی آن تنش نرمال σ و محور قائم آن تنش برشی τ باشد.

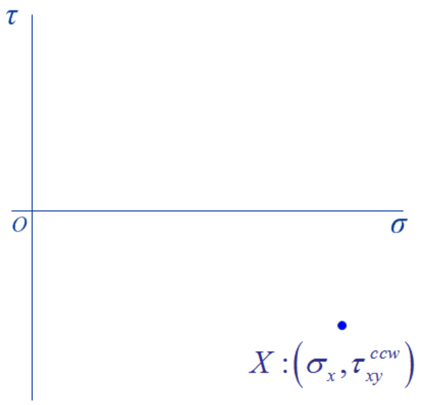
در محور افقی تنشهای نرمال کششی در سمت راست مبدأ و تنشهای نرمال فشاری در سمت چپ مبدأ رسم می‌شوند.



××

برای رسم دایره موهر ابتدا به وجوه عمودی المان توجه می‌کنیم.

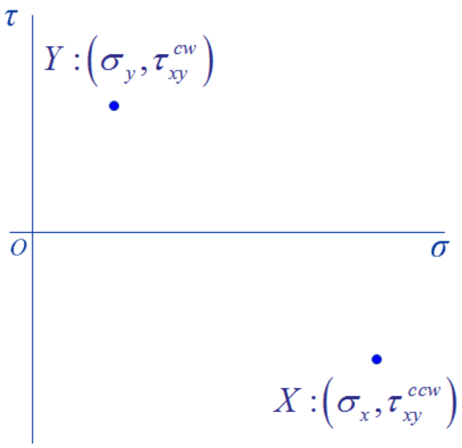




چون تنش برشی τ_{xy} در این وجوه می‌خواهد المان را پادساعتگرد بگرداند باید پایین مبدأ رسم شود.

بنابراین نقطه X با مختصات $\left(\sigma_x,\tau_{xy}^{ccw}\right)$ مطابق با شکل در ربع چهارم ترسیم می‌گردد.

××

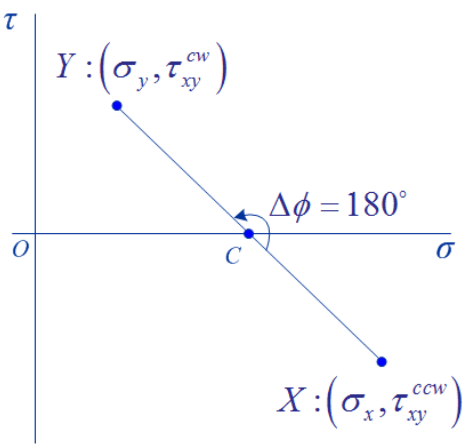


سپس به وجوه افقی المان توجه می‌کنیم.

چون σ_y کششی است پس باید سمت راست مبدأ قرار گیرد.

بنابراین نقطه Y با مختصات $\left(\sigma_y,\tau_{xy}^{cw}\right)$ مطابق با شکل در ربع اول ترسیم می‌گردد.

××

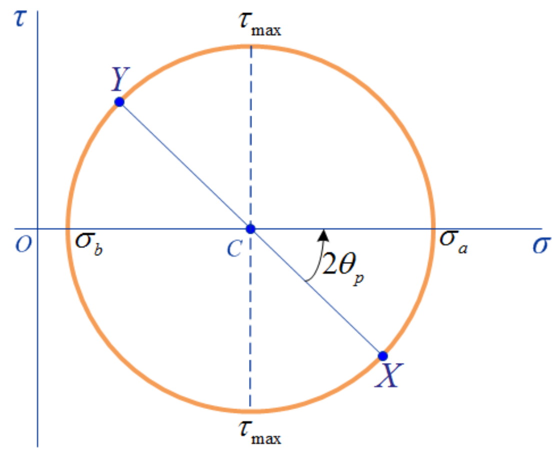


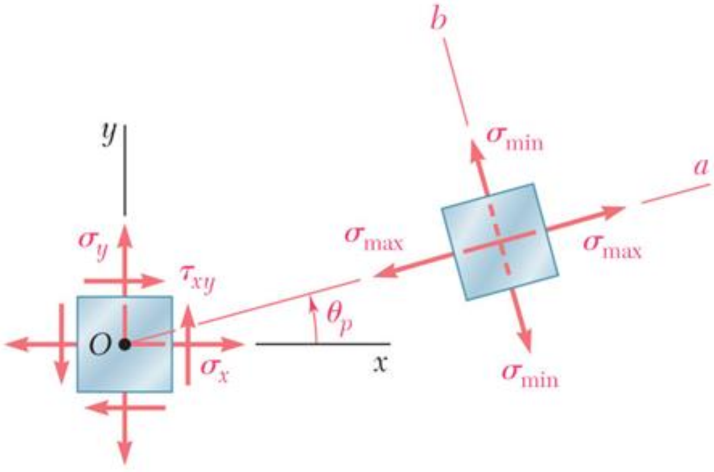
پاره‌خط XY که همان قطر دایره موهر است را رسم می‌کنیم.

محل برخورد این پاره‌خط با محور σ یعنی نقطه C مرکز دایره خواهد بود.

از آنجا که دو حالت تنش X و Y در المان با هم زاویه ۹۰° می‌سازند زاویه آنها از هم در دایره موهر برابر $\Delta\phi = ۱۸۰^\circ$ خواهد بود.

××



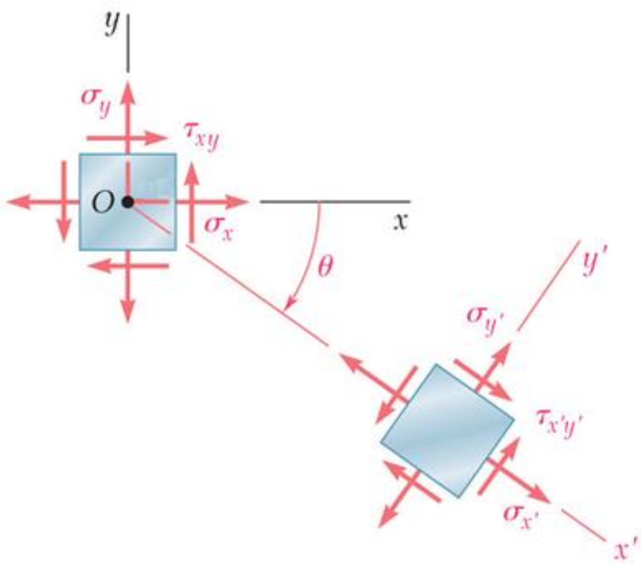


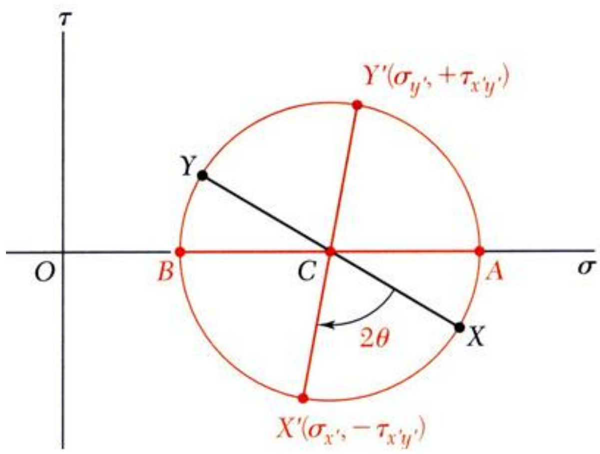
××

با استفاده از دایره موهر می‌توان حالت تنش یک نقطه را در هر جهت‌گیری دیگری از محورها بدست آورد.

