تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۷۰	
موضوع ری‌اضی عمومی پی‌ش دانشگاهی و پای‌ه(× کاربرد مشتق)		گروه مشاوره خاکسار

۱. بیشترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin ۲x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

-سراسری-۱۳۸۷

۲. منحنی نمایش تابع $y=-x^{۴}+۴x^{۳}-۳$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

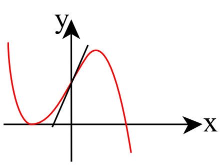
۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۲,+\infty)$

-سراسری-۱۳۹۱

۳. طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-۱۰x^{\frac{۲}{۳}}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $۰,-۲$ ۳) ۲ ۴) $۰\ ,۲$

-سراسری-۱۳۸۷



۴. شکل مقابل نمودار تابع $y=-x^{۳}+ax^{۲}+bx+۲$ است. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

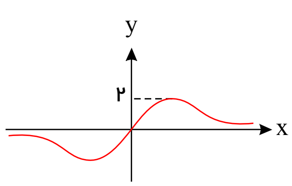
۱) $(۰,-۳)$
۲) $(۱,-۲)$
۳) $(۰,۳)$
۴) $(۰,۶)$

-سراسری-۱۳۸۸

۵. نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y=۲x-\sqrt{x^{۲}-۲x}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

-سراسری-۱۳۸۸



۶. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{x^{۲}+۱}$ است. a کدام است؟

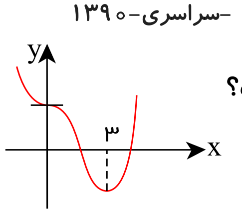
۱) ۱ ۲) ۲
۳) -۴ ۴) ۴

-سراسری-۱۳۸۸

۷. طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

-سراسری-۱۳۹۰



۸. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+۲$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰
۳) ۱ ۴) -۱

-سراسری-۱۳۹۰

۹. نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین

۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

-سراسری-۱۳۸۵

۱۰. ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

-سراسری-۱۳۸۵

۱۱. در کدام ناحیه‌ی دستگاه محورهای مختصات تقعر نمودار تابع $y=x+\frac{۱}{x}$ به سمت بالا است؟

۱) اوّل ۲) دوّم ۳) سوّم ۴) چهارم

-سراسری-۱۳۸۴

۱۲. مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^{۳}}{x^{۲}-۴x+۴}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند، عرض نقطه‌ی A کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

-سراسری-۱۳۸۴

۱۳. دو نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^{۲}e^{x}$ در کدام نواحی مختصات قرار دارند؟

۱) هر دو در ناحیه‌ی دوم ۲) هر دو در ناحیه‌ی سوم

۳) یکی در ناحیه‌ی اول و یکی در ناحیه‌ی دوم ۴) یکی در ناحیه‌ی سوم و یکی در ناحیه‌ی چهارم

-سراسری-۱۳۸۴

۱۴. تابع f با ضابطه $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x$ همواره صعودی است. تغییرات a کدام است؟

۱) $۰\leq a<۲$ ۲) $-\sqrt{۳}\leq a<۲$ ۳) $|a|<\sqrt{۳}$ ۴) $|a|\leq ۲$

-سراسری-۱۳۸۲

۱۵. مجانب‌های منحنی به معادله $y=\frac{x^{۳}+x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}$ در نقطه A متقاطع‌اند، عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-سراسری-۱۳۸۲

۱۶. به ازای کدام مقدار a، تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=ax^{۳}+(۱-a^{۲})x^{۲}+۳x$ در بازه‌ی $(-\infty,\frac{۱}{۲})$ به طرف پایین و در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ به طرف بالا است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۸۲

۱۷. خطوط مجانب منحنی تابع با ضابطه $y=\frac{۲x^{۳}-۳x^{۲}}{x^{۲}-۱}$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند، فاصله آن دو نقطه کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۴ ۴) ۵

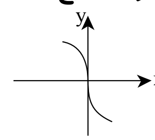
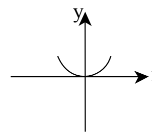
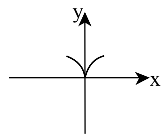
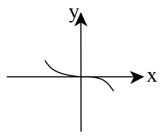
-سراسری-۱۳۸۱

۱۸. مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله‌ی $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$ رو به پایین باشد، به کدام صورت است؟

۱) $-2<x<0$ ۲) $0<x<2$ ۳) $0<x<1$ ۴) $-1<x<2$

-سراسری-۱۳۸۹

۱۹. نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

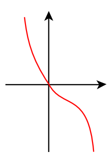
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

-خارج از کشور-۱۳۹۱

۲۰. اگر محور yها تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3+ax-2}{x^2-x}$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی مجانب مایل آن کدام است؟

۱) $y=x-2$ ۲) $y=x-1$ ۳) $y=x+1$ ۴) $y=x+2$

-خارج از کشور-۱۳۹۱



۲۱. شکل مقابل نمودار تابع $y=ax^3+bx^2-4x$ است. کدام دوتایی برای (a,b) می‌تواند مورد قبول باشد؟

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,6)$
۳) $(1,-2)$ ۴) $(1,4)$

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۲۲. دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵− نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

۱) -84 ۲) -81 ۳) -57 ۴) -75

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۲۳. طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) فاقد نقطه ی عطف

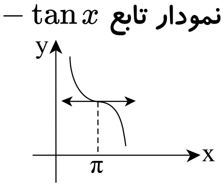
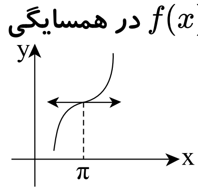
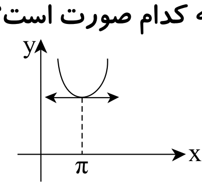
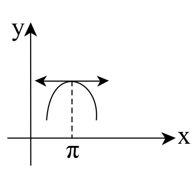
-خارج از کشور-۱۳۹۰

۲۴. منحنی به معادله‌ی $a\neq 0$, $y=\dfrac{x^2+3x}{ax^2+4x-1}$، فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ۲) $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$
۳) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

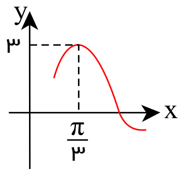
-خارج از کشور-۱۳۸۷

۲۵. نمودار تابع $f(x)=x-\tan x$ در همسایگی $x=\pi$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

-سراسری-۱۳۷۹

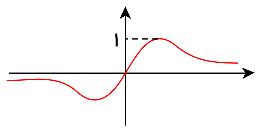
۲۶. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\cos x+A\sin x+B$ است. B کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۷۳

۲۷. شکل زیر نمودار تابع $y=\dfrac{ax^{۲}+bx}{x^{۲}+۴}$ است. دوتایی (a,b) کدام است؟



۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۲,۰)$
۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۰,۴)$

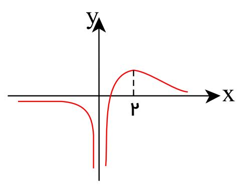
-سراسری-۱۳۷۷

۲۸. تقعر منحنی به معادله $y=x\sqrt{x^{۲}+۲}$ در بازه‌ی $(a,+\infty)$ رو به بالا است. کم‌ترین مقدار a، کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

-سراسری-۱۳۹۲

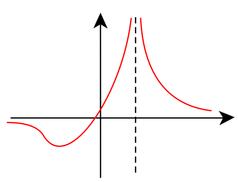
۲۹. شکل مقابل، نمودار تابع $y=\dfrac{x+b}{x^{۲}+a}$ است. دوتایی مرتب $(a\ ,\ b)$ کدام است؟



۱) $(-۱\ ,\ -۱)$ ۲) $(۰\ ,\ -۱)$
۳) $(۰\ ,\ ۱)$ ۴) $(۱\ ,\ -۲)$

-خارج از کشور-۱۳۸۸

۳۰. شکل مقابل نمودار تابع $y=\dfrac{x+a}{x^{۲}+bx+۴}$ است. مقادیر a و b، چگونه است؟



۱) $b=۴, a<۰$ ۲) $b=-۴, a<۰$
۳) $b=۴, a>۰$ ۴) $b=-۴, a>۰$

-سراسری-۱۳۹۳

۳۱. تقعر نمودار تابع $y=(x+۳)\sqrt{x}$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

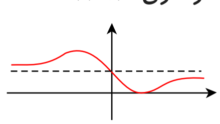
-خارج از کشور-۱۳۹۲

۳۲. اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=x^{۳}-(m+۲)x^{۲}+۳x$، همواره صعودی باشند. آنگاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

-سراسری-۱۳۹۴

۳۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx+۸}{x^{۲}+۴}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۷ ۲) -۶
۳) ۹ ۴) ۱۰

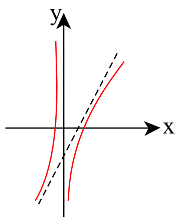
-سراسری-۱۳۹۴

۳۴. در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۳x^{۲}$، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

۱) $(-۲,\circ)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(\circ,۱)$

-خارج از کشور-۱۳۹۳

۳۵. شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{x^{۲}+ax-۲}{x+b}$ است. مقادیر a و b، چگونه است؟



۱) $b<\circ\,,\,a<\circ$ ۲) $b>\circ\,,\,a=\circ$

۳) $b=\circ\,,\,a>\circ$ ۴) $b=\circ\,,\,a<\circ$

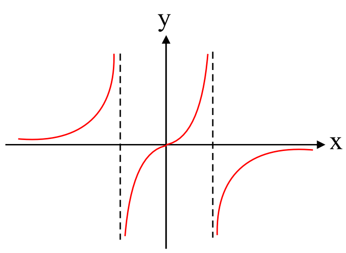
-خارج از کشور-۱۳۹۳

۳۶. اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-(m-۱)x^{۲}+۸x$ ، دارای ماکسیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آنگاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $(-۵,-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۴,-۱)$ ۳) $(-\infty-۲)$ ۴) $(-\infty,-۴)$

