

سرمال ۱۳۱۵۶۲	تاریخ :	وقت : دقیقه	نام و نام خانوادگی :
	روزبه خاکسار	تعداد سوالات: ۴۷	

موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه « حد و پیوستگی توابع

۱. در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۰

-سراسری-۱۳۸۷-آسان

۲. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۴. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و -۱ چگونه است؟

(۱) در ۱- ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته
(۲) در ۱- ناپیوسته - در ۱ پیوسته
(۳) در ۱- پیوسته - در ۱ پیوسته
(۴) در ۱- پیوسته - در ۱ ناپیوسته

-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۵. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

(۱) هر مقدار a (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۶. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x - 8} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

صفحه ۲

$$8. \text{ تابع با ضابطه‌ی } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x + |x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \text{ از نظر پیوستگی در } x = 0 \text{ چگونه است؟}$$

- (۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته
(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
(۴) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

$$9. \text{ در بازه‌ی } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] - \{1\} \text{ همواره } \frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x), \frac{\sin \pi x}{1-x} = o, \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = 0, \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ برابر}$$

کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) 0 (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

$$10. \text{ تابع با ضابطه‌ی } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), & x \leq 0 \end{cases}, \text{ به ازای کدام مقدار } a, \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته است؟}$$

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) هیچ مقدار a (۴) هر مقدار a

-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

$$11. \text{ حد کسر } \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} \text{ با شرط } n > 3, \text{ وقتی } x \rightarrow \infty \text{ برابر } 2 - \text{ است } m + n \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) ۵

-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

$$12. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) ۱ (۴) $+\infty$

-سراسری-۱۳۸۲-متوسط

$$13. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

-سراسری-۱۳۸۱-آسان

$$14. \text{ تابع با ضابطه‌ی } f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \text{ با تعریف } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ از نظر پیوستگی در نقطه‌ی } x = \frac{\pi}{2} \text{ چگونه است؟}$$

- (۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
(۳) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

-سراسری-۱۳۸۱-آسان

$$15. \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

صفحه ۳

۱۶. حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $-\infty$

-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۱۷. قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

-سراسری-۱۳۷۷-متوسط

۱۸. حد چپ تابع $f(x) = \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟ $([\cdot], \lceil \cdot \rceil)$ نماد جزء صحیح است)

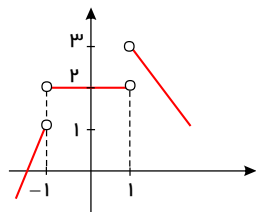
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ∞

-سراسری-۱۳۷۰-متوسط

۱۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{|x^2 - 4|}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $-\frac{\pi}{8}$ (۳) π (۴) $-\pi$

-سراسری-۱۳۸۳-متوسط



-سراسری-۱۳۷۶-آسان

۲۰. با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۱. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

- (۱) $f(0)$ (۲) $f(2)$ (۳) $f(1)$ (۴) $f(3)$

-سراسری-۱۳۶۳-آسان

۲۲. اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = -1$ (۳) $a = 5$ (۴) $a = -5$

-سراسری-۱۳۷۸-متوسط

۲۳. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)[x] & x < 3 \\ ax+3 & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه ای به طول $x = 3$ پیوسته باشد آنگاه a کدام است؟

- (۱) $a = 12$ (۲) $a = -3$ (۳) $a = 4$ (۴) $a = 3$

-سراسری-۱۳۶۸-متوسط

۲۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x + 8}}{x + 2}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{-5}{2}$

-سراسری-۱۳۷۹-آسان

صفحه ۴

۲۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) 0^+ (۲) -1 (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

-سراسری-۱۳۸۰-آسان

۲۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) 2 (۳) 4 (۴) 0^+

-سراسری-۱۳۶۶-آسان

۲۷. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 5

-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۲۸. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ای به طول $x = 2$ پیوسته است؟

- (۱) 4 (۲) $4, 5$ (۳) 5 (۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۹۲-آسان

۲۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۳۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) 2

-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۳۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -4 (۳) 3 (۴) 5

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۳۲. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

صفحه ۵

۳۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۳۴. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۳۵. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

(۱) هر مقدار حقیقی a (۲) هیچ مقدار a (۳) فقط $a = -2$ (۴) فقط $a = 2$

-سراسری-۱۳۹۱-آسان

۳۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

-سراسری-۱۳۸۸-سخت

۳۷. اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

-سراسری-۱۳۸۶-آسان

۳۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

۳۹. حد عبارت $\left(\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x} \right)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۴۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \left| \frac{x}{x+1} \right| \right)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $-\infty$

-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۴۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۴۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