مثلاً برای تعیین حالت تنش در زاویه θ ساعتگرد نسبت به محور xy

- قطر جدید $X'Y'$ که با قطر XY زاویه 2θ ساعتگرد می‌سازد رسم می‌کنیم.

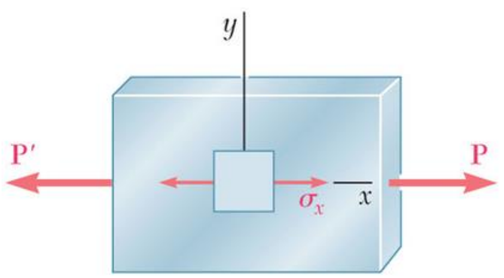




××

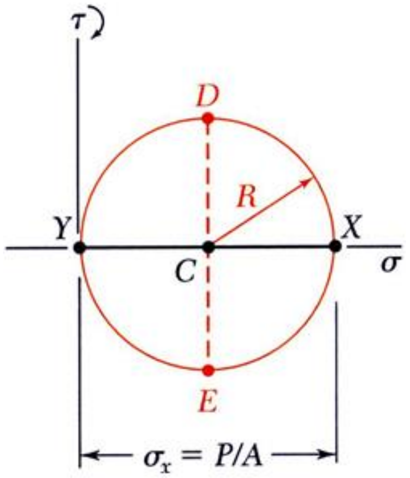
دایره موهر برای دو حالت خاص

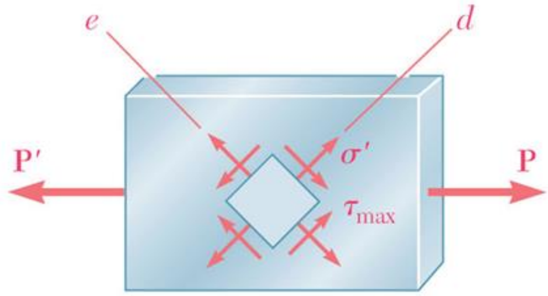
دایره موهر برای بارگذاری محوری



$$\sigma' = \sigma_{ave} = \sigma_e = \sigma_d = \frac{P}{2A}$$

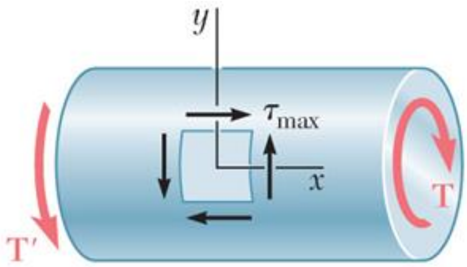
$$\tau_{max} = \tau_{ed} = \frac{P}{2A}$$





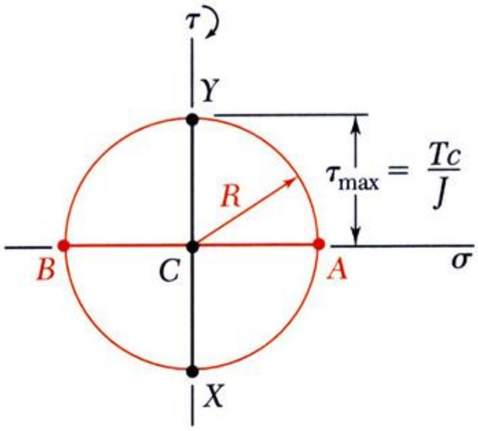
××

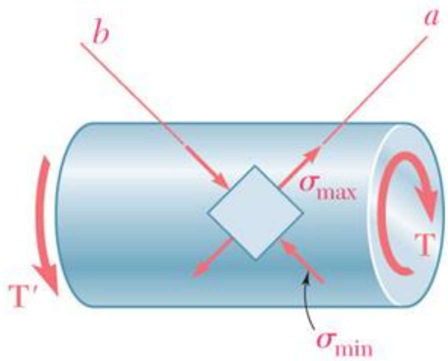
دایره موهر برای بارگذاری پیچشی محض



$$\sigma_a = -\sigma_b = \frac{Tc}{J} \quad , \quad \tau_{ab} = 0$$

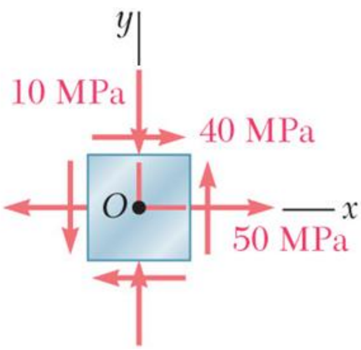
$$\sigma_{max} = \sigma_a \quad , \quad \sigma_{min} = \sigma_b$$





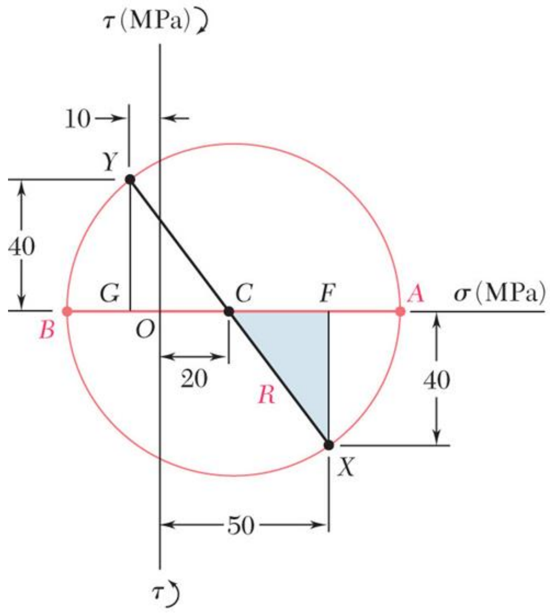
××

مثال ۶-۳



برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، الف) دایره موهر را رسم کرده ب) صفحات اصلی ج) تنشهای اصلی د) تنش برشی ماکزیمم و تنش نرمال متناظر را بدست آورید.

حل: نقاط $X:\left(+50,40^{ccw}\right)$ و $Y:\left(-10,40^{cw}\right)$ را به ترتیب در