-خارج از کشور-۱۳۹۴

۳۷. شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{ax^{۲}+bx+۱}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $a<\circ\,,\;b=\circ$

۲) $a>\circ\,,\;b=\circ$

۳) $a>\circ\,,\;b=۱$

۴) $a<\circ\,,\;b=۱$

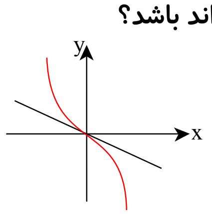
-خارج از کشور-۱۳۹۴

۳۸. نمودار تابع $y=-۴\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ ، روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

-سراسری-۱۳۹۱

۳۹. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^{۳}+ax^{۲}+bx$ است. دوتایی (a,b) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-۱,\circ)$ ۲) $(\circ,-۱)$

۳) $(\circ,۱)$ ۴) $(۱,\circ)$

-خارج از کشور-۱۳۸۵

۴۰. به ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=x+a$ از نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۲x^{۲}-۲x}{x^{۲}+x-۲}$ می‌گذرد؟

۱) ۴-   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۴

-خارج از کشور-۱۳۸۵

۴۱. خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{Ax^{۳}+۱}{(A-۱)x^{۳}+۱۶}$ است. معادله‌ی مجانب قائم نمودار تابع f کدام است؟

۱) $x=-۴$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۴$

-سراسری-۱۳۸۲

۴۲. معادله مجانب مایل نمودار تابع باضابطه‌ی $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲}}$، وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) $۲y-۲x-۳=\circ$ ۲) $۲y+۲x-۳=\circ$ ۳) $۲y-۲x+۳=\circ$ ۴) $۲y+۲x+۳=\circ$

-سراسری-۱۳۸۷

۴۳. خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x-۱+\sqrt{ax^{۲}+bx}$ است. b کدام است؟

۱) $-۱\circ$ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۴۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۲x^{۲}-۳x}{(x-۱)^{۲}}$، خط مجانب افقی خود را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط مجانب قائم کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

-خارج از کشور-۱۳۸۸

۴۵. نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt[۳]{x^{۲}-x^{۳}}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

-خارج از کشور-۱۳۹۲

۴۶. تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^{۲}+۹}{x^{۲}+۱۲}$ در بازه (a,b) رو به بالا است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۸۸

۴۷. به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x^{۲}+k$ در بازه‌ی $[۱,۳]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-سراسری-۱۳۸۴

۴۸. تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=|\sin x|$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

-سراسری-۱۳۸۲

۴۹. تابع با ضابطه‌ی $y = ax + b + \dfrac{x^{۲}}{۲x - ۱}$ تابع هموگرافیکی است که محور yها را درنقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

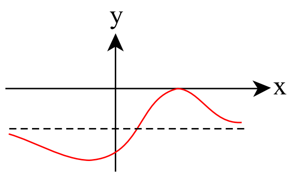
–سراسری–۱۳۸۷

۵۰. تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}}$ در بازه (a,b) روبه پایین است، بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ∞

–سراسری–۱۳۸۷

۵۱. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{ax^{۲} + ۴x - ۴}{x^{۲} + b}$ است. دو تایی مرتب (a,b) به کدام صورت زیر می تواند باشد؟



۱) $(-۲,۵)$ ۲) $(-۱,۳)$

۳) $(-۱,۵)$ ۴) $(۱,۳)$

–سراسری–۱۳۸۱

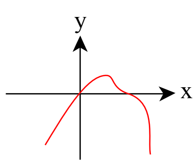
۵۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) یک مینیمم نسبی دارد. ۲) یک ماکسیمم نسبی دارد.

۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد. ۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

–خارج از کشور–۱۳۹۰

۵۳. ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y = x(۱-x)^{۳}$ ۲) $y = x(x-۱)^{۳}$

۳) $y = x(۱-x^{۳})$ ۴) $y = x(x^{۳}-۱)$

–خارج از کشور–۱۳۸۷

۵۴. نمودار تابع $y = xLn|x|$، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(-۱,-\dfrac{۱}{e})$ ۲) $(-\dfrac{۱}{e},۰)$ ۳) $(۰,\dfrac{۱}{e})$ ۴) $(\dfrac{۱}{e},۱)$

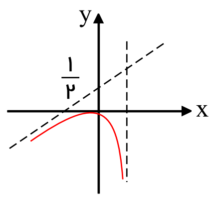
–خارج از کشور–۱۳۹۴

۵۵. منحنی به معادله‌ی $y = \dfrac{x+۱}{۱-۲x}$، محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند. فاصله مرکز تقارن این منحنی از وتر AB، کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

–خارج از کشور–۱۳۸۹

۵۶. شکل مقابل، نمودار پیوسته از تابع $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{2x+b}$ است. b کدام است؟



۱) -2
۲) $-\dfrac{3}{2}$
۳) -1
۴) $\dfrac{3}{2}$

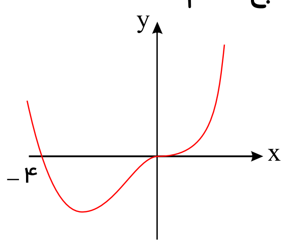
-خارج از کشور-۱۳۸۵

۵۷. مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-15x$، در بازه‌ی $[-4,3]$ ، کدام است؟

۱) -18 و 24
۲) -45 و 27
۳) -36 و 27
۴) -27 و 36

-سراسری-۱۳۹۵

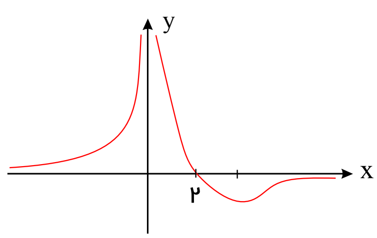
۵۸. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx$ است. با تعیین مقادیر a و b، مینیمم تابع، کدام است؟



۱) -36
۲) -32
۳) -27
۴) -24

-سراسری-۱۳۹۵

۵۹. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین aو b، عرض مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) $-\dfrac{1}{8}$
۲) $-\dfrac{1}{4}$
۳) $-\dfrac{3}{8}$
۴) $-\dfrac{1}{2}$

-خارج از کشور-۱۳۹۵

۶۰. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^3-3x^2+4$ در نقطه‌ی عطف آن ، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\dfrac{4}{3}$
۲) $\dfrac{5}{3}$
۳) 2
۴) 3

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۶۱. در کدام بازه ،تقعر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$ رو به پایین است؟

۱) $(-\infty,-8)$
۲) $(-8,0)$
۳) $(-4,2)$
۴) $(0,2)$

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۶۲. فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و یک نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=x^4-6x^2+5$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$
۲) $\sqrt{13}$
۳) $\sqrt{17}$
۴) $\sqrt{26}$

-خارج از کشور-۱۳۸۴

۶۳. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو خط مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{۲}}{x+۱}$ از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵}$

-خارج از کشور-۱۳۸۴

۶۴. نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^{۳}-۳x^{۲}+۴)^{\frac{۱}{۳}}$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ چگونه است؟

۱) مینیمم ۲) ماکسیمم ۳) عطف ۴) مشتق‌ناپذیر

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۶۵. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۲,۰)$ از خط مجانب منحنی به معادله‌ی $y=x-\sqrt{x^{۲}-۲x}\ ,\ x\leq ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

-خارج از کشور-۱۳۹۰

۶۶. تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x^{۲}+\sqrt{x}$ در کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۴})$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۶۷. اگر $A(۱,-۲)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=ax^{۳}+bx^{۲}-۳x-۱$ باشد. مقدار تابع در نقطه‌ی ماکسیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) فاقد ماکسیمم نسبی

-خارج از کشور-۱۳۹۶

۶۸. عرض از مبدأ خط مجانب منحنی $y=x\sqrt{\frac{۴x-۳}{x-۱}}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

-سراسری-۱۳۹۶

۶۹. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos^{۲}x-۲\cos x; x\in[۰,۲\pi]$ ، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲})$

-سراسری-۱۳۹۶

۷۰. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^{۲}x-۲\sin x;\ x\in[۰,۲\pi]$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(\frac{۷\pi}{۶}\ ,\ \frac{۳\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ \frac{۱۱\pi}{۶})$ ۳) $(\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۵\pi}{۶})$ ۴) $(\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۷\pi}{۶})$

-خارج از کشور-۱۳۹۶

تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۷۰	
موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه(× کاربرد مشتق)		گروه مشاوره خاکسار

۱.گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a}$

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2(1-2\sin^2 x) - 2\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

با حل این معادله درجه‌ی دوم که بر حسب $\sin x$ است و $a+c=b$ می باشد یک ریشه (-1) و ریشه‌ی دیگر $-\dfrac{c}{a}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = 0 + 0 = 0, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ ,\ f(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

دقت کنید $\sin\dfrac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \dfrac{\pi}{3}) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{6}) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ است.

پس بیشترین مقدار تابع برابر $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ است.

۲.گزینه ۱

برای آنکه تابع $y = -x^4 + 4x^3 - 3$ صعودی و تقعرش رو به پایین باشد، باید علامت مشتق اول و دوم آن به ترتیب مثبت و منفی باشد.

پس داریم:

$$y' = -4x^3 + 12x^2 > 0 \Rightarrow -4x^2(x-3) > 0 \quad \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 3 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, 0)\cup(0,3)$$

$$y'' = -12x^2 + 24x < 0 \longrightarrow x^2 - 2x > 0 \quad \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline y'' & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, 0)\cup(2,\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (-\infty, 0)\cup(2,3)$$

۳.گزینه ۱

از تابع داده شده دو بار مشتق می گیریم.

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

در $x=0$, y'' وجود ندارد و

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{10}{9}(x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{4}{3}}) = \frac{10}{9}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}) = \frac{10}{9}(\frac{x+2}{x\sqrt[3]{x}}) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\ \hline f'' & & - & 0 & + & \| & + & \end{array}$$

f'' فقط در $x=-2$ تغییر علامت داده است. پس طول نقطه‌ی عطف $x=-2$ است.

