

مقدار ویژه و بردار ویژه (Eigenvalue and Eigenvector)

- برای نگاشت زیر،

$$A_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1}$$

- اگر بردار \mathbf{b} برداری در امتداد بردار غیر صفر \mathbf{x} باشد،

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

مقدار ویژه ماتریس A

بردار ویژه ماتریس A

- بردارهای ویژه \mathbf{x} متعلق به $N(A - \lambda I)$ هستند.

- اگر $|A - \lambda I| \neq 0$ باشد، تنها جواب معادله $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ پاسخ بدیهی $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ است.

- λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است اگر و فقط اگر پاسخ معادله درجه n $|A - \lambda I| = 0$ باشد.

معادله مشخصه ماتریس A (Characteristic Equation)

۲

خواص

- اگر $|\lambda I_n - A|$ را بسط دهیم، معادله مشخصه بصورت زیر بیان می گردد،

$$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$$

چند جمله ای مونیک با ضرایب حقیقی

- برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ ، مقادیر ویژه حقیقی یا مختلط مزدوج $(\alpha \pm j\beta)$ هستند.

- اگر ماتریس A متقارن (هرمیتی) باشد، مقادیر ویژه حقیقی هستند.

- محاسبه دترمینان ماتریس $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

- اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس A باشد، λ_i^k مقدار ویژه ماتریس A^k متناظر با همان بردار ویژه است.

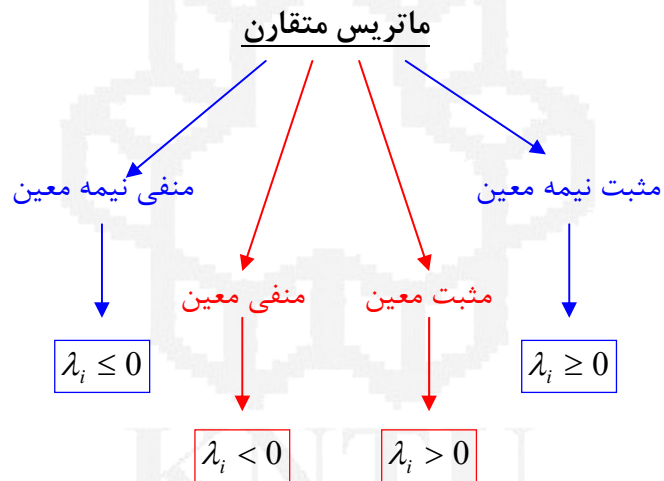
- اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس غیرمنفرد A باشد، $\frac{1}{\lambda_i}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

- دستور $\mathbf{d} = \text{eig}(A)$ ، $[\mathbf{v}, \mathbf{d}] = \text{eig}(A)$ و $\text{poly}(A)$ در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

۳

تعیین علامت ماتریس متقارن و مقادیر ویژه ماتریس

- مقادیر ویژه ماتریس متقارن اعداد حقیقی هستند.



- در سایر موارد علامت ماتریس نامعین است.

۴

برخی از کاربردهای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- قطری سازی ماتریس ها ← Modal Matrix

- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

- تشخیص هویت ← Facial Recognition , Eigenfaces & Eigenvoices

- تحلیل و طراحی سیستمها ← Modern Control , Stability

- فشرده سازی تصاویر ← Image Compression

- زمین شناسی و اکتشاف نفت

- تحلیل ارتعاش سازه ها ← Natural Frequency , Eigenfrequency

- تئوری گراف ← Searching the Web , Ranking Theory

⋮

۵

مثال ۱

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A با استفاده از رابطه $|\lambda I - A| = 0$ بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda + 7)(\lambda + 2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -7, \lambda_2 = -2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز یا غیر تکراری دارد. برای محاسبه بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_i + 4 & -2 \\ -3 & \lambda_i + 5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -7 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -3x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2x_3 - 2x_4 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\text{Adj}(\lambda I - A) = \text{Adj} \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 2 \\ 3 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -7 \rightarrow \text{Adj}(-7I - A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \text{Adj}(-2I - A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 مستقل خطی هستند، برای این منظور دترمینان ماتریس $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ را بدست می آوریم،

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$$

از آنجائیکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 مستقل خطی هستند.

قضیه

- اگر یک ماتریس $A_{n \times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی وجود خواهد داشت.

