



## گروه مشاوره خاکسار

۱. شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 1)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(0, 0)$  می گذرد کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳) ۳ (۴)  $3\sqrt{5}$

کد سوال: ۵۱۲۳-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۲. در هذلولی به معادله  $x^2 - 3y^2 - 2x = 2$  اندازه ی وتر گذرنده بر کانون و عمود بر محور کانونی آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴)  $2\sqrt{3}$

کد سوال: ۵۱۲۵-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۳. دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$  و  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج

کد سوال: ۵۳۲۲-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۴. در بیضی به معادله  $x^2 + 2y^2 - 2x = 1$  اندازه ی وتری که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{2}$

کد سوال: ۵۳۲۳-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۵. به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، معادله ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$  جواب دارد؟

- (۱)  $\{-1, 1\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  (۳)  $\phi$  (۴)  $\mathbb{R}$

کد سوال: ۵۹۳۹-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۶. به ازای کدام مقدار  $a$ ، سه خط به معادلات  $y + 2x = 0$ ,  $2y + ax + 5 = 0$ ,  $y + 3x = a$  متقارب اند؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نشدنی

کد سوال: ۵۹۹۱-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۷. هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-2, 1)$  می گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳) ۳ (۴)  $3\sqrt{2}$

کد سوال: ۶۰۱۰-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۸. در سهمی به معادله  $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$  خط هادی آن از نقطه ای با کدام مختصات می گذرد؟

- (۱)  $(1, -2)$  (۲)  $(1, 2)$  (۳)  $(2, 1)$  (۴)  $(0, 3)$

کد سوال: ۶۰۱۲-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۹. نقطه ی  $A(7, 6)$  رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱)  $(4, 3)$  (۲)  $(3, 4)$  (۳)  $(3, 5)$  (۴)  $(1, 5)$

کد سوال: ۶۸۶۸-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۱۰. دایره ای از نقطه  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۸

کد سوال: ۶۸۸۳-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۱۱. از دستگاه معادلات  $2x + y - 2z = 16$  و  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2$  مقدار  $(x+y)$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

کد سوال: ۷۳۰۰-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

۱۲. به ازای کدام مقدار  $a$ ، دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 3y = 0$  مماس است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۵

کد سوال: ۷۳۱۳-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

۱۳. اگر نقاط  $F(0, 3)$  و  $F'(0, -3)$  کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  باشد، معادله آن کدام است؟

- (۱)  $y^2 - 3x^2 = 4$  (۲)  $x^2 - 3y^2 = 4$  (۳)  $x^2 - 8y^2 = 8$  (۴)  $y^2 - 8x^2 = 8$

کد سوال: ۷۳۱۷-سراسری-۱۳۸۵-متوسط

۱۴. دایره به مرکز  $(0, 2)$  و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله  $y = 1$  را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

- (۱) ۱, ۳ (۲) ۴, ۱ (۳)  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$  (۴)  $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

کد سوال: ۷۹۰۰-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

۱۵. در سهمی به معادله  $x^2 - 6x + 8 = 2y$  خط هادی آن کدام است؟

- (۱)  $y = -\frac{3}{2}$  (۲)  $y = -1$  (۳)  $y = -\frac{1}{2}$  (۴)  $y = \frac{1}{2}$

کد سوال: ۷۹۰۲-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

۱۶. نقطه  $M(x, y)$  بر روی بیضی به معادله  $9y^2 + 4x^2 - 8x = 8$  قرار دارد، مجموع فواصل نقطه  $M$  از دو کانون این بیضی کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{6}$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۶

کد سوال: ۷۹۰۷-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

۱۷. معادله سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ,  $x = 1$  و  $y = 2x$  است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

- (۱)  $y = \frac{2}{3}$  (۲)  $x = \frac{2}{3}$  (۳)  $y + x = \frac{2}{3}$  (۴)  $y + x = \frac{1}{3}$

کد سوال: ۹۸۴۹-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۱۸. نقطه  $(a, 2a)$  مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه  $(2, 1)$  و  $(-1, 4)$  است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

کد سوال: ۹۸۷۹-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۱۹. در بیضی به معادله  $3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = 44$  فاصله یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)  $4 + 2\sqrt{3}$

کد سوال: ۹۸۸۲-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۲۰. از دستگاه معادلات  $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = z-3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$  مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۳

کد سوال: ۱۱۰۷۱-سراسری-۱۳۸۲-متوسط

۲۱. طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه  $A(-1, 0)$  و  $B(3, 0)$  و  $C(0, -3)$  می‌گذرد کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳