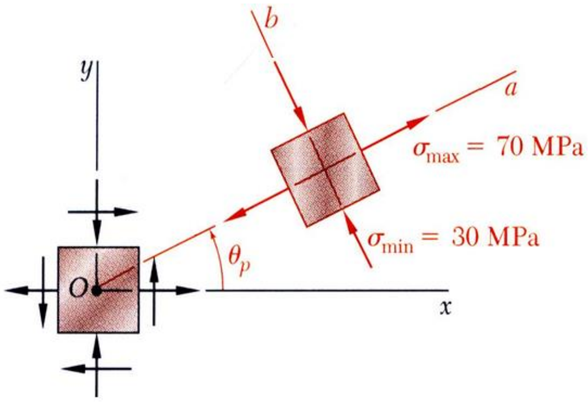


××

مرکز و شعاع دایره برابرند با:

$$\sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20\,\text{MPa}$$

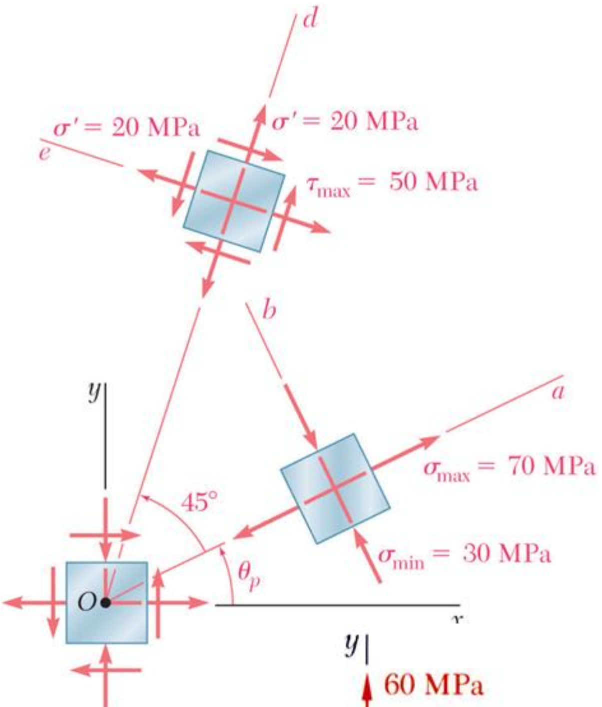
$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50\,\text{MPa}$$



تنش‌ها و جهت‌های اصلی برابرند با:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ave} + R = 70\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{ave} - R = -30\,\text{MPa}$$



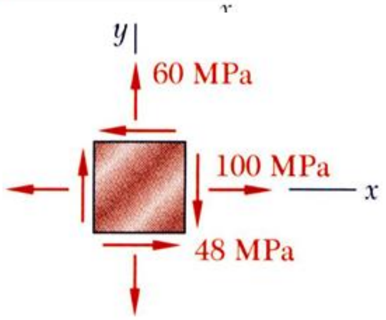
××

تنش برشی ماکزیمم و جهت و تنش نرمال متناظر با آن برابرند با:

$$\tau_{\max} = R = 50\,\text{MPa}$$

$$\sigma' = \sigma_{\text{ave}} = 20\,\text{MPa}$$

××

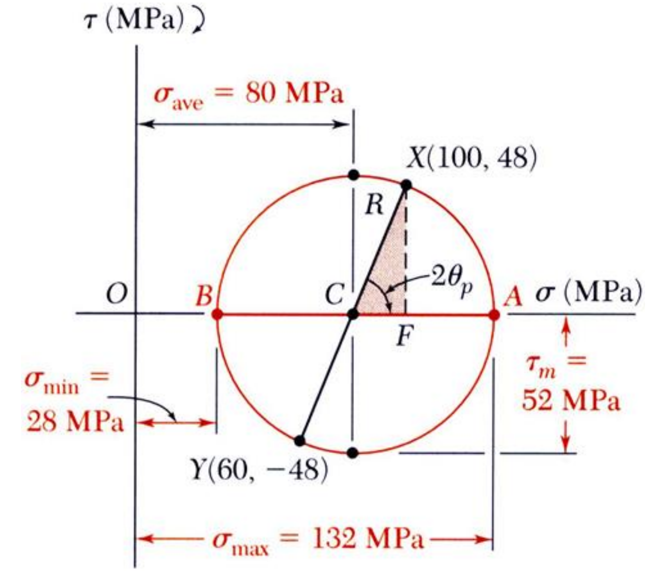


مثال ۶-۴

برای حالت تنش مقابل، الف) جهت و تنش‌های اصلی،

ب) مؤلفه‌های تنش وارده بر المانی که با چرخاندن المان روبرو به اندازه 30° پادساعتگرد حاصل می‌آید تعیین کنید.

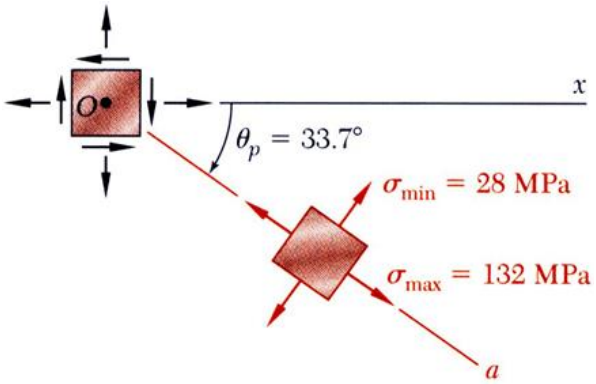
حل: ابتدا دایره موهر را رسم می‌کنیم.



$$R=\sqrt{(CF)^2+(FX)^2}=\sqrt{(20)^2+(48)^2}=52\,\text{MPa}$$

××

با توجه به دایره موهر جهت اصلی زاویه‌ای ساعتگرد بوده و اندازه آن برابر است با:



$$\tan 2\theta_p=\frac{XF}{CF}=\frac{48}{20}=2.4$$

$$\Rightarrow$$

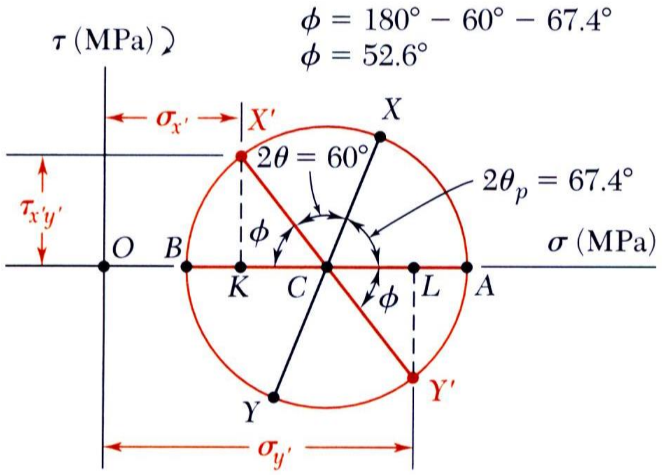
$$\theta_p=33.7^\circ\ (\text{cw})=-33.7^\circ$$

$$\sigma_{\min}=\sigma_{ave}-R=+28\,\text{MPa}$$

مؤلفه‌های تنش بعد از چرخاندن المان به اندازه $\theta=30^\circ$ با چرخاندن قطر XY به اندازه $2\theta=60^\circ$ بدست می‌آیند.