۷

اثبات:

بردارهای ویژه نظیر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rightarrow$ و مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rightarrow$

فرض کنیم فقط k تا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k \quad (1)$$

طرفین رابطه (1) را در A ضرب می کنیم،

$$A\mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k A\mathbf{v}_k$$

می دانیم $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ،

$$\lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (2)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در λ_{k+1} ضرب کنیم،

$$\lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} \mathbf{v}_k \quad (3)$$

حال رابطه (2) - (3) را بدست می آوریم،

$$\alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \alpha_2 (\lambda_{k+1} - \lambda_2) \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

طبق فرض $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

بنابراین طبق رابطه (1) باید $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$ باشد که با شرط $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ بردار ویژه منافات دارد.

پس نمی توان \mathbf{v}_{k+1} را بصورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ نوشت و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند.

۸

نکته:

- اگر ماتریس $A_{n \times n}$ یک مقدار ویژه تکراری λ_i از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت.
- تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $n - \text{rank}(A - \lambda_i I)$ است.

۹

مثال ۲

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 16\lambda - 20 = (\lambda + 2)^2(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = 5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را با روش ماتریس الحاقی محاسبه می کنیم،

$$\text{Adj}(\lambda I - A) = \text{Adj} \begin{bmatrix} \lambda - 6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 5\lambda + 6 & 3\lambda + 9 & -8\lambda - 16 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda - 10 & 0 \\ \lambda + 2 & 3 & \lambda^2 - 4\lambda - 12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \rightarrow \text{Adj}(5I - A) = \begin{bmatrix} 56 & 24 & -56 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow \text{Adj}(-2I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n - \text{rank}(A - \lambda_1 I) = 3 - 2 = 1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2} = -2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

۱۰

مثال ۳

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{-3 + j\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{-3 - j\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

مثال ۴**کاربرد قضیه کیلی - هامیلتون در محاسبه ماتریس معکوس**

قضیه کیلی - هامیلتون را برای ماتریس A بررسی کنید و سپس با استفاده از آن مقدار A^{-1} را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -16 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

حال ماتریس A را در این معادله قرار داده و حاصل را محاسبه می کنیم،

$$\begin{aligned} A^2 - 2A - 8I_2 &= \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 32 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بدین ترتیب صحت قضیه کیلی - هامیلتون تصدیق می شود.

برای محاسبه A^{-1} می توان بصورت زیر عمل کرد،

$$A^2 - 2A - 8I_2 = 0 \rightarrow \frac{1}{8}(A^2 - 2A) = I = AA^{-1} \rightarrow \frac{1}{8}A(A - 2I) = AA^{-1}$$

بنابراین A^{-1} بصورت زیر محاسبه می شود،

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای $P(A)$ را برای آن بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad P(A) = A^5 + 16A^4 + 32A^3 + 16A^2 + 4A + I$$

روش اول: جایگذاری مستقیم،

با قرار دادن ماتریس A در چندجمله ای مذکور جواب را بدست می آوریم،

$$P(A) = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^5 + 16 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^4 + 32 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^3 + 16 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 1376 & 2816 \\ -176 & -384 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5376 & 10240 \\ -640 & -1024 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2816 & 6144 \\ -384 & -1024 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 320 & 512 \\ -32 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 64 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 9913 & 19776 \\ -1236 & -2447 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است این روش مستلزم توان رسانی های متعدد برای ماتریس A است و استفاده از آن برای چند جمله ای های مرتبه بالا بسیار دشوار می باشد.

روش دوم: استفاده از قضیه کیلی - هامیلتون،

فرض کنید $P(\lambda)$ یک چندجمله ای مرتبه m و $Q(\lambda)$ چندجمله ای مشخصه ماتریس A باشد. حاصل تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را می توان بصورت زیر بیان کرد،

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = F(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \rightarrow P(\lambda) = F(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

که در آن، $F(\lambda)$ خارج قسمت و $R(\lambda)$ باقیمانده تقسیم می باشند. حال اگر $\lambda = \lambda_i$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، $Q(\lambda_i) = 0$ خواهد بود و رابطه بالا بصورت زیر قابل نوشتن است،

$$P(\lambda_i) = F(\lambda_i)Q(\lambda_i) + R(\lambda_i) \rightarrow P(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

حال با توجه به قضیه کیلی - هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A) = R(A)$$

یعنی می توان بجای جایگذاری ماتریس A در چند جمله ای مرتبه بالا $P(A)$ می توان از چندجمله ای $R(A)$ استفاده کرد که به مراتب درجه کمتری دارد.