کد سوال: ۱۱۱۴۱-سراسری-۱۳۸۲-متوسط

۲۲. دهانه‌ی سهمی به معادله‌ی  $y^2 + a(x - y) = 0$  رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات کانون این سهمی کدام است؟

- (۱)  $(-1, -2)$  (۲)  $(0, -2)$  (۳)  $(0, -1)$  (۴)  $(1, 2)$

کد سوال: ۱۱۱۵۲-سراسری-۱۳۸۲-متوسط

۲۳. یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  برخط گذرنده بر دو نقطه‌ی  $(2, -1)$  و  $(8, 3)$  عمود است، معادله‌ی آن خط کدام است؟

- (۱)  $2y + 3x = 4$  (۲)  $2y + 3x = 1$  (۳)  $2y - 3x = -5$  (۴)  $3y - 2x = -5$

کد سوال: ۱۱۷۵۴-سراسری-۱۳۸۱-متوسط

۲۴. شیب خط قائم بر بیضی به معادله‌ی  $x^2 + 3y^2 - 8x = 0$  در نقطه‌ی برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه‌ی اول و در این ناحیه کدام است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۳

کد سوال: ۱۱۸۰۷-سراسری-۱۳۸۱-متوسط

۲۵. دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$  و  $x^2 + y^2 + 2x = 1$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس داخل (۲) مماس خارج (۳) متقاطع (۴) متداخل

کد سوال: ۱۲۳۷۳-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۲۶. خط به معادله‌ی  $y = 1$  محور تقارن و خط  $x = 2$  خط هادی یک سهمی‌اند. اگر این سهمی از نقطه‌ی  $(3, 2)$  بگذرد فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

کد سوال: ۱۲۳۷۶-سراسری-۱۳۸۳-سخت

۲۷. مجانب‌های یک هذلولی منطبق بر دو قطر یک مستطیل به ابعاد ۶ و ۸ واحد است. اگر این هذلولی بر ضلع بزرگتر مستطیل مماس باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

کد سوال: ۱۲۳۷۹-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۲۸. دو نقطه بر خط به معادله‌ی  $y = x - 1$  قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله‌ی  $2x - 3y = 5$  برابر  $\sqrt{13}$  است. طول این دو نقطه، کدام است؟

- (۱)  $15, 9$  (۲)  $15, 11$  (۳)  $11, -9$  (۴)  $11, 15$

کد سوال: ۱۴۰۷۲-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۲۹. یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله‌ی راس تا کانون ۷۲ سانتی‌متر و قطر قاعده‌ی آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق آینه در مرکز، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۲۴ (۲)  $26\frac{5}{8}$  (۳) ۲۶ (۴)  $24\frac{5}{8}$

کد سوال: ۱۴۱۲۹-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۳۰. نقطه‌ی  $M(-2, 1)$  محل تلاقی مجانب‌های هذلولی به معادله‌ی  $0 = 4x^2 + ay^2 + bx + 2y + 11$  است، معادله‌ی مجانب آن با شیب مثبت، کدام است؟

$$(1) \quad 2y = x + 4 \quad (2) \quad y = 4x + 9 \quad (3) \quad y = 2x + 5 \quad (4) \quad y = x + 1$$

کد سوال: ۱۴۱۳۱-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۳۱. خروج از مرکز هذلولی به معادله‌ی  $1 = \frac{1}{p}y^2 - 2ax - x^2$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \sqrt{3} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \sqrt{5} \quad (4) \quad \sqrt{1+a^2}$$

کد سوال: ۴۷۴۷۱-خارج از کشور-۱۳۹۱-متوسط

۳۲. سه ضلع مثلثی به معادلات  $AB: 2y - x = 3$ ,  $AC: y - 2x = 5$ ,  $BC: 2y + 3x = 6$  هستند. معادله‌ی ارتفاع  $AH$  از مثلث مفروض، کدام است؟

$$(1) \quad 6y - 4x = 15 \quad (2) \quad 9y - 6x = 17 \quad (3) \quad 3y - 2x = 7 \quad (4) \quad 3y + 2x = 9$$

