ریاضیات مهندسی پیشرفته

استاد : دکتر قصوری

رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه چهارم

معادله انتقال حرارت یک بعدی
معادله انتقال حرارت دوبعدی
شرایط کرانی صفر
شرایط کرانی غیر صفر
معادله موج دو بعدی

جلسه چهارم — ریاضی مهندسی پیشرفته — 1392/7/25

* انتقال حرارت یک بعدی
  - شرایط کرانی صفر
  - " " غیر صفر
* موج دو بعدی
* انتقال حرارت دو بعدی

معادله انتقال حرارت یک بعدی

$$c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$u(0,t)=u(\ell,t)$$

$$u(x,0)=f(x)$$

حل از طریق روش تفکیک پذیری:

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

$$c^2F''G=FG' \xrightarrow{\text{تقسیم بر } c^2FG} \frac{F''}{F}=\frac{G'}{c^2G}=k=\begin{cases}-\lambda^2 & k<0 \ \checkmark\\ 0 & k=0 \quad \text{غیرممکن ?}\\ \lambda^2 & k>0 \quad \text{غیرممکن ?}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F''+\lambda^2F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\\ G'+\lambda^2c^2G=0 \Rightarrow G'(t)=-\lambda^2c^2G(t) \Rightarrow \dfrac{G'(t)}{G(t)}=-\lambda^2c^2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int}\int\frac{G'(t)}{G(t)}=-\int\lambda^2c^2 \Rightarrow \ln G(t)=-\lambda^2c^2t+c_1$$

$$\Rightarrow e^{\ln G(t)}=e^{(-\lambda^2c^2t+c_1)}=De^{-\lambda^2c^2t}\ ,\ e^{c_1}=D$$

$$\Rightarrow \boxed{G(t)=De^{-\lambda^2c^2t}}$$

$u(x,t) = F(x).G(t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)\,D\,e^{-\lambda^2 c^2 t}$

$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0).G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$

$G(t)$ نمی‌تواند برابر صفر شود چون خواهیم یا صفر می‌شود.

$F(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \Rightarrow A\times 1 + B\times 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$u(l,t) = 0 \Rightarrow F(l).G(t) = 0 \Rightarrow F(l) = 0$

$F(l) = B\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{l}}$

$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$

$G_n(t) = D_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c^2}{l^2}t}$ $\qquad B_n D_n = b_n$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \; e^{-\frac{n^2\pi^2 c^2 t}{l^2}}$

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \quad x\times l$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

بسط نیم دامنه فرد.

تمرین ۱) حالات غیر ممکن k را اثبات کنید.

$$K = \begin{cases} -\lambda^2 & K<0 \\ 0 & K=0 \\ \lambda^2 & K>0 \end{cases}$$

تمرین ۲) معادله زیر را حل کنید.

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad l=\pi$$

$u(0,t)=0$ & $u(\pi,t)=100$

$u(x,0)=x^2$

روش حل:

$$u(x,t) = u(x) + w(x,t)$$

شرایط مرزی غیر صفر را به $u(x)$ منتقل می‌کنیم.

معادله انتقال حرارت $w(x,t)$ یک بعدی با شرایط مرزی صفر.

$C^2 = \frac{K}{\rho s}$ ضریب انتقال حرارت

مثال)حل معادله انتقال حرارت یک بعدی در صورتیکه ابتدا و انتهای میله عایق شده باشد.