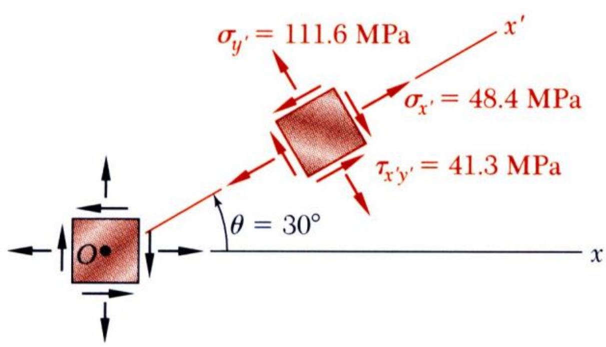
×××

$$\sigma_{x'}=OK=OC-KC=80-31.6=+48.4\,\text{MPa}$$



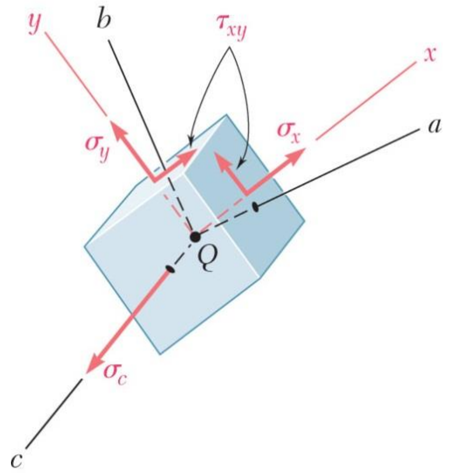
$$\sigma_{y'}=OL=OC+CL=80+31.6=+111.6\,\text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'}=KX'=R\sin\varphi=52\sin 52.6^\circ=41.3\,\text{MPa}$$



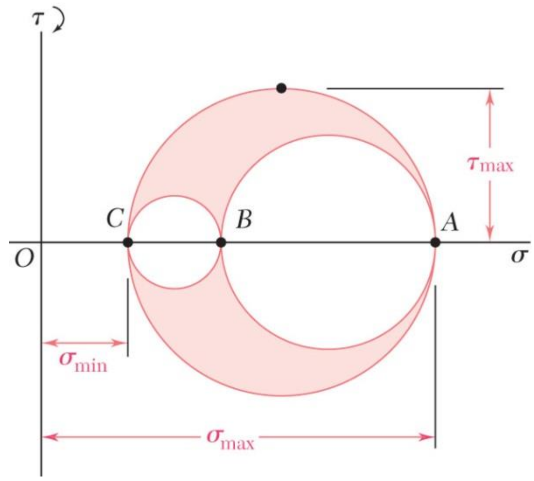
×××

کاربرد دایره موهر در تحلیل تنش سه‌بعدی



در شکل زیر، a ، b و c محورهای اصلی و نقاط A ، B و C تنش‌های اصلی هستند.

سه دایره رسم شده بین این نقاط، تنش‌های نرمال و برشی را برای چرخش المان حول محورهای اصلی تنش مشخص می‌کنند.



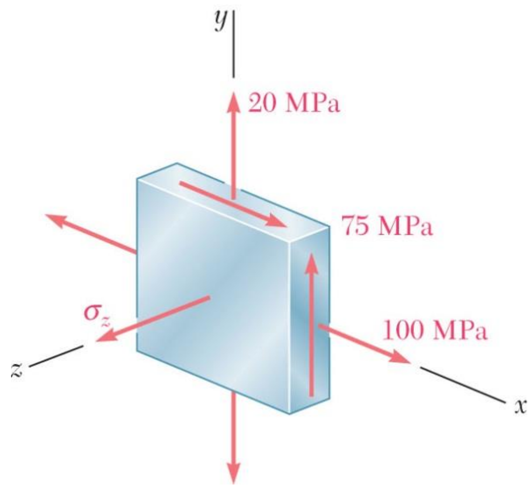
تنش برشی ماکزیمم واقعی در هر نقطه برابر با شعاع بزرگترین دایره است.

یعنی:

(۶-۱۳)

××

مثال ۶-۵



برای المان مقابل تنش برشی ماکزیمم را برای سه حالت زیر حساب کنید:

الف: $\sigma_z = 0$ MPa

ب: $\sigma_z = +45$ MPa

ج: $\sigma_z = -45$ MPa

حل:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

××

$$\sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{100+20}{2} - \sqrt{\left(\frac{100-20}{2}\right)^2 + 75^2} = -25\,\text{MPa}$$

حالت الف:

$$\sigma_c = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) =$$

حالت ب:

$$\sigma_c = \sigma_z = +45 \text{ MPa}$$

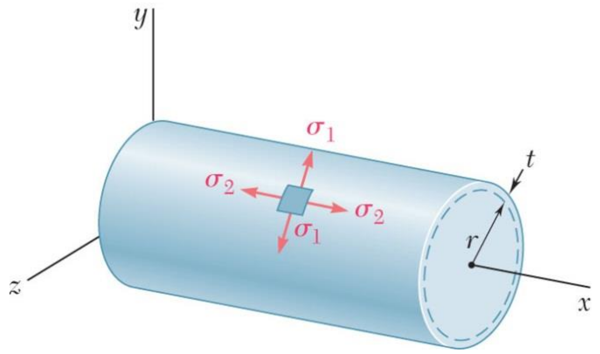
××

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_b) = \frac{1}{2}\big(145 - (-25)\big) = 85\,\text{MPa}$$

حالت ج:

$$\sigma_c = \sigma_z = -45 \text{ MPa}$$

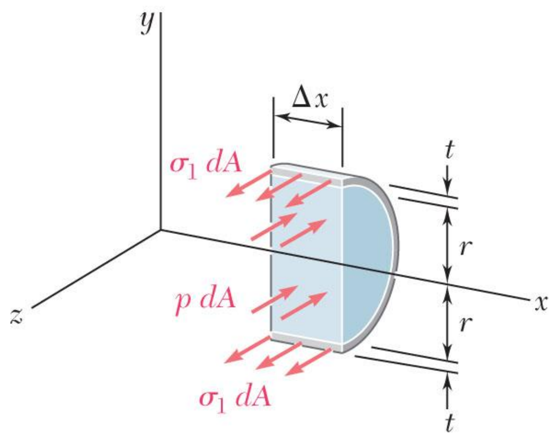
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_c) =$$



×××

تنش‌ها در مخازن جدار نازک

در مخازن جدار نازک استوانه‌ای دو تنش اصلی داریم که عبارتند از تنش حلقه‌ای σ_1 و تنش طولی σ_2.



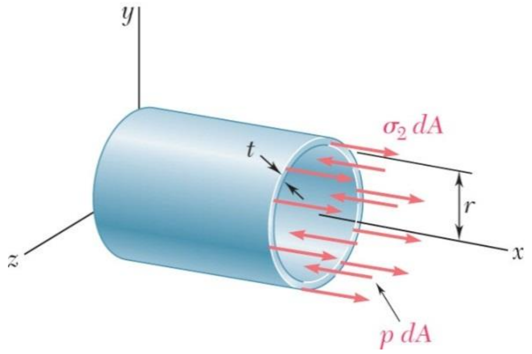
با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت z تنش حلقه‌ای بدست می‌آید:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \sigma_1(2t\Delta x) - p(2r\Delta x) = 0$$

(۶-۱۴)

×××

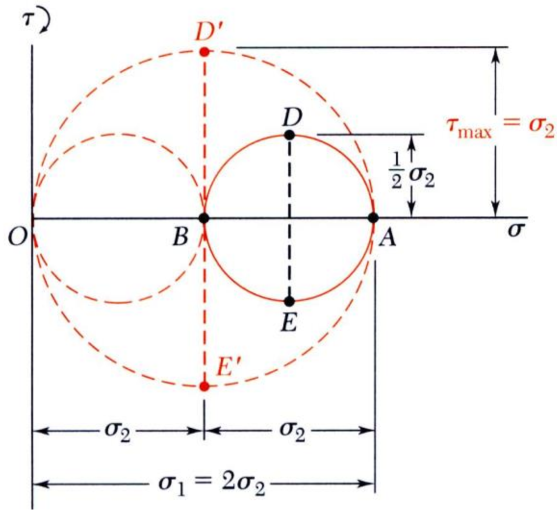
از معادله تعادل در جهت x تنش طولی بدست می‌آید:



$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_2\left(2\pi rt\right) - p\left(\pi r^2\right) = 0$$

(۶-۱۵)

در دایره موهر نقطه A تنش حلقه‌ای σ_1 و نقطه B تنش طولی σ_2 را نشان می‌دهد.