۴.گزینه ۳ طبق نمودار، $x=0$ طول نقطه‌ی عطف است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۳} = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

چون این تابع دارای دو اکسترمم نسبی است پس مشتق دارای ۲ ریشه‌ی ساده می‌باشد.

$$y' = -۳x^۲ + b = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{۳}}$$

طول نقطه‌ی Min برابر $-\sqrt{\frac{b}{۳}}$ و عرض آن صفر است.

$$y = -x^۳ + bx + ۲ = ۰ \xrightarrow[\text{صدق در تابع}]{(-\sqrt{\frac{b}{۳}},۰)} \frac{b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} - b\sqrt{\frac{b}{۳}} = -۲ \Rightarrow \frac{۲b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} = ۲ \Rightarrow b = ۳$$

۵.گزینه ۳

کافی است از تابع حد در بی‌نهایت بگیریم. $(\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^۲+bx+c} \sim \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|)$

$$y = ۲x - |x-۱| \to \begin{cases} x \to +\infty : y = ۲x - (x-۱) \to y = x+۱ \\ x \to -\infty : y = ۲x - (-x+۱) \to y = ۳x-۱ \end{cases}$$

برای پیدا کردن نقطه‌ی تلاقی این دو مجانب کافی‌است با آن‌ها تشکیل دستگاه دهیم.

$$\begin{cases} y = x+۱ \\ y = ۳x-۱ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۱ = x + ۱ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow A(۱,۲)$$

۶.گزینه ۴ منحنی از مبدا مختصات عبور می‌کند پس $\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} ۰ = \frac{۰+b}{۰+۱} \Rightarrow b = ۰$$

عرض Max برابر ۲ می‌باشد کافی است آن را با منحنی تلاقی دهید و معادله تلاقی ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax}{x^۲+۱} \\ y_{Max} = ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{ax}{x^۲+۱} = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ax + ۲ = ۰ \text{ :معادله‌ی تلاقی}$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \to a^۲ - ۱۶ = ۰ \to a = ۴, a = -۴$

$a = ۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y = \dfrac{۴x}{\underbrace{x^۲+۱}_{+}} \to$ دقت کنید x و y هم علامت هستند که با شکل داده شده همخوانی دارد.

$a = -۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y = \dfrac{-۴x}{\underbrace{x^۲+۱}_{+}} \to$ دقت کنید x و y غیر هم علامت هستند که با شکل داده شده همخوانی ندارد(غ ق ق)

۷.گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+۱} & x \geq ۰ \\ \dfrac{x}{۱-x} & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{(۱+x)^۲} & x > ۰ \\ \dfrac{۱}{(۱-x)^۲} & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-۲}{(x+۱)^۳} & x > ۰ \\ \dfrac{۲}{(x+۱)^۳} & x < ۰ \end{cases}$$

چون $f''_{+}(۰) = -۲, f''_{-}(۰) = ۲$ پس f'' در $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد در نتیجه $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف f خواهد بود ضمناً خط مماس نیز در صفر وجود دارد. چون $f'_{+}(۰) = f'_{-}(۰) = ۱$ در ضمن تابع در $x = ۰$ پیوسته هم است $(\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰) = ۰)$.

۸.گزینه ۴

با توجه به شکل ، $x=۳$ طول Min است و مشتق را صفر می‌کند و $x=۰$ طول نقطه‌ی عطف است و مشتق دوم را صفر می‌کند.

$$f'(x)=x^۳+۳ax^۲+۲bx \Rightarrow f'(۳)=۲۷+۲۷a+۶b=۰$$

$$f''(x)=۳x^۲+۶ax+۲b \Rightarrow f''(۰)=۲b=۰ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow ۲۷+۲۷a+۰=۰ \Rightarrow a=-۱$$

۹.گزینه ۴

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y=x^۲(x-۲)^۲ \Rightarrow y'=۲x(x-۲)^۲+۲(x-۲)\cdot x^۲=\underbrace{۲x(x-۲)}_{\text{فاکتور}}(x-۲+x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲x(x-۲)(۲x-۲)=۰$$

$$x=۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۰ \quad \to \quad A\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}$$

$$x=۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۰ \quad \to \quad B\begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix} \Rightarrow AB=\sqrt{۴+۰}=۲\ ,\ AC=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}\ ,\ BC=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۱ \quad \to \quad C\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix}$$

مثلث متساوی‌الساقین است و چون $۲^۲=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲$ پس مثلث قائم‌الزاویه نیز می‌باشد.

۱۰.گزینه ۲ روش اول:

$$y=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}=\frac{۱}{x^۲(x^۲-۴x+۴)+۵}=\frac{۱}{x^۲(x-۲)^۲+۵}$$

کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲(x-۲)^۲$ مساوی صفر است بنابراین کم‌ترین مقدار مخرج کسر مساوی ۵ است پس ماکسیمم مطلق تابع $\frac{۱}{۵}$ است. (صورت کسر یک عدد مثبت است پس بیش‌ترین مقدار کسر وقتی بدست می‌آید که مخرج کسر، کم‌ترین مقدار را داشته باشد)

روش دوم:

$$Df=R=(-\infty,+\infty)$$

$$y'=\frac{-(۴x^۳-۱۲x^۲+۸x)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=\frac{-۴x(x^۲-۳x+۲)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=\frac{-۴x(x-۱)(x-۲)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=۲\end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای $\pm\infty$ و طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(۰)=\frac{۱}{۵}\ \text{مطلق}\ \min \quad \text{و} \quad f(۱)=\frac{۱}{۶}\ ,\ f(۲)=\frac{۱}{۵}\ ,\ f(\pm\infty)=\frac{۱}{x^۴}=\frac{۱}{+\infty}=۰$$

اگر بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع به ازای $\pm\infty$ به‌دست می‌آمدند تابع max یا min مطلق نداشت.

۱۱.گزینه ۱

$$y=x+\frac{۱}{x} \Rightarrow y'=۱-\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow y''=\frac{۲}{x^۳}>۰ \Rightarrow x>۰$$

وقتی $x>۰$ است. با توجه به این‌که $y=x+\frac{۱}{x}$ است y هم مثبت است بنابراین در ناحیه‌ی اول دستگاه محورهای مختصات، تقعر به سمت بالا است.

۱۲.گزینه ۴

مجانب قائم: $\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$

چون درجه‌ی صورت یک واحد از درجه‌ی مخرج بیش‌تر است صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم در صورت وجود، مجانب مایل را به

$$\begin{array}{l|l} x^{3} & x^{2}-4x+4 \\ \hline -x^{3}+4x^{2}-4x & x+4 \\ 4x^{2}-4x & \\ -4x^{2}+16x-16 & \\ 12x-16 & \end{array}$$

$\Rightarrow y=x+4$ مجانب مایل

حال، با این دو مجانب تشکیل دستگاه می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=x+4 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=2\ ,\ y=6 \Rightarrow A\Big|\begin{matrix}2\\6\end{matrix}$$

پس عرض نقطه‌ی A، ۶ می‌باشد.

۱۳.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\rightarrow y'=u'e^{u}\ \ ,\ \ (uv)'=u'v+v'u}$

از تابع دو بار مشتق می‌گیریم.

$$y=x^{2}e^{x}\Rightarrow y'=2xe^{x}+x^{2}e^{x}\Rightarrow y''=2e^{x}+2xe^{x}+2x\cdot e^{x}+x^{2}\cdot e^{x}$$
$$\rightarrow y''=2e^{x}+4xe^{x}+x^{2}e^{x}=e^{x}(x^{2}+4x+2)=0\xrightarrow{e^{x}>0}\Delta>0\ ,\ \frac{c}{a}>0\ ,\ -\frac{b}{a}<0$$

بنابراین تابع دارای دو نقطه‌ی عطف با طول‌های منفی است و چون تابع همواره مثبت است ($y=x^{2}e^{x}$) پس عرض این دو نقطه‌ی عطف، مثبت است یعنی دو نقطه‌ی عطف در ناحیه‌ی دوم قرار دارند.

۱۴.گزینه ۳

برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

$$y'=3x^{2}+2ax+1>0\rightarrow\begin{cases} a>0\rightarrow 3>0 \\ \Delta<0\rightarrow 4a^{2}-12<0\rightarrow a^{2}<3\rightarrow-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}\rightarrow|a|<\sqrt{3} \end{cases}$$

۱۵.گزینه ۴

مخرج $=0\Rightarrow(x-1)^{2}=0\Rightarrow x=1$ مجانب قائم

چون درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و در صورت وجود مجانب مایل را بدست می آوریم.

$$\begin{array}{l|l} x^{3}+x^{2} & x^{2}-x+1 \\ \hline -x^{3}+2x^{2}-x & x+3 \\ 3x^{2}-x & \\ -3x^{2}+6x-3 & \\ 5x-3 & \end{array}$$

$\Rightarrow y=x+3$ مجانب مایل

حال، با این دو مجانب تشکیل دستگاه می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=x+3 \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow x=1\ ,\ y=4\Rightarrow A\Big|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}$$

عرض نقطه A ، ۴ می‌باشد.

۱۶.گزینه ۴

تابع داده شده یک تابع درجه‌ی سوم است و چون در $x=\frac{۱}{۲}$ جهت تقعر عوض شده است پس $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف است و y'' را صفر می‌کند.

$$y'=۳ax^۲+۲(۱-a^۲)x+۳ \Rightarrow y''=۶ax+۲(۱-a^۲) \xrightarrow{f''(\frac{۱}{۲})=۰} ۳a+۲(۱-a^۲)=۰ \Rightarrow ۲a^۲-۳a-۲=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۹+۱۶=۲۵ \rightarrow \begin{cases} a=\frac{۳+۵}{۴}=۲ \\ a=\frac{۳-۵}{۴}=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حال، باید مشخص کنیم کدام یک از مقادیر a، قابل قبول هستند.

$$a=۲ \Rightarrow y''=۱۲x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{۱}{۲} & +\infty \\ \hline y'' & - & ۰ & + \\ \hline y & \cap & & \cup \end{array}$$

$$a=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y''=-۳x+\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{۱}{۲} & +\infty \\ \hline y'' & + & ۰ & - \\ \hline y & \cup & & \cap \end{array}$$

چون سوال گفته قبل از $x=\frac{۱}{۲}$ تقعر رو به پایین و بعد از آن تقعر رو به بالا است پس $a=۲$ قابل قبول است.