مثال) حل معادله انتقال حرارت یک بعدی در صورتیکه ابتدا و انتهای میله عایق شده است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t) \qquad F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad G(t) = De^{-\lambda^2 c^2 t}$$

عایق می‌شه انتقال حرارتی نداریم

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = F'(x)\, G(t) = \Big|_{x=0} = 0$$

$$-A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x = 0 \Rightarrow -A\lambda\times 0 + B\lambda\times 1 = 0$$

$$\Rightarrow F'(0)\, G(t) = 0 = F'(0) = 0 \qquad B\lambda = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow F'(l) = 0 \Rightarrow -A\lambda\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \sin\lambda l = 0$$

$$\Rightarrow \lambda l = n\pi \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{l}}$$

$$F_n(x) = A_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$F_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \& \quad G(t) = D e^{-\lambda^2 c^2 t} \Rightarrow G_n(t) = D_n e^{\frac{-n^2\pi^2 c^2}{l^2} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} D_n e^{\frac{-n^2\pi^2 c^2 t}{l^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} e^{\frac{-n^2\pi^2 c^2 t}{l^2}}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$A_n D_n = C_n$$

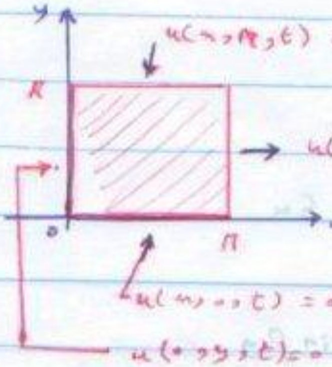
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{l} = f(x) \Rightarrow \underbrace{C_0}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

بخاطر نیم داشتن ترم

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx = C_0$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

معادله انتقال حرارت دو بعدی در صفحه :



$u(x,\pi,t)=0 \quad 0\leq x\leq \pi$

$u(\pi,y,t)=0 \quad 0<y<\pi$

$u(x,0,t)=0 \quad 0<x<\pi$

$u(0,y,t)=0 \quad 0<y<\pi$

معادله با این صورت که حرارت را بیان می کند:

معادله در صفحه :

$u(x,y,t)$

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(x,y,t)=f(x,y)$$

$$u(x,y,t)=X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow c^2\left(X''YT+XY''T\right)=XYT'$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } c^2XYT} \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=\frac{T'}{c^2T}=-\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{c^2T}=-\lambda^2 \Rightarrow T'+c^2\lambda^2T=0 \quad (1)$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{X''}{X}=-\lambda^2-\frac{Y''}{Y}=-\delta^2 \Rightarrow X''+\delta^2X=0 \quad (2)$$

$$\frac{Y''}{Y}+\lambda^2=\delta^2 \Rightarrow \frac{Y''}{Y}=-(\lambda^2-\delta^2) \Rightarrow \lambda^2-\delta^2=p^2 \Rightarrow Y''+p^2Y=0 \quad (3)$$

$$T' + c^2\lambda^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = Ae^{-c^2\lambda^2 t}$$

$$X'' + \delta^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = B\cos\delta x + D\sin\delta x$$

$$Y'' + \rho^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = E\cos\rho y + F\sin\rho y$$

حال باید تمامی A، λ، B، δ، D، E، ρ، F را بدست آوریم.

$$u(0,y,t) = 0 \Rightarrow X(0)\underbrace{Y(y)}_{\neq 0}\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\Rightarrow B\cos(\delta\times 0) + D(\sin(\delta\times 0)) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$u(\pi,y,t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \Rightarrow \underbrace{D}_{\neq 0}\underbrace{\sin\delta\pi}_{0} = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = n}$$

$$\boxed{X_n(x) = D_n \sin nx}$$ تمرین :

$$u(x,0,t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow E\cancel{\cos 0}^{1} + F\cancel{\sin 0}^{0} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

$$u(x,\pi,t) = 0 \Rightarrow Y(\pi) = 0 \Rightarrow \underbrace{F}_{\neq 0}\underbrace{\sin\rho y}_{0} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = m}$$

$$\boxed{Y_m(y) = F_m \sin my}$$

طبق رابطه گفتیم:

$$\lambda^2 - \delta^2 = \rho^2 \Rightarrow \lambda^2 = \rho^2 + \delta^2$$

$$\boxed{\lambda^2 = m^2 + n^2}$$

طبق مقادیر بدست آمده

$$T(t) = Ae^{-c^2\lambda^2 t} \Rightarrow T_{mn}(t) = A_{mn}e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$u_{mn}(x,y,t) = X_n(x)\cdot Y_m(y)\cdot T_{mn}(t) = D_n \sin nx\, F_m \sin my\, A_{mn}e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$= b_{mn}\sin nx \sin my\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$(*)\quad u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\sin nx \sin my\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\sin nx}\, \sin my = f(x,y)$$