کد سوال: ۴۸۸۰۶-خارج از کشور-۱۳۸۹-متوسط

۳۳. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه‌ی  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام است؟

$$(1) \quad 7,2 \quad (2) \quad 9,6 \quad (3) \quad 11,4 \quad (4) \quad 12,8$$

کد سوال: ۴۸۸۲۷-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۳۴. یک اشعه‌ی نورانی را در امتداد خط  $x = 3$  و اشعه‌ی دیگر را در امتداد خط  $x = -1$ ، از داخل سهمی به معادله‌ی

$$0 = x^2 - 2x - 4y + 9$$

$$(1) \quad (1, 3) \quad (2) \quad (1, 4) \quad (3) \quad (2, 2) \quad (4) \quad (3, 2)$$

کد سوال: ۴۸۸۴۴-خارج از کشور-۱۳۸۹-سخت

۳۵. در هذلولی به معادله‌ی  $4 = 4x^2 - y^2 - 8x - 4y$ ، فاصله‌ی هر کانون از خط مجانب هذلولی، کدام است؟

$$(1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

کد سوال: ۴۸۸۴۶-خارج از کشور-۱۳۸۹-متوسط

۳۶. دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

$$(1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \sqrt{5} \quad (4) \quad 3$$

کد سوال: ۴۸۸۶۴-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۳۷. مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی به معادله‌ی  $4 = 4x^2 + 4y^2 - 4x$  در هر رأس کانونی و غیر کانونی آن، کدام است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 16 \quad (4) \quad 18$$

کد سوال: ۴۸۸۶۵-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۳۸. دستگاه معادلات  $\frac{2x-y}{3} = \frac{5x+3y}{2} = \frac{x+y+1}{1} = \frac{3x+y}{4}$ ، چند دسته جواب دارد؟

$$(1) \quad \text{یک} \quad (2) \quad \text{دو} \quad (3) \quad \text{فاقد جواب} \quad (4) \quad \text{بی شمار}$$

کد سوال: ۷۶۲۰۷-خارج از کشور-۱۳۸۷-متوسط

۳۹. وتری از سهمی به معادله‌ی  $y^2 = 4(x+y)$  که از کانون بر محور آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادله‌ی این دایره کدام است؟

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad (2) \quad x^2 + y^2 + 4y = 0 \quad (3) \quad x^2 + y^2 - 2y = 2 \quad (4) \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$$

کد سوال: ۷۶۳۰۸-خارج از کشور-۱۳۸۷-متوسط

۴۰. دو خط به معادلات  $2y - x + 1 = 0$  و  $2y + x - 1 = 0$ ، مجانب‌های یک هذلولی گذرا بر نقطه‌ی  $(3, 0)$  هستند. معادله‌ی این هذلولی کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & 4x^2 - y^2 - 8x = 0 \\ (2) & y^2 - 4x^2 + 8y = 8 \\ (3) & x^2 - 4y^2 - 2x = 3 \\ (4) & 4y^2 - x^2 + 2x = 5 \end{array}$$

کد سوال: ۷۶۳۱۴-خارج از کشور-۱۳۸۷-سخت

۴۱. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{9}{8} & (2) & \frac{9}{4} \\ (3) & \frac{25}{8} & (4) & \frac{25}{4} \end{array}$$

کد سوال: ۷۸۶۶۹-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۴۲. سهمی به کانون  $F(2, 4)$  و خط هادی به معادله‌ی  $x = -1$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{17}{6} & (2) & \frac{19}{6} \\ (3) & \frac{10}{3} & (4) & \frac{11}{3} \end{array}$$

کد سوال: ۷۸۶۷۱-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۴۳. مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی  $(-1, 3)$  و  $(-1, -1)$  است. این بیضی از نقطه‌ی  $(-4, 2)$  می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{\sqrt{2}}{3} & (2) & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (3) & \frac{\sqrt{6}}{3} & (4) & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

کد سوال: ۷۸۶۷۲-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۴۴. به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله‌ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} m & 2 \\ 3 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix}$  جواب ندارد؟

$$\begin{array}{llll} (1) & -6 & (2) & -3 \\ (3) & 1 & (4) & 2 \end{array}$$

کد سوال: ۷۸۹۰۵-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۴۵. دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{3}{2} & (2) & \sqrt{5} \\ (3) & \frac{5}{2} & (4) & 3 \end{array}$$

کد سوال: ۷۹۰۳۹-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۴۶. به ازای کدام مقدار  $m$ ، دستگاه معادلات  $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$  دارای بی‌شمار جواب است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & -2 & (2) & -1 \\ (3) & 3 & (4) & هیچ مقدار m \end{array}$$