۱۷.گزینه ۲

مجانب های قائم $\text{مخرج}=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=۱, x=-۱$

برای پیدا کردن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳-۳x^۲ & x^۲-۱ \\ \cline{2-2} & ۲x-۳ \\ \underline{-۲x^۳+۲x} & \\ -۳x^۲+۲x & \\ \underline{۳x^۲+۳} & \\ ۲x+۳ & \end{array}$$

مجانب مایل $\Rightarrow y=۲x-۳$

$$\begin{matrix} x=۱ \xrightarrow{y=۲x-۳} y=-۱ & A\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \\ x=-۱ \xrightarrow{y=۲x-۳} y=-۵ & B\left|\begin{matrix}-۱\\-۵\end{matrix}\right. \end{matrix} \Rightarrow AB=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۱+۵)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۱۸.گزینه ۲

$$y=(x^۲+۲x+۲)e^{-x}$$

$$y'=(۲x+۲)e^{-x}-(x^۲+۲x+۲)e^{-x} \Rightarrow y'=e^{-x}(۲x+۲-x^۲-۲x-۲)$$

$$y'=-x^۲e^{-x} \Rightarrow y''=-۲xe^{-x}+e^{-x}\cdot x^۲=(-۲x+x^۲)e^{-x}<۰ \xrightarrow{e^{-x}>۰} -۲x+x^۲<۰$$

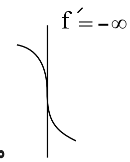
$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & ۰ & & ۲ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}<۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array} \rightarrow ۰<x<۲$$

۱۹.گزینه ۱ روش اول: برای بررسی نمودار تابع $y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}}$ در حوالی مبدأ مختصات، داریم:

$$y' = \frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{4}{5}(2\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}) = \frac{4}{5}(\frac{2\sqrt[5]{x^5}-3}{\sqrt[5]{x^2}}) = \frac{4}{5}(\frac{2x-3}{\sqrt[5]{x^2}})$$

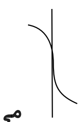
همان طور که مشاهده می کنیم $x=0$ ریشه ی مضاعف مخرج y' است. پس علامت مشتق در دو طرف این نقطه تغییر نکرده و تابع در اطراف این نقطه یا صعودی است و یا نزولی. برای پی بردن به این موضوع. داریم:

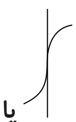
$y'(0) = \frac{4}{5}(\frac{-3}{0^+}) = -\infty \Rightarrow$ تابع در حوالی $x=0$ ، نزولی است



در نتیجه نمودار تابع در حوالی $x=0$ به شکل می باشد.

روش دوم: در توابع رادیکالی با فرجه فرد، ریشه های ساده یا مکرر مرتبه ی فرد زیر رادیکال، طول نقاط عطف قائم منحنی محسوب





می شوند. نمودار تابع در اطراف نقاط عطف قائم به صورت یا می باشند:

$$y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{3}{5}}(x-4) = (x-4)\sqrt[5]{x^3}$$

همان طور که مشاهده می کنیم $x=0$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد است. پس بدون هیچ گونه بررسی و با توجه به نکته ی بالا، $x=0$ طول عطف قائم می باشد.

۲۰.**گزینه ۳** چون محور yها، یعنی خط $x=0$، تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3+ax-2}{x^2-x}$ است، نتیجه می گیریم که ریشه‌ی دیگر مخرج کسر، یعنی $x=1$، ریشه‌ی صورت کسر نیز می‌باشد که به عنوان مجانب قائم معرفی نشده است. پس داریم:

$x=1 \Rightarrow 1^3 + a(1) - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ ریشه‌ی صورت کسر است.

حال با معلوم بودن $a=1$ ، ضابطه‌ی تابع f را به صورت معلوم نوشته و برای تعیین معادله‌ی خط مجانب مایل آن، صورت را بر مخرج کسر تقسیم کرده و خارج قسمت تقسیم را به عنوان مجانب مایل معرفی می‌نماییم داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-2 & \begin{array}{l} x^2-x \\ \hline x+1 \end{array} \\ \underline{-(x^3-x^2)} & \\ x^2+x-2 & \\ \underline{-(x^2-x)} & \\ 2x-2 & \end{array}$$

$\Rightarrow y = x+1$ مجانب مایل

۲۱.**گزینه ۱** با توجه به نمودار، تابع $y = ax^3 + bx^2 - 4x$ همواره نزولی بوده و دارای نقطه‌ی عطفی با طول مثبت است. برای آن که تابع همواره نزولی باشد، باید y' همواره کوچک‌تر صفر باشد. پس داریم:

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 4 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 4b^2 + 4(12a) < 0 \Rightarrow b^2 + 12a < 0 \\ a < 0 \Rightarrow 3a < 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

(دقت کنید شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره منفی باشد آن است که $a<0$ و $\Delta < 0$ باشد.)

$$x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{3a} > 0 \xrightarrow{a<0} b > 0$$

چون $a<0$ است، پس تنها گزینه‌های (۱) و (۲) قابل قبول هستند و بین این دو گزینه، تنها گزینه ی (۱) در شرط $b^2 + 12a < 0$ صدق می کند.

۲۲.**گزینه ۲** دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵− نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. پس به ازای این دو طول، مشتق تابع برابر صفر می‌شود. داریم:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(3)=0 \Rightarrow 27+6a+b=0 \\ f'(-5)=0 \Rightarrow 75-10a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=-45$$

حال با معلوم شدن ضابطه‌ی f، برای تعیین عرض مینیمم نسبی این تابع، ابتدا طول مینیمم نسبی را از روی ریشه‌های ساده‌ی f' مشخص می‌کنیم و با جای‌گذاری طول مینیمم نسبی در تابع، عرض آن را محاسبه می‌نماییم. اما با توجه به صورت تست، $x=-5$, $x=3$ همان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع می‌باشند.

$$f(x)=x^3+3x^2-45x \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-45=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

$$y_{Min}=f(3)=27+27-135=-81$$

.۲۳گزینه ۴

از تابع داده شده دو بار مشتق می‌گیریم و توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع $Df=R-\{0\}$ است.

$$y=\frac{(2-x)^2}{x} \Rightarrow y=\frac{x^2-4x+4}{x} \Rightarrow y=x-4+4x^{-1} \Rightarrow y'=1-4x^{-2} \Rightarrow y''=8x^{-3}=\frac{8}{x^3}$$

y'' در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد اما چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نقطه‌ی عطف محسوب نمی‌شود بنابراین تابع، فاقد نقطه‌ی عطف است.

.۲۴گزینه ۲ می دانیم طبق صورت سوال منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^2+3x}{ax^2+4x-1}(a\neq 0)$ فقط دو خط مجانب دارد. چون این تابع قطعاً دارای یک مجانب افقی به معادله‌ی $y=\frac{1}{a}$ است و مجانب مایل هم ندارد، لذا تابع فوق باید تنها دارای یک خط مجانب قائم باشد.

برای این که تابع دارای یک خط مجانب قائم باشد یکی از شرایط ممکن این است که مخرج آن دارای یک ریشه‌ی مضاعف باشد. برای این منظور باید Δی مخرج، صفر باشد:

$$\Delta_{\text{ی مخرج}}=0 \Rightarrow 16-4a(-1)=0 \Rightarrow 16+4a=0 \Rightarrow a=-4$$

حال مجانب‌های قائم و افقی تابع و سپس نقطه‌ی تلاقی این مجانب‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\xrightarrow{a=-4} \quad y=\frac{x^2+3x}{-4x^2+4x-1}$$

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-4x^2}=-\frac{1}{4} \to y=-\frac{1}{4}$

مجانب قائم: $\text{مخرج}=0 \to 4x^2-4x+1=0 \to (2x-1)^2=0 \to 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

بنابراین نقطه تلاقی مجانب‌ها، $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ می‌باشد.

توجه کنید جواب دیگر این مساله به ازای $a=\frac{13}{9}$ اتفاق می‌افتد که منحنی تابع به صورت $y=\frac{9x}{13x-3}$ خواهد بود که دو مجانب $x=\frac{3}{13}$, $y=\frac{9}{13}$ را دارد که در گزینه‌ها نمی‌باشد (این حالت وقتی رخ می‌دهد که فرض کنیم مخرج دارای ۲ ریشه است که یکی از این ریشه‌ها $x=-3$، چون ریشه صورت هم است دیگر مجانب قائم نمی‌باشد)

.۲۵گزینه ۱

$$f(x)=x-\tan x \Rightarrow f'(x)=1-(1+\tan^2 x)=-\tan^2 x$$

با توجه به این که مشتق اول یا همان شیب تابع همیشه منفی است پس نمودار منحنی همواره نزولی است و فقط گزینه ی اول این شرایط را دارد.