$K_m(x)$: چون عبارت برحسب m و n است، آنگاه آن را برحسب آن جایگذاری می‌کنیم

$$① \quad \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x)\sin my = f(x,y)$$

$$② \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n}\sin nx = K_m(x)$$

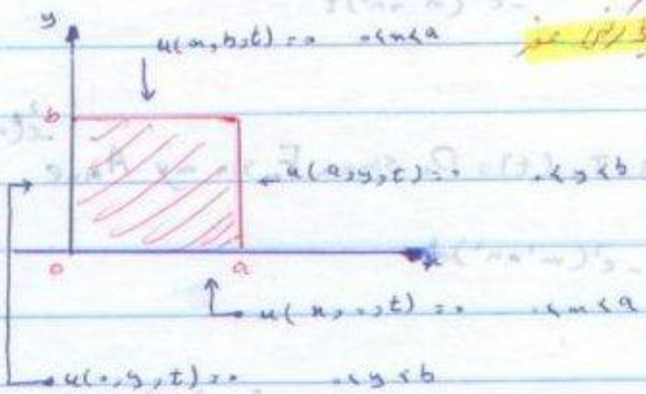
$$① \xrightarrow[\text{روی تابع } f(x,y)]{\text{بسط نیم دامنه فرد}} K_m(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin my\, dy$$

$$\xrightarrow[\text{روی تابع } K_m(x)]{\text{بسط نیم دامنه فرد}} b_{mn} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_m(x)\sin nx\, dx$$

$$* \quad b_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin my \sin nx\, dy\, dx$$

* $u(x,y,t)$ با جایگذاری مقدار b_{mn} در عبارت

معادله انتقال حرارت دو بعدی متغیر با شرایط مرزی صفر



$u(x,y,t) \qquad c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$u(x,y,0)=f(x,y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=g(x,y)$

$u(x,y,t)=X(x)\,Y(y)\,T(t)$

$c^2(X''YT+XY''T)=XYT'' \Rightarrow \left(\dfrac{X''}{X}+\dfrac{Y''}{Y}\right)=\dfrac{T''}{c^2T}=-\lambda^2$

$T''+c^2\lambda^2T=0 \Rightarrow \boxed{T(t)=A\cos c\lambda t+B\sin c\lambda t}$

$\dfrac{X''}{X}=-\left(\dfrac{Y''}{Y}+\lambda^2\right)=-s^2 \Rightarrow X''+s^2X=0$

$\Rightarrow \boxed{X(x)=D\cos sx+E\sin sx}$

$\dfrac{Y''}{Y}=-(\lambda^2-s^2)=-\rho^2 \Rightarrow Y''+\rho^2Y=0$

$\Rightarrow \boxed{Y(y)=F\cos\rho t+G\sin\rho t}$

$u(0,y,t)=0 \Rightarrow X(0)=0 \Rightarrow D\times 1+E\times 0=0 \Rightarrow D=0$

$u(a,y,t)=0 \Rightarrow X(a)=0 \Rightarrow E\sin \delta a=0 \Rightarrow \delta a=n\pi \Rightarrow \delta=\frac{n\pi}{a}$

$u(x,0,t)=0 \Rightarrow Y(0)=0 \Rightarrow F\times 1+G\times 0=0 \Rightarrow F=0$

$u(x,b,t)=0 \Rightarrow Y(b)=0 \Rightarrow G\sin \rho b=0 \Rightarrow \rho b=m\pi \Rightarrow \rho=\frac{m\pi}{b}$