-سراسری-۱۳۸۲-متوسط

۴۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۴۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) e (۳) $\frac{1}{e} + 1$ (۴) $e + 1$

-سراسری-۱۳۸۰-متوسط

۴۵. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

-سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۴۶. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۴۷. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \geq 1 \\ ax + 5x - a & x < 1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، در بازه‌ی $[-2, 2]$ پیوسته است؟

- (۱) \emptyset (۲) R (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-2, 2\}$

-سراسری-۱۳۸۴-آسان

سوال ۱۲۱۵۶۲	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> <p>تاریخ :</p> <p>نام و نام خانوادگی :</p> </div> <div> <p>وقت : دقیقه</p> <p>تعداد سوالات: ۴۷</p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> <p>روزبه خاکسار</p> <p>موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه « حد و پیوستگی توابع »</p> </div>
-------------	--

۱. گزینه

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

۲. گزینه

باید حد تابع و مقدار تابع در $x = 2$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$f(2) = a = \frac{-1}{2} \text{ بنابراین}$$

۳. گزینه

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{-2 \sin 2x} = \frac{2(-1)(1+1)}{-2(-1)} = -2$$

توجه کنید $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ می باشد.

۴. گزینه ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x = 1$ و $x = -1$ بدست آوریم.

$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2(1) = 2 \\ f(1) = 2(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = 2(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -1-1 = -2 \\ f(-1) = 2(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

۵. گزینه

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 1$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{[(x+2)(x-1)]}^+}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{[(x+2)(x-1)]}^-}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در $x = 1$ پیوسته نمی باشد.

صفحه ۷

۶. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}}{-2} = \frac{-4}{-2} = \frac{1}{3}$$

۷. گزینه ۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{4(x+2)} \right) = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

۸. گزینه ۲

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u \quad \text{می دانیم:}$$

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 0$ به دست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ از راست ناپیوسته و از چپ پیوسته است.}$$

۹. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \pi$$

طبق قضیه ی فشردگی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$ می باشد.

۱۰. گزینه ۲

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u, \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2} \quad \text{می دانیم:}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 0$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \\ f(0) &= a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

۱۱. گزینه ۲ در حدهای کسری وقتی x به سمت بی نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون $n > 3$ است در نتیجه $n - 2 > 1$ و جمله ی پرتوان مخرج حتماً mx^{n-2} است.

$$m + 3 = n - 2 \Rightarrow m - n = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}, \quad n = \frac{9}{2} \Rightarrow m + n = 4$$

۱۲. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{-(1 + 1)}{1 + 1} = -1$$

توجه کنید که $\tan \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = -1$ است.

۱۳. گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{-2}{6}}{\frac{-1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۱۴. گزینه ۴

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = \frac{\pi}{2}$ بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (-\cos 2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\sin x + 2 \cos x) = 1 \\ f(\frac{\pi}{2}) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x = \frac{\pi}{2} \text{ پیوسته است.}$$

۱۵. گزینه ۳

توجه کنید داخل قدر مطلق، مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x} = \frac{\pi}{2}$$

۱۶. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

دقت کنید $(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه دوم است و در ناحیه دوم، تانژانت منفی است.

۱۷. گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{\underbrace{|x-1|}_{+}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-1}{1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{\underbrace{|x-1|}_{-}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-1}{-1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

۱۸. گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [3^-])\sqrt{(x-3)^2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\overbrace{|x-3|}^{1}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

۱۹.گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\underbrace{x^2 - 4}_{-}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{-x^2 + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{\pi}{2}(1 + \tan^2 \frac{\pi}{2} x)}{-2x} = \frac{\frac{\pi}{2}(1 + 0)}{-4} = -\frac{\pi}{8}$$

۲۰.گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۲۱.گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۲۲.گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a}{\frac{1(\Delta)}{2\sqrt{5x + 16}}} = \frac{a}{-\frac{5}{2}} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

۲۳.گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 3$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (ax + 3) = 3a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3)[x] = 6(2) = 12 \\ f(3) &= 3a + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a + 3 = 12 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

۲۴.گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x + 8}}{x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x + 8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۲۵.گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

$(\frac{\pi}{4})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۲۶.گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x + 2}}{x + 2} = \frac{-2 + 0}{\underbrace{(-2)^+ + 2}_{-1/9}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۲۷.گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

۲۸. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4 \quad \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - 1 = 5$$

حدود چپ و راست در $x = 2$ برابر نیستند، بنابراین هرگز تابع در این نقطه پیوسته نبوده و مقداری برای a وجود ندارد.