۲۶.**گزینه ۲** **با توجه به شکل، نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۳}\\ ۳\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی Max نسبی است و می‌دانیم اکسترمم‌های نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای ۲ خاصیت هستند:**

۱) در تابع صدق می‌کنند. ۲) طولشان، y' را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۳}\\ ۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} ۳=\cos(\frac{\pi}{۳})+A\sin(\frac{\pi}{۳})+B$$

$$\Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}+A(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+B\Rightarrow ۶=۱+\sqrt{۳}A+۲B\Rightarrow ۲B+A\sqrt{۳}=۵ \quad (I)$$

$$f'(x)=-\sin x+A\cos x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲}+A(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow A=\sqrt{۳}$$

$$(I)\xrightarrow{A=\sqrt{۳}} ۲B+۳=۵\Rightarrow ۲B=۲\Rightarrow B=۱$$

۲۷.گزینه ۴ از روی شکل مشخص است که $y=0$ معادله‌ی مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a=0$$

چون عرض Max نسبی برابر یک می باشد می توانیم آن را با معادله‌ی منحنی تلاقی داده و معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y=\frac{bx}{x^2+4} \\ y=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{bx}{x^2+4}=1\rightarrow x^2-bx+4=0 \text{ :معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف : } \Delta=0\rightarrow b^2-16=0\rightarrow b=\pm 4$$

دقت کنید $b=-4$ غیر قابل قبول می باشد زیرا تابع به صورت $y=\frac{-4x}{x^2+4}$ در می‌آید در این تابع اگر x، مثبت باشد y، منفی می شود که با شکل داده شده هم‌خوانی ندارد.

۲۸.گزینه ۱ مشتق دوم باید مثبت باشد.

$$y=x\sqrt{x^2+2}\Rightarrow y'=\sqrt{x^2+2}+\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}x=\sqrt{x^2+2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{4x\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+2}}(2x^2+2)}{x^2+2}=\frac{\frac{4x(x^2+2)-x(2x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

$$=\frac{4x^3+8x-2x^3-2x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x^3+6x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\frac{x\overbrace{(2x^2+6)}^{+}}{\underbrace{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}_{+}}>0\Rightarrow x>0$$

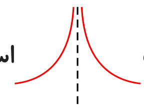
تابع در $(0,+\infty)$ تقعرش رو به بالا است بنابراین کمترین مقدار a برابر صفر است.

۲۹.گزینه ۲ با توجه به شکل، به راحتی نتیجه می گیریم که $x=0$ مجانب قائم منحنی $y=\frac{x+b}{x^2+a}$ است. بنابراین $x=0$ در مخرج صدق می کند.

$$x^2+a=0 \xrightarrow{x=0} 0+a=0\Rightarrow a=0$$

از طرفی از شکل نتیجه می گیریم که طول ماکسیمم نسبی تابع برابر $x=2$ است. بنابراین ریشه‌ی ساده‌ی مشتق این تابع برابر $x=2$ می باشد.پس مشتق تابع در $x=2$ برابر صفر است.

$$y=\frac{x+b}{x^{۲}}\Rightarrow y'=\frac{(۱)x^{۲}-۲x(x+b)}{(x^{۲})^{۲}}\Rightarrow y'(۲)=۰\Rightarrow\frac{۴-۴(۲+b)}{۱۶}=۰\Rightarrow ۴-۸-۴b=۰\Rightarrow b=-۱$$

۳۰.گزینه ۴ از روی شکل متوجه می‌شویم تابع دارای مجانب قائمی با طول مثبت است و چون شکل تابع در اطراف مجانب قائمش به صورت  است مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف است.(با توجه به شکل، این ریشه‌ی مضاعف، مثبت است.)

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\Rightarrow b^{۲}-۴ac=۰\Rightarrow b^{۲}-۱۶=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۴ & \times\\ b=-۴ & \checkmark\end{cases}$

$b=۴$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا مخرج به صورت $x^{۲}+۴x+۴$ یا $(x+۲)^{۲}$ در می‌آید و مجانب قائم $x=-۲$ است که غیر قابل قبول می‌باشد. توجه کنید نمودار تابع ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است یعنی اگر به x صفر دهیم y باید مثبت باشد.

$$x=۰\xrightarrow{\text{تابع}}y=\frac{a}{۴}>۰\Rightarrow a>۰$$

۳۱.گزینه ۱ توجه کنید دامنه تعریف تابع $x\geq ۰$ می‌باشد و چون تقعر تابع رو به پائین است مشتق دوم باید منفی باشد.

$$y=(x+۳)\sqrt{x}\Rightarrow y=x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۳}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۴}(x^{-\frac{۱}{۲}}-x^{-\frac{۳}{۲}})=\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x\sqrt{x}})=\frac{۳}{۴}(\frac{x-۱}{x\sqrt{x}})<۰$$

$$\Rightarrow x-۱<۰\Rightarrow x<۱\xrightarrow[\text{تعریف تابع}]{\text{اشتراک با دامنه}}۰<x<۱\rightarrow x\in(۰,۱)$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر یک می‌باشد.

۳۲.گزینه ۳ چون تابع همواره صعودی است پس باید $f'(x)\geq ۰$ باشد.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲(m+۲)x+۳\geq ۰$$

شرط آنکه یک عبارت درجه‌ی دوم بزرگ‌تر مساوی صفر باشد آن است که $a>۰$ و $\Delta\leq ۰$ باشد

۱) $a>۰\ \rightarrow\ ۳>۰$ برقرار است:

۲) $\Delta\leq ۰\rightarrow b^{۲}-۴ac\leq ۰\rightarrow ۴(m+۲)^{۲}-۳۶\leq ۰\rightarrow ۴(m+۲)^{۲}\leq ۳۶\rightarrow(m+۲)^{۲}\leq ۹$

$\rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳\rightarrow -۵\leq m\leq ۱$

طول نقطه‌ی عطف $=-\frac{b}{۳a}=\frac{m+۲}{۳}\rightarrow -۳\leq m+۲\leq ۳\rightarrow -۱\leq\frac{m+۲}{۳}\leq ۱$

یعنی $x_{\text{عطف}}\in[-۱,۱]$ است.

توجه کنید طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $(y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d)$ از رابطه‌ی $x=-\frac{b}{۳a}$ بدست می‌آید.

۳۳.گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی مجانب افقی را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}+bx+۸}{x^{۲}+۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a\rightarrow y=a$$

مجانب افقی، منحنی را در $x=۰$ قطع کرده است پس $\left|\begin{matrix}۰\\ a\end{matrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\ a\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}\quad a=\frac{۰+۰+۸}{۰+۴}\rightarrow a=۲$$

چون منحنی بر محور طول مماس است پس معادله‌ی تلاقی منحنی با محور $x(y=۰)$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

معادله‌ی تلاقی: $$\begin{cases} y = \dfrac{۲x^{۲} + bx + ۸}{x^{۲} + ۴} \\ y = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \dfrac{۲x^{۲} + bx + ۸}{x^{۲} + ۴} = ۰ \to ۲x^{۲} + bx + ۸ = ۰$$

شرط ریشه‌ی مضاعف: $\Delta = 0 \to b^2 - 64 = 0$

$$\to \begin{cases} b = 8 \to 2x^2 + 8x + 8 = 0 \to x^2 + 4x + 4 = 0 \to (x+2)^2 = 0 \to x = -2 \\ b = -8 \to 2x^2 - 8x + 8 = 0 \to x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x-2)^2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

چون منحنی در $x > 0$ بر محور x مماس است پس فقط $b = -8$ قابل قبول است. بنابراین $a + b = -6$ می‌باشد.

۳۴.گزینه ۱ برای صعودی بودن باید $y' > 0$ و برای تقعر رو به پائین بودن باید $y'' < 0$ باشد.

$$y' = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x = x(x^2 + \frac{3}{2}x - 6) > 0$$

ریشه‌های این معادله درجه دوم، اعشاری و کار با آن‌ها سخت است بنابراین فعلاً مقادیر آن‌ها را حساب نمی کنیم

$$y'' = 3x^2 + 3x - 6 < 0 \to x^2 + x - 2 < 0 \to (x+2)(x-1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < 1$$

باتوجه به بازه $-2 < x < 1$ گزینه سوم حذف می‌شود. توجه کنید $x = -1$ مشتق را مثبت می‌کند. و برای مثال $x = 0/1$ آن را منفی می‌کند پس جواب باید شامل -1 و فاقد $0/1$ باشد بنابراین گزینه‌ی اول صحیح است.

۳۵.گزینه ۴ باتوجه به شکل داده شده محور yها $(x = 0)$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج تابع صدق می‌کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0 + b = 0 \to b = 0 \to y = \frac{x^2 + ax - 2}{x}$$

از روی شکل واضح است که این تابع دارای مجانب مایل است پس برای بدست آوردن معادله‌ی آن ، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^2 + ax - 2 & x \\ \cline{2-2} -x^2 & x + a \\ \hline ax - 2 & \\ -ax & \\ \hline -2 & \end{array} \qquad \to \quad y = x + a \ \text{مجانب مایل}$$

مجانب مایل ، محور عرض را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند یعنی اگر به x صفر دهیم حاصل باید منفی شود.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} 0 + a < 0 \to a < 0$$

۳۶.گزینه ۳ طول نقاط اکسترمم، ریشه‌های ساده‌ی مشتق هستند.

$$y' = 2x^2 - 2(m-1)x + 8$$

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای ۲ ریشه‌ی منفی باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ باشد.

$$1)\Delta > 0 \to b^2 - 4ac > 0 \to 4(m-1)^2 - 64 > 0 \to (m-1)^2 > 16 \to \begin{cases} m-1 > 4 \to m > 5 \\ m-1 < -4 \to m < -3 \end{cases} \quad (I)$$

$$2)\frac{c}{a} > 0 \to \frac{8}{2} > 0 \qquad \text{برقرار است}$$

$$3) -\frac{b}{a} < 0 \to \frac{2(m-1)}{2} < 0 \to m - 1 < 0 \to m < 1 \quad (II)$$

از اشتراک I , II به جواب $m < -3$ می‌رسیم.

$$\text{طول نقطه‌ی عطف} = -\frac{b}{3a} = \frac{m-1}{3(\frac{2}{3})} = \frac{m-1}{2}$$

$$m < -3 \to m - 1 < -4 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} \frac{m-1}{2} < -2$$

یعنی طول نقاط عطف در فاصله‌ی $(-\infty, -2)$ می‌باشند.

توجه کنید طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ از رابطه‌ی $x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a}$ بدست می‌آید.