$\lambda^2=\rho^2+\delta^2 \Rightarrow \lambda^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ $E_n G_m A_{mn}=a_{mn}$

$E_n G_m B_{mn}=b_{mn}$

$X_n(x)=E_n\sin\frac{n\pi}{a}x$ & $Y_m(y)=G_m\sin\frac{m\pi}{b}y$ &

$T_{mn}(t)=A_{mn}\cos c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,t+B_{mn}\sin c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,t$

$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\left(a_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,\cos c\lambda_{mn}t\right)+$

$+\left(b_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\,\sin c\lambda_{mn}t\right)\Big]$

$u(x,y,0)=f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)}_{h_n(x)}\left(\sin\frac{m\pi}{b}y\right)=f(x)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)\sin\frac{m\pi}{b}y=f(x)$

$\xrightarrow[\text{تابع } f(x)]{\text{بسط نیم دامنه فرد}}\quad h_n(x)=\frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x=h_n(x)$

$\xrightarrow[\text{تابع } h(x) \text{ روی } 2a]{\text{بسط نیم دامنه فرد}}\quad a_{mn}=\frac{2}{a}\int_0^a h_n(x)\,\frac{\sin n\pi}{a}x\,dx$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{a} x \, dy \, dx$$

$b_{mn} = ?$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x,y)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \times -c\lambda_{mn} \sin (c\lambda_{mn} t) +$$

$$\hookrightarrow c\lambda_{mn} b_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \cos c\lambda_{mn} t \Big|_{t=0} = g(x,y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c\lambda_{mn} b_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n}{b} x = g(x,y)$$ [illegible]

بسط نیم دامنه فرد

$$\xrightarrow{\quad} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(y) \sin \frac{n\pi}{b} x = g(x,y)$$

[illegible] g(x,y)

$$\Rightarrow K_n(y) = \frac{2}{b} \int_0^b g(x,y) \sin \frac{n\pi}{b} x \, dx$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c\lambda_{mn} b_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} y = K_n(y)$$

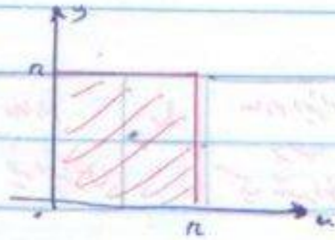
$$\Rightarrow c\lambda_{mn} b_{mn} = \frac{1}{a} \int_0^a K_n(y) \sin \frac{m\pi}{a} y \, dy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{ab} \times \frac{1}{c\lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x,y) \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{a} y \, dx \, dy$$

مثال ۲: مطلوبست معادله حرکت سطح دو بعدی با فرض معادله زیر برای صفحه $\pi \times \pi$ با شرایط زیر اگر (بسته شده به جسم صلب)

$$u(x,y,0) = f(x,y) = xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) = 0$$



$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn} \sin \frac{n\pi x}{\pi} \sin \frac{m\pi}{\pi} y \cos c\lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \frac{n\pi}{\pi} x \sin \frac{m\pi}{\pi} y \sin c\lambda_{mn} t \right)$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} xy \sin my \sin nx \, dx \, dy$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \int_0^{\pi} y \sin my \, dy$$

$$b_{mn} = 0$$

تبدیل لاپلاس:

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

معادله دیفرانسیل برحسب یک متغیر دیفرانسیل $\xrightarrow{L}$ معادله غیردیفرانسیل $\xrightarrow{\text{حل}}$ پاسخ معادله مشخص $\xrightarrow{L^{-1}}$ پاسخ معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u(x,t)$ برحسب t تبدیل لاپلاس گرفته شود $\longrightarrow$ معادله دیفرانسیل برحسب یک متغیر دیفرانسیل $\xrightarrow{\text{حل معادله}}$ پاسخ معادله دیفرانسیل برحسب یک متغیر $\xrightarrow{L^{-1}}$ پاسخ معادله اولیه