تنش ماکزیمم داخل صفحه و تنش ماکزیمم واقعی برابرند با:

$$\tau_{\max(\text{in-plane})} = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t} \qquad (۶\text{-}۱۶)$$

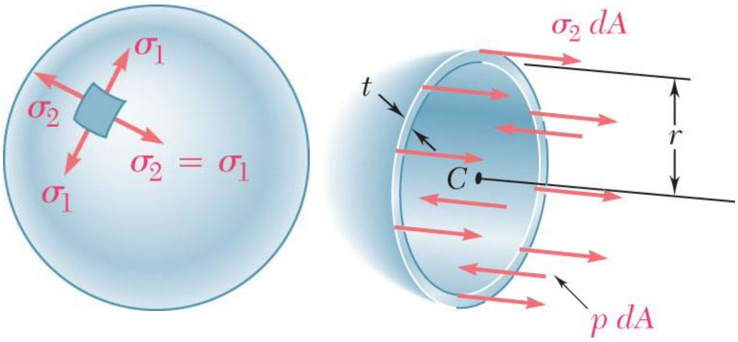
(۶-۱۷)

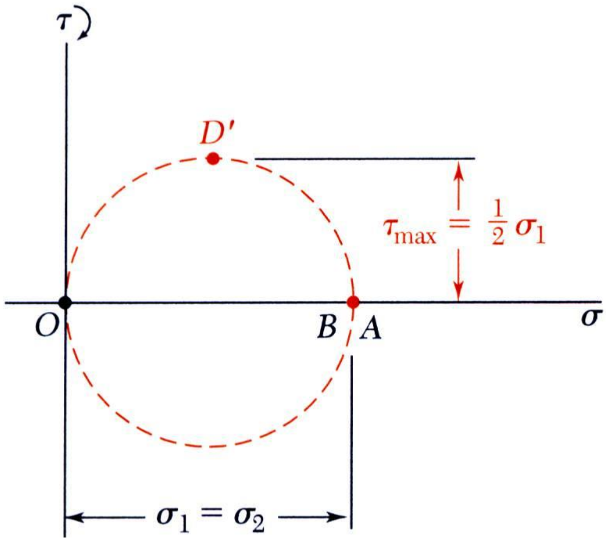
××

در مخازن جدار نازک کروی تنش‌ها با رابطه زیر بدست می‌آیند:

(۶-۱۸)

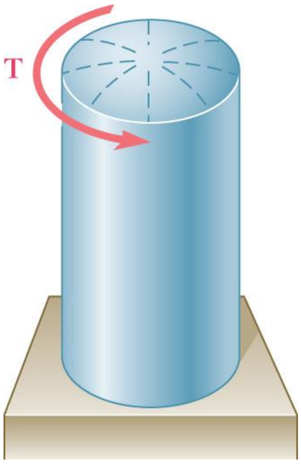
دایره موهر برای حالت تنش صفحه‌ای در این مخازن تبدیل به یک نقطه (A=B) می‌شود.





تنش برشی داخل صفحه صفر و تنش برشی واقعی (خارج از صفحه) برابر است با:

$$\tau_{\max(\text{in-plane})} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \qquad (۶\text{-}۱۹)$$



××

مثال ۶-۶

مخزن هوای مقابل دارای قطر داخلی 180mm و ضخامت دیواره 12mm است.

تنش نرمال و برشی ماکزیمم در آن چقدر است؟

حل:

$$r = r_i = \frac{1}{2}d = 90 \text{ mm}$$

$$r_o = r_i + t = 90 + 12 = 102 \text{ mm}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4) = 66.968\times10^6 \text{ mm}^4 = 66.968\times10^{-6} \text{ m}^4$$

در نتیجه:

××

$$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{8\times90}{12} = 60\,\text{MPa} \qquad \sigma_y = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = 30\,\text{MPa}$$

حال با کمک معادلات تبدیل تنش داریم:

$$\sigma_{ave} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 45\,\text{MPa} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 23.64\,\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \sigma_{ave} + R = 68.64\,\text{MPa} \qquad \sigma_b = \sigma_{ave} - R = 21.36\,\text{MPa} \qquad \sigma_c \simeq 0$$

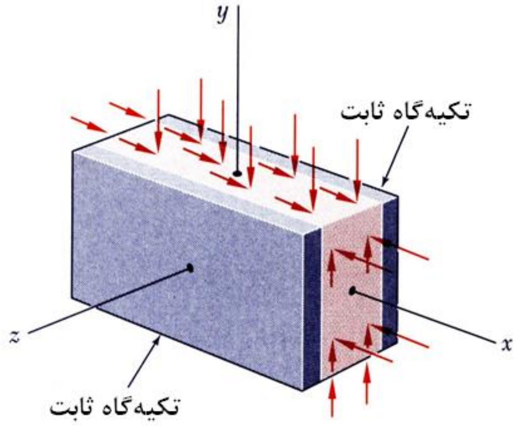
$$\rightarrow \quad \sigma_{max} = 68.64 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_{min} = 0$$

××

تبدیل کرنش صفحه‌ای

در حالت کرنش صفحه‌ای از تغییر شکل جسم در یک جهت جلوگیری می‌شود.

مثلاً در شکل مقابل تغییر شکل جسم در جهت z و متعاقب آن کلیه کرنش‌ها در جهت z صفرند:



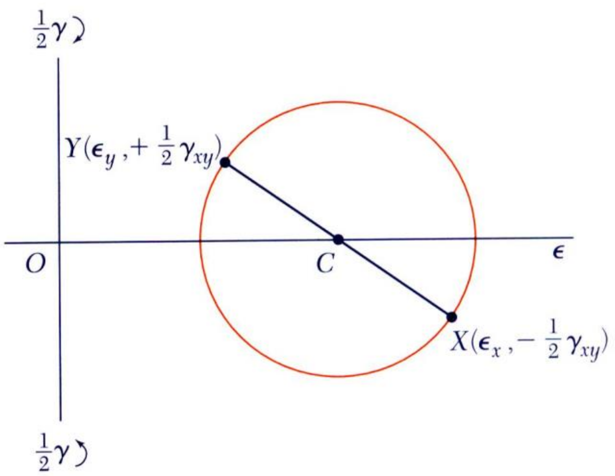
(۶-۲۰)

می‌توان نشان داد معادلات تبدیل کرنش صفحه‌ای بصورت مقابل است:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$
$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \quad (۶-۲۱)$$
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

×××

دایره موهر برای کرنش صفحه‌ای



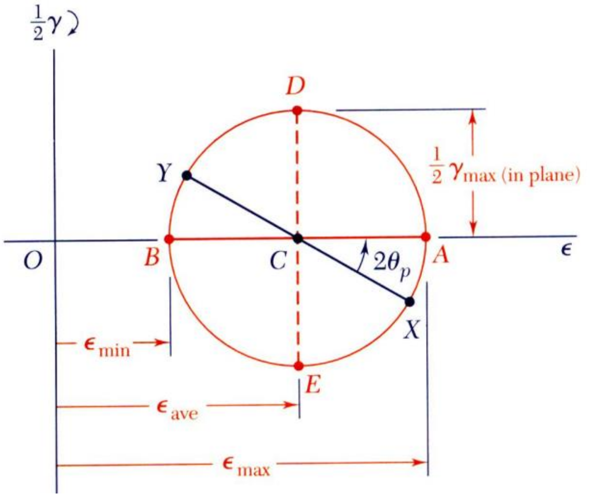
در حالت کرنش صفحه‌ای هم مانند تنش صفحه‌ای

می‌توان از دایره موهر استفاده کرد.