کد سوال: ۸۵۲۰۸-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۴۷. شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی  $(0, 0)$ ،  $(2, 1)$  و  $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{1}{2}\sqrt{10} & (2) & \sqrt{3} \\ (3) & \sqrt{5} & (4) & \frac{1}{2}\sqrt{13} \end{array}$$

کد سوال: ۸۵۲۰۹-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۴۸. در هذلولی به معادله‌ی  $3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0$ ، طول وتری از آن، گذرا به کانون و عمود بر محور کانونی، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 1 & (2) & \sqrt{7} \\ (3) & 3 & (4) & 2\sqrt{3} \end{array}$$

کد سوال: ۸۵۲۱۰-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۴۹. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$  کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 6 & (2) & 6.5 \\ (3) & 7 & (4) & 7.5 \end{array}$$

کد سوال: ۸۵۹۰۳-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۵۰. عمق یک آینه‌ی سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده‌ی آن ۶۰ واحد است. فاصله‌ی کانون تا رأس آن کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲٫۵ (۴) ۲۵

کد سوال: ۸۵۹۰۴-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۵۱. مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی  $(۳, ۶)$  و  $(۳, -۲)$  و خروج از مرکز آن  $\frac{1}{۲}$  است. این بیضی محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۱٫۵ (۲) ۱٫۷ (۳) ۰٫۶ (۴) ۱٫۵

کد سوال: ۸۵۹۰۵-خارج از کشور-۱۳۹۲-سخت

۵۲. دو اشعه به موازات محور  $x$  ها، بر سهمی به معادله‌ی  $y^2 - ۲y + ۴x = ۱۱$  می‌تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

- (۱)  $(۲, ۱)$  (۲)  $(۲, ۳)$  (۳)  $(۳, ۱)$  (۴)  $(۴, ۱)$

کد سوال: ۸۷۳۲۸-خارج از کشور-۱۳۸۶-متوسط

۵۳. خط هادی یک سهمی به معادله‌ی  $x = \frac{۱۳}{۴}$  است. هر پرتوی که از نقطه‌ی  $(-\frac{۵}{۴}, -۲)$  بر این سهمی بتابد، در امتداد محور  $x$  ها باز می‌تابد. این سهمی محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{۱}{۳}$  (۲)  $\frac{۳}{۴}$  (۳)  $\frac{۵}{۹}$  (۴)  $\frac{۵}{۴}$

کد سوال: ۱۰۲۴۸۱-سراسری-۱۳۹۴-سخت

۵۴. هذلولی به معادله‌ی  $۵y^2 - ۴x^2 - ۲۰y = ۰$  مفروض است. معادله یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟

- (۱)  $۵y^2 + ۹x^2 - ۲۰y = ۲۵$  (۲)  $۵y^2 + ۹x^2 - ۱۰y = ۳۶$   
(۳)  $۴y^2 + ۵x^2 - ۱۶y = ۴$  (۴)  $۹y^2 + ۵x^2 - ۳۶y = ۹$

کد سوال: ۱۰۲۴۸۶-سراسری-۱۳۹۴-سخت

۵۵. نقطه‌ی  $A(۳, -۱)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $۲y - x = ۵$  است. مساحت این مربع، کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

کد سوال: ۱۰۲۵۵۹-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۵۶. شعاع دایره به مرکز  $(-۲, ۲)$  و مماس خارج بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ ، کدام است؟

- (۱)  $۲\sqrt{۲}$  (۲) ۳ (۳)  $۲\sqrt{۳}$  (۴) ۴

کد سوال: ۱۰۲۵۶۷-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۵۷. قدرمطلق تفاضل فواصل نقطه‌ی متحرک  $M(x, y)$  از دو نقطه‌ی ثابت  $(۲, -۴)$  و  $(۲, ۶)$ ، همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام عرض، خط به معادله‌ی  $x = ۵$  را قطع می‌کند؟

- (۱)  $۱ \pm \frac{۱۵}{۴}$  (۲)  $۱ \pm ۴\sqrt{۲}$  (۳)  $۲ \pm \frac{۱۵}{۴}$  (۴)  $۲ \pm ۳\sqrt{۲}$

کد سوال: ۱۰۲۵۷۲-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۵۸. نقطه‌ی  $S(-۱, ۶, -۱)$ ، رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور  $x$  ها بر این سهمی بتابد، به نقطه‌ی  $(۰, ۹, -۱)$  باز می‌تابد. این سهمی محور  $y$  ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- (۱) ۴٫۶ (۲) ۵٫۳ (۳) ۴٫۲ (۴) ۲٫۰