۳۷.گزینه ۱ **تابع دارای ۲ مجانب قائم است یعنی مخرج دو ریشه دارد که یکی مثبت است و دیگری منفی است و دقیقاً قرینه‌ی هم هستند.**

$b=\circ \leftarrow \circ = \frac{b}{a} - \leftarrow \circ = \frac{-b}{a} \leftarrow \circ =$ جمع ۲ ریشه و $\circ > a \leftarrow \circ > \frac{۱}{a} \leftarrow \circ > \frac{c}{a} \leftarrow \circ >$ ضرب ۲ ریشه

۳۸.گزینه ۳ برای آنکه تابع $y=-۴\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل $\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)$ کمترین مقدار، یعنی مقدار (-۱) را به خود بگیرد. پس داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x)=-۱ \xrightarrow[x=۲k\pi+\pi]{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{۴}-۳\pi x=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{-۲k}{۳}-\frac{۱}{۴}$$

حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله در بازه‌ی $[-۱,۱]$ کافی است به k اعداد صحیح را نسبت دهیم:

k	-۲	-۱	$\circ$	۱	۲
x	$\frac{۱۳}{۱۲}$	$\frac{۵}{۱۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	$-\frac{۱۹}{۱۲}$
	غ ق ق	✓	✓	✓	غ ق ق

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[-۱,۱]$، دارای ۳ جواب است.

۳۹.گزینه ۲

از روی شکل واضح است که طول نقطه‌ی عطف تابع برابر صفر است.

$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a} \rightarrow -\frac{a}{-۳}=\circ \rightarrow a=\circ$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=-x^۳+bx$ درمی‌آید. شیب خط مماس بر منحنی در $x=\circ$، منفی است پس داریم:

$$f'(x)=-۳x^۲+b \xrightarrow{f'(\circ)<\circ} \circ+b<\circ \rightarrow b<\circ$$

گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

۴۰.گزینه ۴

$$y=\frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲}=\frac{۲x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)}=\frac{۲x}{x+۲} \quad , \quad x\neq ۱$$

مجانب افقی $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=۲ \rightarrow y=۲$ و مجانب قائم $x=-۲ \leftarrow \circ = x+۲ \leftarrow \circ =$ مخرج

$$\begin{vmatrix} -۲ \\ ۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{y=x+a} ۲=-۲+a \rightarrow a=۴$$

۴۱.گزینه ۲

یعنی خط به معادله‌ی $y=\frac{۳}{۲}$ جواب حد تابع در بی‌نهایت است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{Ax^۳}{(A-۱)x^۳}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{A}{A-۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow A=۳$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۳x^۳+۱}{۲x^۳+۱۶} \xrightarrow{\text{مخرج}=\circ} ۲x^۳+۱۶=\circ \Rightarrow x=-۲$$

۴۲.گزینه ۴

ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس از هم‌ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$
\begin{array}{l|l}
x^{۳}+x^{۲} & \underline{x-۲} \\
\underline{-x^{۳}+۲x^{۲}} & x^{۲}+۳x+۶ \\
۳x^{۲} & \\
\underline{-۳x^{۲}+۶x} & \\
۶x & \\
\underline{-۶x+۱۲} & \\
۱۲ &
\end{array}
$$

$$
y=\sqrt{x^{۲}+۳x+۶+\underbrace{\frac{۱۲}{x-۲}}_{\text{صفر (در بی‌نهایت)}}}\rightarrow \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^{۲}+۳x-۶}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{۱}\,\underbrace{\left|x+\frac{۳}{۱\times ۲}\right|}_{-}
$$

$$
\rightarrow y=-x-\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲y=-۲x-۳\rightarrow ۲y+۲x+۳=۰ \quad : \text{مجانب مایل}
$$

۴۳.گزینه ۱ اولاً: باید a مثبت باشد، زیرا اگر $a<۰$ باشد دامنه‌ی f محدود خواهد بود و نمی‌تواند $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ و در نتیجه f مجانب افقی نخواهد داشت. در ضمن اگر $a=۰$ باشد، آن‌گاه f در بی‌نهایت نمی‌تواند حد متناهی (مثلاً $\frac{۳}{۲}$) داشته باشد. پس a حتماً مثبت است.

ثانیاً: تابع f فقط در $x\to-\infty$ می‌تواند مجانب افقی داشته باشد، زیرا در $x\to+\infty$، حد تابع f نامتناهی $(+\infty)$ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(۲x-۱+\sqrt{ax^۲+bx})=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(۲x-۱+\sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|)=\lim_{x\to-\infty}(۲x-۱-\sqrt{a}x-\frac{b\sqrt{a}}{۲a})=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}((۲-\sqrt{a})x+(-۱-\frac{b}{۲\sqrt{a}}))=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲-\sqrt{a}=۰\Rightarrow a=۴\\ -۱-\frac{b}{۲\sqrt{a}}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a=۴}\frac{-b}{۴}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow b=-۱۰\end{cases}$$

۴۴.گزینه ۳ روش اول: ابتدا مجانب افقی تابع را به دست آورده و سپس معادله‌ی تقاطع منحنی و مجانب افقی را حل می‌کنیم تا طول نقطه‌ی تقاطع به دست آید. داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲-۳x}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}\overset{\text{بزرگ‌ترین توان}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲\to y=۲$$

بنابراین $y=۲$ مجانب افقی تابع است. حال به حل معادله‌ی تقاطع منحنی و مجانب افقی می‌پردازیم:

$$\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}=۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x=۲x^۲-۴x+۲\Rightarrow x=۲\to A\Big|^{۲}_{۲}$$ نقطه‌ی تلاقی تابع و مجانب افقی

خط $x=۱$ به عنوان مجانب قائم است، زیرا: $x=۱\leftarrow(x-۱)^۲=۰\leftarrow$ مخرج $=۰$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی A به طول ۲ از خط $x=۱$ برابر است با: $d=|۲-۱|=۱$

روش دوم: در توابع کسری برای یافتن محل تلاقی نمودار تابع با مجانب افقی یا مایل، می‌توان صورت را بر مخرج تقسیم کرد و باقی مانده را به دست آورد. با مساوی صفر قرار دادن عبارت باقی مانده، طول نقطه‌ی تلاقی (در صورت وجود) به دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲-۳x & x^۲-۲x+۱ \\ \cline{2-2} & \qquad ۲ \\ \underline{-۲x^۲+۴x-۲} & \\ \qquad x-۲ & \end{array}$$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$ طول نقطه ی تلاقی $۲ \rightarrow A\begin{vmatrix}۲\\۲\end{vmatrix}$

بقیه‌ی حل عین روش اول است.

۴۵.گزینه ۱ تابع f مجانب قائم ندارد بنابراین مجانب‌های افقی و مایل را در صورت وجود به دست می‌آوریم و برای این کار حد تابع را وقتی $x\rightarrow\infty$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور از هم‌ارزی واندروالسی کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt[۳]{-x^۳+x^۲})=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt[۳]{-۱}(x+\frac{۱}{-۱\times۳}))=\lim_{x\to\pm\infty}(x-(x-\frac{۱}{۳}))=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین تابع مجانب افقی $y=\frac{۱}{۳}$ دارد و مجانب مایل ندارد و برای محاسبه محل برخورد منحنی و خط $y=\frac{۱}{۳}$ باید گزینه ها را در معادله $x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}$ امتحان کنیم آنگاه $x=\frac{۱}{۹}$ بدست می‌آید.

۴۶.گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲}=\frac{x^۲+۱۲-۳}{x^۲+۱۲}=۱-\frac{۳}{x^۲+۱۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۶x}{(x^۲+۱۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۶(x^۲+۱۲)^۲-۲(x^۲+۱۲)(۲x)(۶x)}{(x^۲+۱۲)^۴}=\frac{۶(x^۲+۱۲)^۲-۲۴x^۲(x^۲+۱۲)}{(x^۲+۱۲)^۴}$$

$$=\frac{\overbrace{(x^۲+۱۲)}^{\text{فاکتور}}(۶(x^۲+۱۲)-۲۴x^۲)}{(x^۲+۱۲)^۴}=\frac{۷۲-۱۸x^۲}{(x^۲+۱۲)^۳}=\frac{۱۸(۴-x^۲)}{(x^۲+۱۲)^۳}\xrightarrow{f''(x)>۰}۴-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۴$$

$$\Rightarrow -۲<x<۲\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\b=۲\end{cases}\Rightarrow b-a=۲-(-۲)=۴$$

۴۷.گزینه ۲ برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته باید عرض‌های نقاط بحرانی را محاسبه نموده و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه نمود.

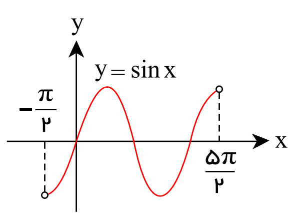
نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ می‌یابیم. لذا داریم:

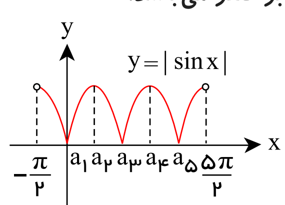
$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)}\\x=۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(۲)=k-۴\rightarrow Min\\f(۱)=k-۲\\f(۳)=k\rightarrow Max\end{cases}\Rightarrow f(۲)+f(۳)=k+k-۴=۲k-۴=۰\Rightarrow k=۲$$

۴۸.گزینه ۴ راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط $a_۵,a_۴,a_۳,a_۲,a_۱$ نقاط بحرانی می‌باشند.

در نقاط $a_۵,a_۳,a_۱$ مشتق ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط $a_۴,a_۲$ برابر صفر می‌باشد.





راه دوم: در توابع به شکل $y=|u|$، طول نقاط بحرانی تابع را می‌توان از حل معادلات $u=۰$ و $u'=۰$ بدست آورد.

$$\left.\begin{array}{l}\sin x=۰\rightarrow x=۰,\pi,۲\pi\\(\sin x)'=۰\rightarrow\cos x=۰\rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۳\pi}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ ۵ نقطه‌ی بحرانی دارد.