۲۹. گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(2x+1)(x+2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3(x-2) - 4(2x+1)}{(2x+1)(x+2)(x-2)} \right) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\cancel{3x-6} - \cancel{8x-4}^{-5x-10}}{(2x+1)(x+2)(x-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-5(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x-2)} \right) = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{-5}{12}$$

توجه کنید عبارت $2x^2 + 5x + 2$ به ازای $x = -2$ صفر می‌شود پس برای تجزیه‌ی آن، عبارت را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم.

۳۰. گزینه ۱ باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} a \cos 3x = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{-2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{-2 \sin 2x} = \frac{-2(1)(2)}{-2(1)} = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\text{پس: } -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow -a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

۳۱. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - \underbrace{2|x|}_{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n = 1$. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \rightarrow a = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

۳۲. گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$ باید با هم برابر باشند.

صفحه ۱۱

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} (a + \cos^2 \frac{\pi x}{36}) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۴

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \sin 2x}{2x} = \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 4 \cos 2x}{2} &= \frac{-1 + 4(1)}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow 0} \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}} \quad \text{روش دوم: می دانیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{4x^2}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه $(2, 1)$ می گذرد، مختصات آن در ضابطه تابع f صدق می کند، پس داریم:

$$1 = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + \sqrt{25}}{3(2) - 2} = 1 \Rightarrow \frac{2a + 6}{4} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه ای f روی R (مجموعه ای اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه ی مرزی آن، یعنی $x = 2$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax - 5) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a ، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 2$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a ، تابع f روی مجموعه ای اعداد حقیقی پیوسته است.

گزینه ۱

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{3 \sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{2} + \frac{9x}{2}}{x} = 4$$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow 0} \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}} \quad \text{می دانیم: ۳۸. گزینه ۳}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{9}{2}x^2)}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{0 - \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 8\sqrt{4 - x^2} = 16$$

۳۹. گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{3x-4}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2-4) - (3x-4)(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\overbrace{x^2-4-3x^2-3x+4x+4}^{-2x^2+x}}{x(x+1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(1-2x)}{x(x+1)(x-2)} \right) = -\frac{1}{2}$$

۴۰. گزینه ۲

وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ داخل قدر مطلق، منفی است. $(-1)^+$ را حدوداً ۰٫۹۹- در نظر بگیرید

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \left| \frac{x}{x+1} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \left(\frac{-x}{x+1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{\overbrace{2x+x(x-1)}^{x^2+x}}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

۴۱. گزینه ۱

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+ : x > \frac{1}{2} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \pi x < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{\overbrace{|\cos \pi x|}^{\cos \pi x}}{1 - \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{\pi \sin \pi x}{2\sqrt{2x}} = -\pi$$

۴۲. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \frac{-\cos x}{\cos x + 3\cos 3x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \frac{\sin x}{-\sin x - 9\sin 3x} = \frac{1}{-1+9} = \frac{1}{8}$$

۴۳. گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

۴۴. گزینه ۲ حد داده شده مبهم از نوع 1^∞ می باشد.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f^g = 1^\infty$ باشد برای رفع ابهام می توان از رابطه ی $\lim_{x \rightarrow a} e^{(f-1)g}$ استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f-1)g = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-x+1}{x-1} \right) x \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \rightarrow \text{جواب حد} = e$$

۴۵. گزینه ۲

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2 \sqrt{x}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3 \\
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{1(8x)}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 - \frac{8}{6}}{2} = \frac{\frac{10}{6}}{\frac{2}{1}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

۴۶. گزینه ۱

شرط پیوستگی یک تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (-1 + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}})}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}}{2 \cos x} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2(1)} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

بنابراین $f(0) = a = -\frac{1}{4}$ است.

۴۷. گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x = 1$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = -1 + 4 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5x - a) = a + 5 - a = 5 \\ f(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

تابع f در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه $[-2, 2]$ پیوسته نمی‌باشد.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۱۲۱۵۶۲

۴-۵	۴-۴	۱-۳	۳-۲	۱-۱
۲-۱۰	۴-۹	۲-۸	۴-۷	۴-۶
۳-۱۵	۴-۱۴	۳-۱۳	۱-۱۲	۲-۱۱
۲-۲۰	۲-۱۹	۲-۱۸	۴-۱۷	۴-۱۶
۳-۲۵	۱-۲۴	۴-۲۳	۴-۲۲	۱-۲۱
۱-۳۰	۲-۲۹	۴-۲۸	۳-۲۷	۱-۲۶
۱-۳۵	۲-۳۴	۴-۳۳	۲-۳۲	۱-۳۱
۲-۴۰	۴-۳۹	۳-۳۸	۲-۳۷	۱-۳۶
۲-۴۵	۲-۴۴	۳-۴۳	۱-۴۲	۱-۴۱
			۱-۴۷	۱-۴۶