کد سوال: ۱۰۲۶۶۱-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۵۹. به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله‌ی  $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$  یک دایره است؟  
 (۱)  $\{-3\}$  (۲)  $\{3\}$  (۳)  $\{-3, 3\}$  (۴)  $\emptyset$

کد سوال: ۱۰۲۸۲۱ - خارج از کشور - ۱۳۸۵ - متوسط

۶۰. در هذلولی به معادله‌ی  $4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0$ ، مختصات یکی از کانون‌ها کدام است؟  
 (۱)  $(-2, -1)$  (۲)  $(-1, -1)$  (۳)  $(2, -1)$  (۴)  $(2, 2)$

کد سوال: ۱۰۲۸۲۳ - خارج از کشور - ۱۳۸۵ - متوسط

۶۱. مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات  $y + x = 2$  و  $2y - x = 4$  و ضلع دیگر آن بر محور  $x$  قرار دارد کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

کد سوال: ۱۰۹۱۰۶ - سراسری - ۱۳۷۳ - متوسط

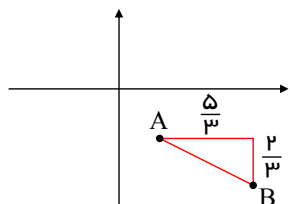
۶۲. معادله‌ی خطی که به موازات نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه‌ی دوم را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  قطع می‌کند کدام است؟

(۱)  $y + x = 4$  (۲)  $y + x = -4$  (۳)  $y - x = 4$  (۴)  $y - x = -4$

کد سوال: ۱۰۹۱۰۷ - سراسری - ۱۳۷۸ - متوسط

۶۳. مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات  $y = x + 3$  و  $x = 4$  و محور  $y$  ها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟  
 (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

کد سوال: ۱۰۹۱۱۳ - سراسری - ۱۳۷۷ - متوسط



۶۴. در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه‌ی  $A, B$  می‌گذرد کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $-\frac{2}{5}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$

کد سوال: ۱۰۹۱۳۴ - سراسری - ۱۳۷۳ - متوسط

۶۵. یک سهمی محور  $y$  ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند، رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است، فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

کد سوال: ۱۱۶۵۵۴ - خارج از کشور - ۱۳۶۰ - سخت

۶۶. دایره‌ای به مرکز  $(2, -1)$  و مماس بر خط به معادله‌ی  $x - y = 1$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟  
 (۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴ (۳) ۲ و ۳ (۴) ۴ و ۵/۱

کد سوال: ۱۱۹۴۳۴ - سراسری - ۱۳۹۵ - متوسط

۶۷. به ازای کدام مقدار  $k$ ، خروج از مرکز هذلولی به معادله‌ی  $kx^2 - 2y^2 + 4y = 4$ ، برابر  $\sqrt{3}$  است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

کد سوال: ۱۱۹۴۳۵ - سراسری - ۱۳۹۵ - متوسط

۶۸. دایره‌ای، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳

کد سوال: ۱۱۹۵۲۸ - خارج از کشور - ۱۳۹۵ - متوسط

۶۹. در یک هذلولی افقی، معادله‌ی مجانب‌ها به صورت  $y = 2x - 4$  و  $y = -2x$  می‌باشند. خروج از مرکز این هذلولی، کدام است؟

$$(1) \frac{3}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \sqrt{5} \quad (3) \sqrt{3} \quad (4) \sqrt{5}$$

کد سوال: ۱۱۹۵۲۹-خارج از کشور-۱۳۹۵-آسان

۷۰. دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 0)$  و  $(3, 1)$  گذشته و مرکز آن بر خط به معادله‌ی  $y = 2x$  قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

$$(1) \sqrt{3} \quad (2) 2 \quad (3) \sqrt{5} \quad (4) 3$$

کد سوال: ۱۲۱۷۲۸-خارج از کشور-۱۳۸۶-متوسط

۷۱. دورترین نقطه از بیضی به معادله‌ی  $2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$  تا مرکز آن، به کدام مختصات است؟

$$(1) (-1, 2) \quad (2) (-2, 2 + \sqrt{2}) \quad (3) (-1, 4) \quad (4) (-1, 6)$$

کد سوال: ۱۲۱۷۲۹-خارج از کشور-۱۳۸۶-متوسط

۷۲. از دستگاه معادلات  $2x + y - z = 4$  و  $x + 2y + 3z = 13$  و  $x + z = 9$  مقدار  $y$  کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) -1 \quad (4) -2$$