مرکز و قطر دایره موهر برای کرنش صفحه‌ای برابرند با:

$$\varepsilon_{ave} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (۶-۲۲)$$

×××



جهت محورهای اصلی کرنش و کرنش‌های اصلی عبارت است از:

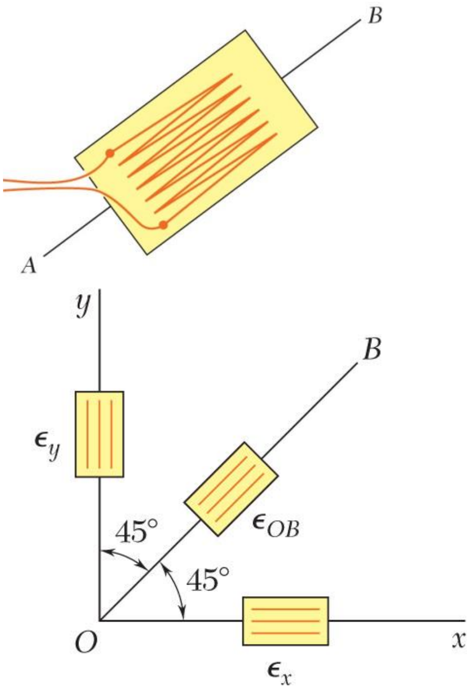
$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (۶-۲۳)$$
$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{ave}} + R \qquad \varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\text{ave}} - R$$

کرنش برشی ماکزیمم داخل صفحه هم مساوی است با:

(۶-۲۴)

×××

اندازه‌گیری کرنش



برای اندازه‌گیری کرنش از کرنش‌سنج استفاده می‌شود.

مقاومت الکتریکی کرنش‌سنج‌ها در اثر تغییر طول عوض شده و

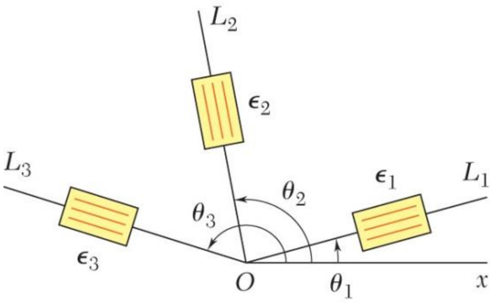
مقدار کرنش عمودی را نشان می‌دهد.

با یک آرایش 45° از کرنش‌سنج‌ها، ε_x و ε_y مستقیما اندازه‌گیری شده

و مقدار γ_{xy} نیز با کمک معادله اول (۶-۲۱) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

(۶-۲۵)

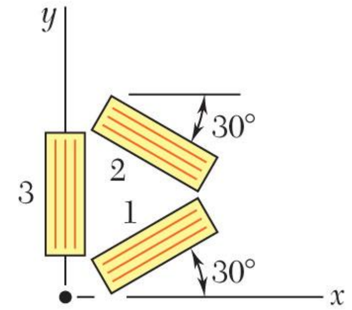
××



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy}\sin\theta_1\cos\theta_1$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy}\sin\theta_2\cos\theta_2 \qquad (۶-۲۶)$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy}\sin\theta_3\cos\theta_3$$

××

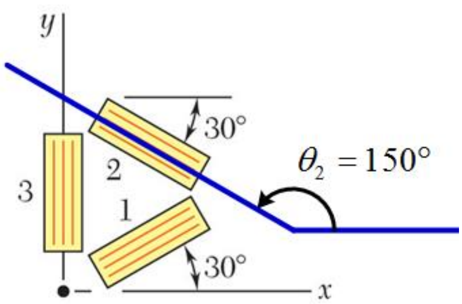
مثال ۶-۷



اگر گلبرگ کرنش مقابل مقادیر زیر را خوانده باشد کرنش‌های اصلی

داخل صفحه و کرنش برشی ماکزیمم داخل صفحه چقدر است؟

$$\varepsilon_1 = +600\mu \quad , \quad \varepsilon_2 = +450\mu \quad , \quad \varepsilon_1 = -75\mu$$



حل: زوایا بصورت پادساعتگرد از جهت مثبت محور x

اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین داریم:

حال سه زاویه فوق را در رابطه اول از معادلات (۶-۲۶)

جاگذاری می‌کنیم.

××

$$\varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy}\sin\theta_1\cos\theta_1 = \varepsilon_1$$

$$\rightarrow \quad 0.75\varepsilon_x + 0.25\varepsilon_y + 0.43301\gamma_{xy} = 600\mu \qquad \text{(الف)}$$

$$\varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy}\sin\theta_2\cos\theta_2 = \varepsilon_2$$

$$\rightarrow \quad 0.75\varepsilon_x + 0.25\varepsilon_y - 0.43301\gamma_{xy} = 450\mu \qquad \text{(ب)}$$

$$\varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy}\sin\theta_3\cos\theta_3 = \varepsilon_3$$

(ج)

××

با حل سه معادله اخیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon_x = 725\mu \quad , \quad \varepsilon_y = -75\mu \quad , \quad \gamma_{xy} = 173.21\mu$$

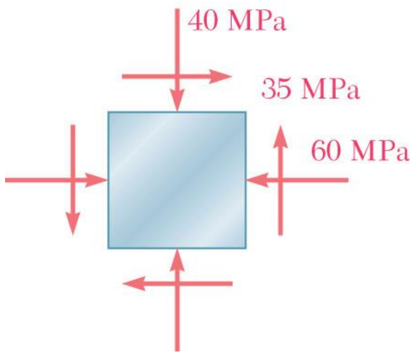
حال از معادلات تبدیل کرنش صفحه‌ای بهره می‌گیریم:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{725+75}{2}\right)^2 + \left(\frac{173.21}{2}\right)^2} = 409.3\mu$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ave} + R = 734\mu \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_{ave} - R = -84.3\mu \qquad \gamma_{\max(\text{inplane})} = 2R = 819\mu$$

××

مثال ۶-۸ (دوره)



برای حالت تنش مقابل، جهت و اندازه تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه و تنش نرمال متناظر را بیابید.