۴۹.گزینه ۳

$$y=ax+b+\frac{x^2}{2x-1}\to y=\frac{2ax^2+2bx-ax-b+x^2}{2x-1}y=ax+b+\frac{x^2}{2x-1}$$

در تابع هموگرافیک جمله‌ی x^2 وجود ندارد بنابراین: $2a+1=0\to a=-\frac{1}{2}$

$$y=\frac{(2b+\frac{1}{2})x-b}{2x-1}\ \Big|\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\ \xrightarrow[\text{صدق}]{}1=\frac{-b}{-1}\to b=1\to a+b=\frac{1}{2}$$

۵۰.گزینه ۱

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}\to f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}\to f''(x)=\frac{4}{9}x^{\frac{-2}{3}}+\frac{8}{9}x^{\frac{-5}{3}}$$

$$=\frac{4}{9}(x^{-\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{5}{3}})=\frac{4}{9}(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}})=\frac{4}{9}(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}})$$

$=\frac{4}{9}(\frac{x+2}{x\sqrt[3]{x^2}})=0\to x=-2$ و $x=0$ در مشتق دوم وجود ندارد

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	− ‖	+

در نتیجه تابع در بازه $(-2,0)$ تقعر رو به پایین دارد لذا $a=-2$ و $b=0$ در نتیجه $b-a=2$ است.

۵۱.گزینه ۲ تابع بر محور x مماس است پس معادله‌ی تلاقی آن با خط $y=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax^2+4x-4}{x^2+b} \\ y=0 \end{cases}\xrightarrow[\text{معادله‌ی تلاقی}]{\text{تلاقی}}ax^2+4x-4=0\xrightarrow{\Delta=0}16+16a=0\Rightarrow 16+16a=0\Rightarrow a=-1$$

معادله‌ی مجانب افقی $y=a$ است $(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a)$ پس $y=-1$ مجانب افقی است. نقطه‌ای که تابع، محور عرض را قطع می کند زیر مجانب مایل است یعنی اگر در تابع به x، صفر دهیم حاصل، کمتر از -1 است.

$x=0\Rightarrow\frac{-4}{b}<-1\Rightarrow\frac{4}{b}>1$ گزینه‌ی‌دوم دراین شرط صدق می‌کند.

۵۲.گزینه ۱

$$f(x)=x^4-6x^2+8x\Rightarrow f'(x)=4x^3-12x+8=0\to x^3-3x+2=0$$

برای حل این معادله درجه سوم دقت کنید که چون مجموع ضرایب آن صفر است یک ریشه معادله $x=1$ می‌باشد و معادله بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$(x-1)(x^2+x-2)=0\Rightarrow(x-1)(x+2)(x-1)=0\to(x-1)^2(x+2)=0\to x=1\ ,\ x=-2$$

با استفاده از آزمون مشتق اول، داریم:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	+	
y		↘	Min	↗		↗	

$\to$ تابع یک Min نسبی دارد.

۵۳.گزینه ۱ با توجه به شکل وقتی $x\to\pm\infty$، داریم $f(x)\to-\infty$. بنابراین یکی از گزینه‌های (1) یا (3) صحیح است. از طرفی تابع گزینه‌ی (3) یعنی $y=x(1-x^3)=x-x^4$ فاقد نقطه‌ی عطف است زیرا $y''=-12x^2\leq 0$ و در نتیجه تقعر این تابع همواره رو به پایین بوده و فاقد نقطه‌ی عطف است. پس گزینه‌ی (3) نمی‌تواند پاسخ باشد و گزینه‌ی (1) جواب صحیح است.

۵۴.گزینه ۲ دامنه تعریف تابع $R-\{0\}$ است. برای نزولی بودن، باید $y'<0$ باشد و برای تقعر رو به پایین بودن باید $y''<0$ باشد.

$x > ۰ \to y = xLnx \to y' = Lnx + ۱ = ۰$

$\to Lnx = -۱ \to x = \frac{۱}{e} \to$

			عدد کمکی	
x	۰	$\frac{۱}{e}$	۱	$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$	
	نزولی			

$x < ۰ \to y = xLn(-x) \to y' = Ln)(-x) + ۱ = ۰$

$\to Ln(-x) = -۱ \to x = -\frac{۱}{e} \to$

		عدد کمکی		
x	$-\infty$	-۱	$-\frac{۱}{e}$	۰
y'	$+$		۰	$-$
				نزولی

$\Longrightarrow (I)$ تابع در بازه‌ی $(-\frac{۱}{e}, \frac{۱}{e})$ نزولی است

$x > ۰ \to y'' = \frac{۱}{x} < ۰ \to x < ۰$ غ ق ق

$x < ۰ \to y'' = \frac{۱}{x} < ۰ \to x < ۰$ ق ق (II)

از اشتراک I و II به جواب $(-\frac{۱}{e}, ۰)$ می‌رسیم.

۵۵.گزینه ۲ ابتدا محل تلاقی نمودار تابع $y = \frac{x+۱}{۱-۲x}$ را با محورهای مختصات به دست می آوریم: یعنی برای محاسبه‌ی محل برخورد با محور x ها بجای y صفر و برای محاسبه‌ی محل برخورد با محور yها بجای x صفر قرار می‌دهیم. $A(-۱, ۰), B(۰, ۱)$ اکنون معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم.

$$AB: \frac{y - yA}{x - xA} = \frac{yA - yB}{xA - xB} \to \frac{y}{x+۱} = \frac{۰-۱}{-۱-۰} = ۱ \to y = x + ۱ \to x - y + ۱ = ۰$$

باتوجه به این‌که مرکز تقارن تابع هموگرافیک به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است ، مرکز تقارن منحنی به‌معادله‌ی $y = \frac{x+۱}{-۲x+۱}$ ، نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ است.

می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با: $D = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

بنابراین فاصله‌ی نقطه $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ از خط $x - y + ۱ = ۰$ برابر است با:

$$D = \frac{\left|\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱\right|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

۵۶.گزینه ۱ با توجه به شکل، نمودار تابع f بر محور xها در نقطه‌ی $x = ۰$ مماس است، بنابراین معادله‌ی تلاقی آن با محور xها $(y = ۰)$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+ax}{2x+b} \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2+ax=0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Rightarrow a^2-0=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2x+b}$$

مجانب مایل تابع از نقطه $\left|\begin{matrix}0\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ می‌گذرد. برای پیدا کردن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس نقطه را در معادله‌ی مجانب مایل صدق می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2x+b \\ \cline{2-2} & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}b \\ -x^2-\frac{1}{2}bx & \\ \hline -\frac{1}{2}bx & \\ \frac{1}{2}bx+\frac{1}{4}b^2 & \\ \hline \frac{1}{4}b^2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y=\frac{1}{2}x-\frac{14}{b}}_{\text{مجانب مایل}} \xrightarrow[\text{صدق}]{\left|\begin{matrix}0\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.} \frac{1}{2}=0-\frac{1}{4}b \Rightarrow b=-2$$

۵۷.گزینه ۲

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x \to f'(x)=x^2-2x-15=(x-5)(x+3)=0$$

$$\to \begin{cases} x=5 \to \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)} \\ x=-3 \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=\frac{68}{3}\sim 22/6$$
$$f(3)=9-9-45=-45 \to \text{مطلق } Min$$
$$f(-3)=-9-9+45=27 \to \text{مطلق } Max$$

۵۸.گزینه ۳

در $x=0$، مماس افقی است پس $f'(0)=0$ است.

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+b \xrightarrow{f'(0)=0} 0=0+0+b \to b=0$$

بنابراین، تابع به صورت $f(x)=x^4+ax^3$ در می‌آید.

$$\left|\begin{matrix}-4\\ 0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 0=256-64a \to 64a=256 \to a=4$$

$$f(x)=x^4+4x^3 \to f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)=0$$

$$\to \begin{cases} x=0 \text{ :ریشه‌ی مضاعف است و طول اکسترمم نسبی نمی‌باشد} \\ x=-3 \xrightarrow{\text{تابع}} y=81-108=-27 \end{cases}$$

۵۹.گزینه ۱ **$x=0$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می‌کند.**

$$x=0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0+b=0 \to b=0$$

چون تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\ 0\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left| \begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۰ = \frac{۲a+۲}{۴+b} \to ۲a+۲ = ۰ \to a = -۱$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = \dfrac{-x+۲}{x^{۲}}$ است.

$$f'_{(x)}=\frac{-1(x^2)-2x(-x+2)}{x^4}=\frac{-x^2+2x^2-4x}{x^4}=\frac{x^2-4x}{x^4}=\frac{x(x-4)}{x^4}=\frac{x-4}{x^3}=0$$

$$\rightarrow x=4\xrightarrow{\text{تابع}}y=\frac{-4+2}{16}=-\frac{1}{8}$$

توجه کنید که در $x=0$، مشتق وجود ندارد ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نمی‌تواند طول اکسترمم نسبی تابع باشد.

۶۰.گزینه ۲ **طول نقطه‌ی عطف در تابع درجه‌ی سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$ از رابطه‌ی $x=\frac{-b}{3a}$ بدست می‌آید.**

$$1)x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=\frac{3}{3}=1\xrightarrow{\text{تابع}}y=1-3+4=2\rightarrow A\Big|{}^{1}_{2}$$

$$2)y=x^3-3x^2+4\rightarrow y'=3x^2-6x\xrightarrow{x=1}m_{\text{مماس}}=3-6=-3$$

$$3)y-2=-3(x-1)\xrightarrow{y=0}-2=-3x+3\rightarrow 3x=5\rightarrow x=\frac{5}{3}$$

۶۱.گزینه ۲ **باید بازه ای را پیدا کنیم که در آن بازه ، $y''<0$ است.**

$$f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}\rightarrow f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}}\rightarrow f''(x)=\frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}}+\frac{48}{25}x^{-\frac{9}{5}}$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{6}{25}(x^{-\frac{4}{5}}+8x^{-\frac{9}{5}})\rightarrow f''(x)=\frac{6}{25}(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}+\frac{8}{\sqrt[5]{x^9}})$$

$$=\frac{6}{25}(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}+\frac{8}{x\sqrt[5]{x^4}})=\frac{6}{25}(\frac{x+8}{x\sqrt[5]{x^4}})$$

x	$-\infty$	-8	0	$+\infty$
y''	+	0	− ‖	+
y	$\cup$		$\cap$	$\cup$

در $x=-8$ مشتق دوم برابر صفر است . دره $x=0$ مشتق دوم وجود ندارد.