کد سوال: ۱۲۲۰۰۳-خارج از کشور-۱۳۸۴-متوسط

۷۳. معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مراکز  $(-1, 2)$  و  $(2, 1)$  و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

$$(1) x = 2y \quad (2) y = 3x \quad (3) 3y = 2x \quad (4) 3y = 3x$$

کد سوال: ۱۲۲۰۲۷-خارج از کشور-۱۳۸۴-متوسط

۷۴. یک سهمی محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادی آن به معادله‌ی  $y = -2$  است. عرض رأس این سهمی کدام است؟

$$(1) -1 \quad (2) -\frac{3}{2} \quad (3) -\frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{2}$$

کد سوال: ۱۲۲۰۳۱-خارج از کشور-۱۳۸۴-سخت

۷۵. دستگاه معادلات  $\frac{3x-y}{3} = \frac{5x+y}{1} = \frac{7x+y}{2} = \frac{x-3y}{5}$  چند دسته جواب دارد؟

$$(1) \text{ یک} \quad (2) \text{ دو} \quad (3) \text{ فاقد جواب} \quad (4) \text{ بی شمار}$$

کد سوال: ۲۲۱۸۳۲-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۷۶. به ازای کدام مقدار  $a$ ، خط هادی سهمی به معادله‌ی  $y^2 - 6y + 2x + a = 0$  از نقطه‌ی  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  می‌گذرد؟

$$(1) 5 \quad (2) 6 \quad (3) 7 \quad (4) 8$$

کد سوال: ۲۲۲۲۷۶-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۷۷. در بیضی به معادله‌ی  $5x^2 + 16y^2 - 10x = 75$  خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در  $M$  و  $N$  قطع می‌کند، اندازه‌ی  $MN$  کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) 2.5 \quad (3) 3 \quad (4) 3.5$$

کد سوال: ۲۲۹۴۵۱-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۷۸. محور تقارن یک سهمی با رأس  $(-1, 3)$  موازی محور  $x$ ها است. اگر این سهمی از نقطه‌ی  $(5, 9)$  بگذرد، فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن، کدام است؟

$$(1) 2.5 \quad (2) 3 \quad (3) 3.5 \quad (4) 4$$

کد سوال: ۲۲۹۴۹۲-سراسری-۱۳۹۶-متوسط



۷۹. سهمی با کانون  $F(2, 3)$  و خط هادی به معادله  $x = -4$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می کند؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

کد سوال: ۲۲۹۶۶۷-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۸۰. بیضی به کانون های  $(1, -1)$  و  $(1, 1)$  و خروج از مرکز  $\frac{1}{3}$ ، خط  $y = 2x$  را با کدام طول ها قطع می کند؟

- (۱)  $1, -\frac{1}{2}$       (۲)  $1, -\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{2}, -1$       (۴)  $2, -\frac{1}{2}$

کد سوال: ۲۲۹۶۸۲-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۸۱. به ازای کدام مقدار  $a$ ، زاویه ی بین خط مماس بر دایره ی  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله  $3x + 2y = a$  در نقطه ی تلاقی آنها،  $90^\circ$  درجه است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

کد سوال: ۲۴۰۷۵۴-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۸۲. دایره ی  $C$  بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$  مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره ی  $C$  از نقطه ی  $(8, 7)$  می گذرد. شعاع دایره ی  $C$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۹

کد سوال: ۲۵۴۳۲۱-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط



۱. گزینه ۱ معادله‌ی دایره در حالت گسترده به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است. این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0 \\ B \left| \begin{array}{l} -2 \\ 4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \\ C \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 0, b = -5$$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$  شعاع دایره برابر است با:

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} = \frac{25}{4} \rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

۲. گزینه ۱

در این سؤال، اندازه‌ی وتر کانونی را خواسته است.

$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 - 2x = 2 &\Rightarrow (x^2 - 2x) - 3y^2 = 2 \Rightarrow ((x-1)^2 - 1) - 3y^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 3 \\ &\rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \\ MN = \text{اندازه‌ی وتر کانونی} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۳. گزینه ۱

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 6 = 0 \rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} 1 \\ -3 \end{array} \right. \\ R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 9 + 1 = 11 \Rightarrow R = \sqrt{11} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow C' \left| \begin{array}{l} -4 \\ 2 \end{array} \right. \\ R'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - c = 16 + 4 - 12 = 8 \rightarrow R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$CC' = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون  $CC' = R + R'$  است دو دایره مماس خارج هستند.