حل: $\sigma_x = -60 \text{ MPa} \;,\; \sigma_y = -40 \text{ MPa} \;,\; \tau_{xy} = 35 \text{ MPa}$

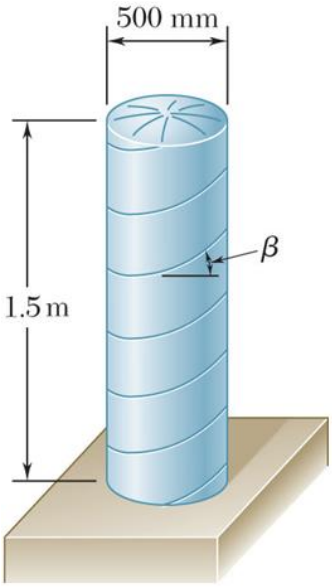
$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{-60+40}{(2)(35)} = 0.2857 \qquad \rightarrow \qquad 2\theta_s = 15.95°$$

××

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-60+40}{2}\right)^2 + (35)^2} = 36.4 \ \text{MPa}$$

××

مثال ۶-۹ (دوره)

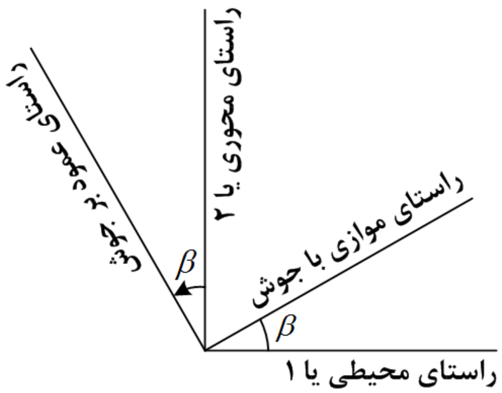


مخزن هوای مقابل با جوش دادن ورقی با ضخامت 6mm تحت زاویه β ساخته شده است. اگر تنش مجاز عمود بر جوش 75MPa باشد بیشترین فشار قابل اعمال در داخل مخزن چقدر خواهد بود؟ $\beta = 30°$

حل:

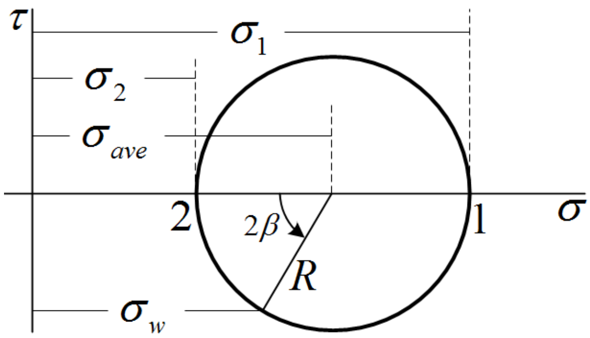
در مخازن جدار نازک استوانه‌ای داریم: $\sigma_1 = \dfrac{pr}{t} \quad , \quad \sigma_2 = \dfrac{pr}{2t}$

××



مطابق شکل برای رسیدن به راستای عمود بر جوش باید از راستای محوری استوانه یعنی راستای ۲ به اندازه β پادساعتگرد بچرخیم.

××



لذا مطابق با دایره موهر زیر تنش عمود بر جوش برابر است با:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\frac{pr}{t} + \frac{pr}{2t}}{2} = \frac{3pr}{4t}$$

$$R=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{\frac{pr}{t}-\frac{pr}{2t}}{2}=\frac{1}{4}\frac{pr}{t}$$

××

$$\rightarrow \quad \sigma_w=\sigma_{ave}-R\cos 2\beta=\frac{3}{4}\frac{pr}{t}-\frac{1}{4}\frac{pr}{t}\cos 60=\frac{5}{8}\frac{pr}{t}$$

در نتیجه:

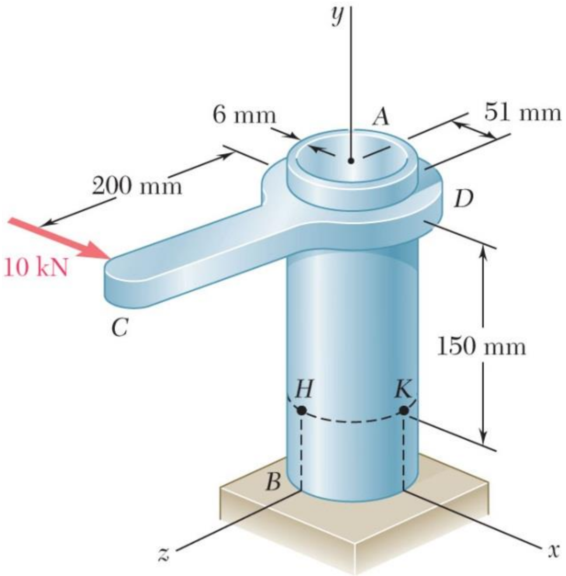
××

مثال ۶-۱۰ (دوره)

قطر خارجی لوله AB برابر 102mm و ضخامت آن 6mm است.

تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم را در نقطه H تعیین کنید.

حل: سیستم گشتاور در مقطعی که از H می‌گذرد برابر است با:



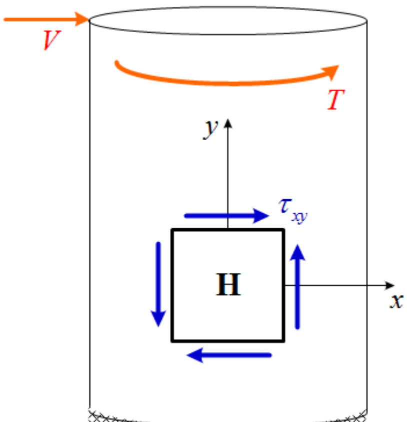
××

با کمک قانون دست راست مشخص است که گشتاور حول محور z لوله AB را دچار خمش می‌کند.

اما چون نقطه H خود روی محور z یعنی تار خنثی قرار دارد پس خمش حول z سبب ایجاد تنش در آن نمی‌شود.

ضمناً طبق قانون دست راست گشتاور حول محور y لوله AB را تحت پیچش قرار می‌دهد. بنابراین:

علاوه بر سیستم گشتاور مذکور، لوله AB در اثر نیروی اعمالی تحت بارگذاری عرضی نیز قرار می‌گیرد.



××

پس باید تنش برشی ناشی از گشتاور پیچشی و تنش برشی ناشی

از بارگذاری عرضی را در H محاسبه کنیم.

با توجه به شکل مقابل این تنش در صفحه xy وارد می‌شود.

ضمناً چون هم T و هم Vضلع بالای المان را نسبت به ضلع پایین آن به سمت راست هل می‌دهند پس جهت تنش برشی هر دو بصورت نشان داده شده خواهد بود.

××

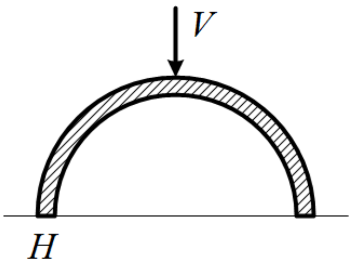
$$r_o = \frac{d_o}{2} = \frac{102}{2} = 51 \text{ mm} \quad , \quad r_i = r_o - t = 45 \text{ mm}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4) = 4.1855 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 4.1855 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I = \frac{1}{2} J = 2.0927 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش برشی ناشی از پیچش برابر است با:

تنش برشی ناشی از بارگذاری عرضی هم از رابطه زیر حساب می‌شود:



$$\tau_{xyV} = \frac{VQ}{It}$$

××

برای نقطه‌ای وسط دایره توپر می‌دانیم:

بنابراین برای نقطه H:

$$Q = Q_o - Q_i = \frac{2}{3} r_o^3 - \frac{2}{3} r_i^3 = 27.684 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 27.684 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{xyV} = \frac{VQ}{It} = \frac{\left(10 \times 10^3\right)\left(27.684 \times 10^{-6}\right)}{\left(2.0927 \times 10^{-6}\right)\left(12 \times 10^{-3}\right)} = 11.02 \times 10^6 \text{ Pa} = 11.02 \text{ MPa}$$