حال با این مقدمه حاصل چند جمله ای $P(A)$ را بدست می آوریم، برای این منظور دو راه کار وجود دارد،

۱- با انجام تقسیم دو چندجمله ای،

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

۱- با انجام تقسیم چندجمله ای،

در این روش ابتدا تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را انجام داده و چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ را بدست می آوریم،

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 16\lambda^4 + 32\lambda^3 + 16\lambda^2 + 4\lambda + I, \quad Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$
$$R(\lambda) = 1236\lambda + 2497$$

با توجه قضیه کیلی - هامیلتون داریم،

$$P(A) = R(A)$$

$$P(A) = 1236A + 2497I = 1236 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 2497 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9913 & 19776 \\ -1236 & -2447 \end{bmatrix}$$

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

در این روش تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ انجام نمی شود. با توجه به مرتبه چند جمله ای مشخصه، بدیهی است که چندجمله ای

باقیمانده $R(\lambda)$ از مرتبه یک می باشد. لذا آن را بصورت کلی زیر در نظر می گیریم،

$$R(\lambda) = c_1\lambda + c_0$$

حال مقدار c_0 و c_1 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow R(\lambda_1) = P(\lambda_1) = c_0 + c_1\lambda_1 \rightarrow 7441 = c_0 + 4c_1$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow R(\lambda_2) = P(\lambda_2) = c_0 + c_1\lambda_2 \rightarrow 25 = c_0 - 2c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_0 = 2497$ و $c_1 = 1236$ بدست می آید.

$$R(\lambda) = 1236\lambda + 2497$$

و با توجه قضیه کیلی - هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A) = R(A)$$

$$P(A) = 1236A + 2497I = 1236 \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 2497 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9913 & 19776 \\ -1236 & -2447 \end{bmatrix}$$

مثال ۶

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای $P(A)$ را به کمک قضیه کیلی-هامیلتون برای آن بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P(A) = A^5 + 16A^4 + 32A^3 + 16A^2 + 4A + I$$

ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = Q(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

با توجه به اینکه $Q(\lambda)$ مرتبه سه است، چندجمله ای باقیمانده تقسیم $P(\lambda)$ بر $Q(\lambda)$ چندجمله ای مرتبه دو خواهد بود،

$$R(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

حال مقدار c_0 و c_1, c_2 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow R(\lambda_1) = P(\lambda_1) = c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 \rightarrow P(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2$$

چون مقادیر ویژه تکراری هستند برای دو مقدار ویژه بعدی معادله جدیدی بدست نمی آید. در این مواقع از مشتقات $R(\lambda)$ کمک می گیریم. در این مسئله دو معادله دیگر باید بدست آوریم لذا از مشتق مرتبه اول و دوم $R(\lambda)$ استفاده می کنیم،

$$\dot{R}(\lambda) = 2c_2\lambda + c_1$$

$$\ddot{R}(\lambda) = 2c_2$$

حال داریم،

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \dot{R}(\lambda_1) = \dot{P}(\lambda_1) = c_1 + 2c_2\lambda_1 \rightarrow \dot{P}(2) = c_1 + 4c_2$$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \ddot{R}(\lambda_1) = \ddot{P}(\lambda_1) = 2c_2$$

لذا مقدار c_0 و c_1, c_2 از حل دستگاه معادلات زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} c_0 + 2c_1 + 4c_2 = P(2) = 617 \\ c_1 + 4c_2 = \dot{P}(2) = 1044 \\ 2c_2 = \ddot{P}(2) = 1344 \end{cases} \rightarrow c_0 = -4159, \quad c_1 = -1644, \quad c_2 = 672$$

بنابراین داریم،

$$R(\lambda) = 672\lambda^2 - 1644\lambda - 4159$$

و با توجه قضیه کیلی-هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A) = R(A)$$

$$P(A) = 672A^2 - 1644A - 4159I = \begin{bmatrix} -4759 & 1044 & 672 \\ 0 & -4759 & 1044 \\ 0 & 0 & -4759 \end{bmatrix}$$