۴. گزینه ۴ سوال، اندازه‌ی وتر کانونی را خواسته است.

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 2x = 1 &\rightarrow (x-1)^2 - 1 + 2y^2 = 1 \rightarrow (x-1)^2 + 2y^2 = 2 \\ &\rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \rightarrow a = \sqrt{2}, b = 1 \\ MN = \frac{2b^2}{a} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 1\sqrt{2} \end{aligned}$$

۵. گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)x + 2y = a \\ -x + (a-1)y = 1 \end{cases}$$

همواره برقرار است  $a^2 \neq -1 \Rightarrow a^2 - 1 \neq -2 \Rightarrow a^2 - 1 \neq -2 \Rightarrow a^2 \neq -1$   
 $\xrightarrow{\text{شرط جواب داشتن}} \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a+1}{-1} \neq \frac{2}{a-1} \Rightarrow a^2 - 1 \neq -2 \Rightarrow a^2 \neq -1$

۶. گزینه ۴ شرط متقارب بودن سه خط آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

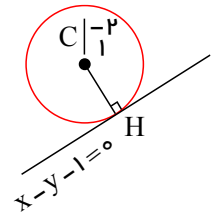
$$-\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$

$$A \left| \begin{array}{c} a \\ -2a \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

این سه خط هیچ گاه متقارب نیستند.  $\rightarrow$  ریشه‌ی حقیقی ندارد  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0 \rightarrow$

۷. گزینه ۲ قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس  $C \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right|$  می‌باشد.

$$R = CH = \frac{|-2-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right|$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۸. گزینه ۳

$$y^2 + 4y + 2x + 1 = 0 \rightarrow (y+2)^2 - 4 + 2x + 1 = 0$$

$$\rightarrow (y+2)^2 = -2x + 3 \rightarrow (y+2)^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right), \quad S \left| \begin{array}{c} \frac{3}{2} : \alpha \\ -2 : \beta \end{array} \right|, \quad 4p = 2 \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

سه‌می افقی منفی

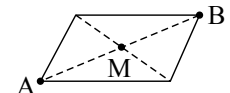
$$x = \alpha + p \rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$$

تنها گزینه‌ای که طولش ۲ است گزینه سوم می‌باشد.

۹. گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی  $A$  در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه  $A$  روی این دو خط قرار ندارد کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه  $B$  بدست آید.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ -2(3y + 4x) = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left| \begin{array}{c} -1 \\ 4 \end{array} \right|$$



می‌دانیم نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

۱۰. گزینه ۲ ۱- مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, R)$  است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, R)$  است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, -R)$  است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, -R)$  است. که شعاع دایره است.

از نقطه‌ی داده شده روی دایره متوجه می‌شویم دایره در ناحیه‌ی دوم بر هر دو محور مختصات مماس است پس مرکز آن  $C \left| \begin{smallmatrix} -R \\ R \end{smallmatrix} \right.$  است.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{\left| \begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right.} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

صدق

$$\Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow 1 = \text{قطر دایره بزرگتر}$$

۱۱. گزینه ۳

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2 = k \Rightarrow \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 3k \\ z = k-2 \end{cases}$$

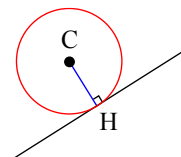
$$2x + y - 2z = 16 \rightarrow 4k + 2 + 3k - 2k + 4 = 16 \rightarrow 5k = 10 \rightarrow k = 2$$

$$k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 11$$

۱۲. گزینه ۲ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 &\rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \Rightarrow C \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right. \end{aligned}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - a = 5 - a \rightarrow R = \sqrt{5 - a}$$



$$x + 3y = 0 \text{ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط } CH = R = \frac{|1 - 6 + 0|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{5 - a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25}{10} = 5 - a \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۱۳. گزینه ۴

$$xF = xF' \rightarrow \text{هذلولی قائم } FF' \text{ وسط } W \left| \begin{array}{l} \frac{0+0}{2} = 0 : \alpha \\ \frac{-3+3}{2} = 0 : \beta \end{array} \right.$$

$$FF' = 2c \rightarrow 2c = 6 \rightarrow c = 3$$

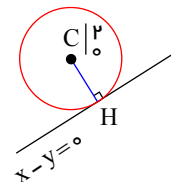
$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{a} \rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 9 = 8 + b^2 \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow b = 1$$

$$\text{معادله‌ی هذلولی قائم } \frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{1} = 1 \xrightarrow{\times 8} y^2 - 8x^2 = 8$$