××

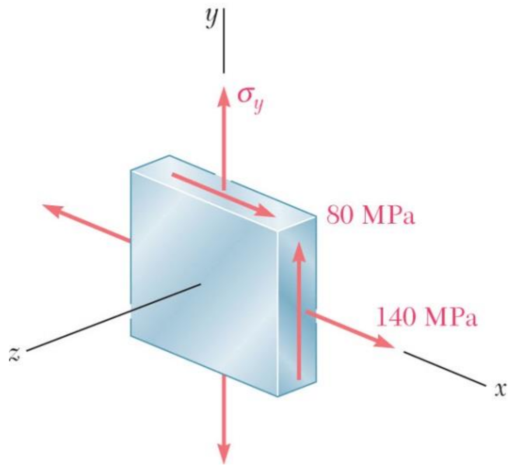
در نهایت برای نقطه H بدست می‌آید:

$$\tau_{xy} = \tau_{xyT} + \tau_{xyV} = 24.37 + 11.02 = 35.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

$\sigma_{\max}=\sigma_{ave}+R=35.39\ \text{MPa}$ $\sigma_{\min}=\sigma_{ave}-R=-35.39\ \text{MPa}$ $\tau_{\max}=R=35.39\ \text{MPa}$

××



مثال ۶-۱۱ (دوره)

برای المان مقابل تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه xy و ماکزیمم واقعی را برای دو حالت زیر حساب کنید:

الف: $\sigma_y=20\ \text{MPa}$ ب: $\sigma_y=140\ \text{MPa}$

حل: الف:

$$\sigma_a=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=$$

××

$$\sigma_b=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{140+20}{2}-\sqrt{\left(\frac{140-20}{2}\right)^2+80^2}=-20\,\text{MPa}$$ $$\sigma_c=\sigma_z=0$$

$$\tau_{\max(\text{in }xy\text{ plane})}=\frac{1}{2}(\sigma_a-\sigma_b)=\frac{1}{2}\big(180-(-20)\big)=100\,\text{MPa}$$

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})=\frac{1}{2}\big(180-(-20)\big)=100\,\text{MPa}$$

ب:

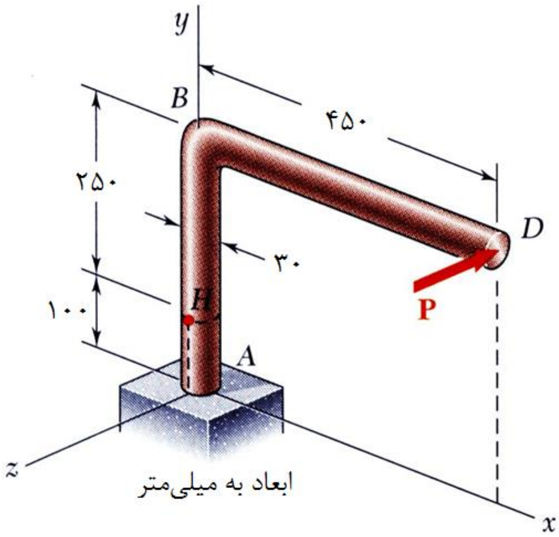
××

$$\sigma_b=\frac{140+140}{2}-\sqrt{\left(\frac{140-140}{2}\right)^2+80^2}=60\,\text{MPa}$$ $$\sigma_c=\sigma_z=0$$

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})=\frac{1}{2}(220-0)=110\,\text{MPa}$$

×××

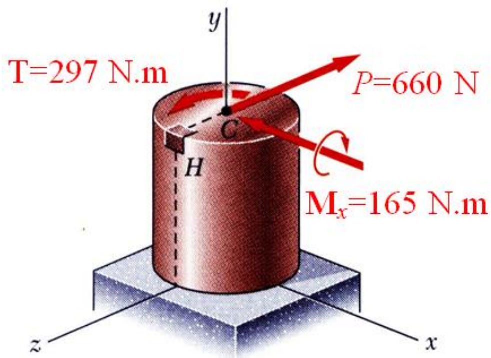
مثال ۶-۱۲ (دوره)



نیروی افقی P به بزرگی 660N به انتهای D از اهرم ABD اعمال می‌شود. الف) تنش‌های نرمال و برشی را در المانی با وجوه موازی محورهای x و y واقع در نقطه H بدست آورید. صفحات و تنش‌های اصلی را در نقطه H تعیین کنید.

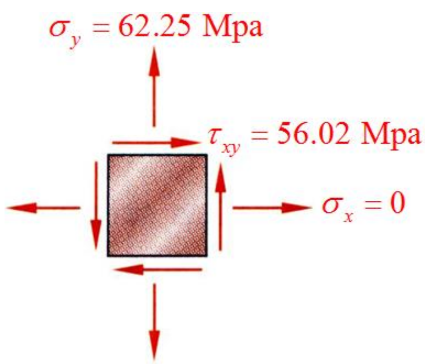
حل: ابتدا باید سیستم معادل نیرو- گشتاور را در مرکز مقطع عرضی گذرنده از نقطه H تعیین کنیم.

به این منظور داریم:



×××

$$P=660\text{N}$$
$$T=(660\,\text{N})(450\,\text{mm})=297\,\text{N.m}$$
$$M_x=(660\,\text{N})(250\,\text{mm})=-165.0\,\text{N.m}$$



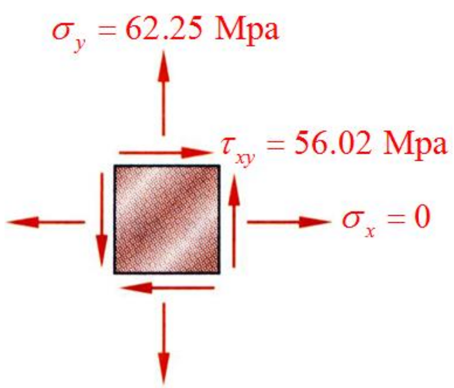
تنش‌های نرمال و برشی در نقطه H برابرند با:

$$\sigma_x=0$$

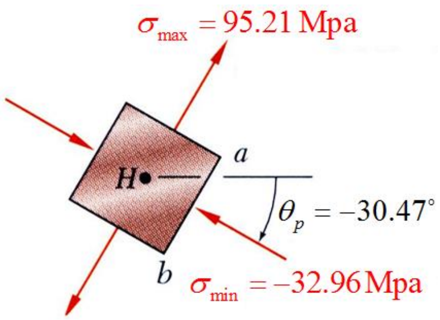
$$\sigma_y=+\frac{Mc}{I}=+\frac{(165.0\,\text{N.m})(0.015\,\text{m})}{\frac{1}{4}\pi(0.015\,\text{mm})^4}=62.25\text{ MPa}$$

×××

جهت‌ها و تنش‌های اصلی بصورت زیر بدست می‌آیند:



$$\begin{cases} 2\theta_p = -60.94^\circ \Rightarrow \theta_p = -30.47^\circ \\ 2\theta_p = -60.94^\circ + 180^\circ = 119.06^\circ \Rightarrow \theta_p = 59.53^\circ \end{cases}$$



$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 62.25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 62.25}{2}\right)^2 + (56.02)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = 95.21\text{MPa} \;\;,\;\; \sigma_{\min} = -32.96\text{MPa}$$