در بازه‌ی $(-8,0)$ تقعر رو به پایین است.

۶۲.گزینه ۴

$$y=x^4-6x^2+5\rightarrow y'=4x^3-12x=4x(x^2-3)=0\rightarrow x=0, x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	5 max	$\searrow$		$\nearrow$	

$\rightarrow\Big|{}^{0}_{5}$: **نقطه‌ی ماکسیمم نسبی**

$$y''=12x^2-12=0\rightarrow\begin{cases}x=1\xrightarrow{\text{تابع}}y=0\rightarrow B\Big|{}^{1}_{0} & \text{: نقطه‌ی عطف}\\ x=-1\xrightarrow{\text{تابع}}y=0\rightarrow C\Big|{}^{-1}_{0} & \text{: نقطه‌ی عطف}\end{cases}$$

$$AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}\quad,\quad AC=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$

۶۳.گزینه ۴

مجانب قائم : $x=-1 \leftarrow x+1=0 \leftarrow 0=$ مخرج

برای پیدا کردن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^{2} & x+1 \\ \cline{2-2} & x-1 \\ -x^{2}-x & \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

مجانب مایل: $\rightarrow y=x-1$

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x=-1 \;,\; y=-2 \rightarrow A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right. ,\; O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \rightarrow AO=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۶۴.گزینه ۲ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x)=(x^{3}-3x^{2}+4)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^{3}-3x^{2}+4} \rightarrow f'(x)=\frac{3x^{2}-6x}{3\sqrt[3]{(x^{3}-2x^{2}+4)^{2}}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{صورت}=0 \rightarrow 3x(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ق ق} \\ x=2 \;\text{(در بازه قرار ندارد)} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ \text{مخرج}=0 \rightarrow x^{3}-3x^{2}+4=0 \rightarrow (x+1)(x-2)^{2}=0 \\ \rightarrow \begin{cases} x=-1 \;\text{(در بازه قرار ندارد)} & \text{غ ق ق} \\ x=2 \;\text{(در بازه قرار ندارد)} & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف $x=0$ (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق) تعیین علامت کنیم.

x	-1	0	2
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\rightarrow$ $x=0$ طول نقطه‌ی Max است

برای تجزیه‌ی عبارت درجه‌ی سوم $x^{3}-3x^{2}+4$ توجه کنید که چون $x=2$ عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر $x-2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت درجه‌ی سوم بر $x-2$ چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

۶۵.گزینه ۳ برای مشخص کردن مجانب‌های منحنی، کافی است حد تابع را در بی‌نهایت حساب کنیم در ضمن توجه کنید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^{2}+bx+c}\sim\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{2a}|$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y \overset{x\leq 0}{=\!=} \lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^{2}-2x})=\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{1}\,|\overbrace{x-\frac{2}{1\times 2}}^{-}|)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x-(-x+1)) \rightarrow y=2x-1$$: مجانب مایل

اکنون فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,0)$ را از خط به معادله‌ی $2x-y-1=0$ به‌دست می‌آوریم.

$$AH=\frac{|2(-2)-0-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ از رابطه‌ی $AH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$ به‌دست می‌آید.

۶۶.گزینه ۱ توجه کنید دامنه‌ی تعریف این تابع $Df = [\circ, +\infty)$ است و تقعر منحنی در بازه‌ای رو به پایین است که در آن علامت مشتق دوم (y'') منفی باشد.

$$y=x^2+\sqrt{x}\to y=x^2+x^{\frac{1}{2}}\to y'=2x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\to y''=2-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\to y''=2-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\sqrt{x^3}-1}{4\sqrt{x^3}}\to\begin{cases}\text{صورت}=0\to 8\sqrt{x^3}=1\to\sqrt{x^3}=\frac{1}{8}\to x^3=\frac{1}{64}\to x=\frac{1}{4}\\ \text{مخرج}=0\to x=0\end{cases}$$

x		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
y''	//////	‖	$-$	0	$+$	
y	//////		$\cap$		$\cup$	

$\to\ 0<x<\frac{1}{4}\to x\in(0,\frac{1}{4})$

۶۷. **گزینه ۴** مختصات نقطه‌ی عطف در تابع صدق می‌کند و طولش، y'' را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-2=a+b-3-1\to a+b=2$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{طولش، }y''\text{ را صفر می‌کند.}}y'=3ax^2+2bx-3\to y''=6ax+2b\to 6a+2b=0$$

$$-2\begin{cases}a+b=2\\6a+2b=0\end{cases}\to 4a=-4\to a=-1\ ,\ \ b=3$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=-x^3+3x^2-3x-1$ است.

$y'=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2\le 0\to$ تابع فاقد اکسترمم است.

۶۸. **گزینه ۲** مجانب مایل توابع به فرم $y=mx\cdot\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ به صورت $y=mx+\frac{a-b}{2}m$ است.

$$y=x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}=x\sqrt{\frac{4(x-\frac{3}{4})}{x-1}}\to y=2x\cdot\sqrt{\frac{x-\frac{3}{4}}{x-1}}$$

معادله‌ی مجانب مایل : $y=2x+\dfrac{-\frac{3}{4}-(-1)}{2}(2)\to y=2x+\frac{1}{4}\xrightarrow{x=0}y=\frac{1}{4}$

۶۹. **گزینه ۲** باید فواصلی را بیابیم که در آن فواصل $y'<0$ و $y''<0$ است.

$$y=\cos^2 x-2\cos x\to y'=-2\sin x\cos x+2\sin x=2\sin x(-\cos x+1)=0$$

$$\to\begin{cases}2\sin x=0\to\sin x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi\to x=0,\pi,2\pi\\ -\cos x+1=0\to\cos x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi\to x=0,2\pi\end{cases}$$

x	0		π		2π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y		$\nearrow$		$\searrow$	

$\to$ تابع در بازه‌ی $(\pi\ ,\ 2\pi)$ نزولی است

$$y'=2\sin x(-\cos x+1)\to y''=2\cos x(-\cos x+1)+\sin x(2\sin x)$$

$$\to y''=-2\cos^2 x+2\cos x+2\sin^2 x=-2\cos^2 x+2\cos x+2(1-\cos^2 x)$$

$$\to y''=-4\cos^2 x+2\cos x+2=0\xrightarrow{\cos x=A}-4A^2+2A+2=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} A=1\rightarrow\cos x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi\rightarrow x=0,2\pi \\ A=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}\xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha}x=2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$\rightarrow$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y''	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

$\rightarrow$ در بازه‌ی $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ تقعر تابع رو به پایین است

از اشتراک دو جواب بدست آمده به جواب $x\in(\pi, \frac{4\pi}{3})$ می‌رسیم.

۷۰. گزینه ۱ باید فواصلی را بیابیم که در آن فواصل $y'>0$ و $y''<0$ است.

$$y=\sin^2 x-2\sin x\rightarrow y'=2\sin x\,\cos x-2\cos x=2\cos x(\sin x-1)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cos x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2} \\ \sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\rightarrow$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\rightarrow$ تابع در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ صعودی است

$$y'=2\cos x(\sin x-1)\rightarrow y''=-2\sin x(\sin x-1)+\cos x(2\cos x)$$

$$\rightarrow y''=-2\sin^2 x+2\sin x+2\cos^2 x=-2\sin^2 x+2\sin x+2(1-\sin^2 x)$$

$$\rightarrow y''=-4\sin^2 x+2\sin x+2\xrightarrow{\sin x=A}=-4A^2+2A+2=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}A=1\rightarrow\sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \\ A=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\sin x=-\dfrac{1}{2}=\sin(-\dfrac{\pi}{6})\rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x=2k\pi+\alpha}x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\rightarrow x=\dfrac{11\pi}{6} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha}x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}\rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

$\rightarrow$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y''		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$\rightarrow$ در بازه‌ی $(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ تقعر تابع رو به پایین است

از اشتراک دو جواب بدست آمده به جواب $x\in(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ می‌رسیم.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۳۷۱۸۳۷

۱- ۳	۲- ۱	۳- ۱	۴- ۳	۵- ۳
۶- ۴	۷- ۲	۸- ۴	۹- ۴	۱۰- ۲
۱۱- ۱	۱۲- ۴	۱۳- ۱	۱۴- ۳	۱۵- ۴
۱۶- ۴	۱۷- ۲	۱۸- ۲	۱۹- ۱	۲۰- ۳
۲۱- ۱	۲۲- ۲	۲۳- ۴	۲۴- ۲	۲۵- ۱
۲۶- ۲	۲۷- ۴	۲۸- ۱	۲۹- ۲	۳۰- ۴
۳۱- ۱	۳۲- ۳	۳۳- ۲	۳۴- ۱	۳۵- ۴
۳۶- ۳	۳۷- ۱	۳۸- ۳	۳۹- ۲	۴۰- ۴
۴۱- ۲	۴۲- ۴	۴۳- ۱	۴۴- ۳	۴۵- ۱
۴۶- ۲	۴۷- ۲	۴۸- ۴	۴۹- ۳	۵۰- ۱
۵۱- ۲	۵۲- ۱	۵۳- ۱	۵۴- ۲	۵۵- ۲
۵۶- ۱	۵۷- ۲	۵۸- ۳	۵۹- ۱	۶۰- ۲
۶۱- ۲	۶۲- ۴	۶۳- ۴	۶۴- ۲	۶۵- ۳
۶۶- ۱	۶۷- ۴	۶۸- ۲	۶۹- ۲	۷۰- ۱