۱۴. گزینه ۱ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط  $y = x$  (نیم‌ساز ناحیه‌ی اول) شعاع دایره را می‌دهد.

$$R = CH = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



حال با داشتن مرکز دایره و شعاع دایره، معادله‌ی آن را می‌نویسیم.

$$C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, R = \sqrt{2} \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x-2)^2 + 1 = 2$$

$$(x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۱۵. گزینه ۲

$$x^2 - 6x + 8 = 2y \rightarrow (x-3)^2 - 9 + 8 = 2y$$

$$\rightarrow (x-3)^2 = 2y + 1 \rightarrow (x-3)^2 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right), S \begin{vmatrix} 3 : \alpha \\ -\frac{1}{2} : \beta \end{vmatrix}, 4p = 2 \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

سه‌می قائم مثبت

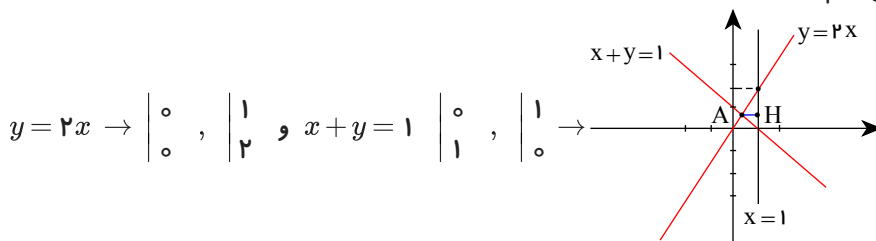
$$y = \beta - p \rightarrow y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow y = -1$$

۱۶. گزینه ۳ مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، برابر  $2a$  است.

$$9y^2 + 4x^2 - 8x = 8 \Rightarrow 9y^2 + 4(x^2 - 2x) = 8 \Rightarrow 9y^2 + 4((x-1)^2 - 1) = 8$$

$$\Rightarrow 9y^2 + 4(x-1)^2 = 12 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{12}{9}} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1 \rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{3}$$

۱۷. گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث  $ABC$  پاره خط  $AH$  می‌باشد که معادله‌اش  $y = \frac{2}{3}$  است زیرا اگر با دو خط  $y = 2x$  و  $x + y = 1$  تشکیل

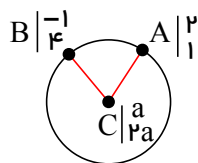
دهیم داریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی  $A$  به صورت  $A \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$  است پس معادله‌ی ارتفاع  $AH$  به صورت  $y = \frac{2}{3}$  است.

۱۸. گزینه ۱

شکل مسأله به صورت مقابل می باشد.



$$R = AC = \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2}, R = BC = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

توان<sup>۲</sup>

$$\longrightarrow 4 - 4a + a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 1 + 2a + a^2 + 16 - 16a + 4a^2 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

$$R = AC = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

۱۹. گزینه ۲ فاصله ی یک کانون از دورترین رأس مساوی  $a+c$  است و فاصله ی یک کانون از نزدیکترین رأس مساوی

$a-c$  است.

$$3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = 44 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) + 4(y^2 + y) = 44$$

$$\rightarrow 3(x-1)^2 - 1 + 4(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 44 \Rightarrow 3(x-1)^2 + 4(y + \frac{1}{2})^2 = 48$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{12} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \\ b^2 = 12 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 12 = 4 \rightarrow c = 2 \end{cases} \rightarrow a+c = 6$$

۲۰. گزینه ۱

$$\frac{x+y}{2} = z-3 \rightarrow x+y = 2z-6 \xrightarrow{x+y+z=0} 2z-6+z=0 \rightarrow z=2$$

$$\frac{y+z}{3} = z-3 \xrightarrow{z=2} \frac{y+2}{3} = 2-3 \Rightarrow y+2 = -3 \Rightarrow y = -5$$

۲۱. گزینه ۳ کافی است معادله گسترده دایره یعنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را بنویسیم و این نقاط را در معادله دایره صدق

دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 - a + c = 0 \\ B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 9 + 3a + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -2, c = -3$$

$$C \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 9 - 3b + c = 0 \xrightarrow{c=-3} b = 2$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 4 + 12}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

۲۲. گزینه ۲ فاصله کانون تا خط هادی برابر  $2p$  است یعنی  $2p = 2$ ،  $p = 1$  است و چون دهانه ی سهمی رو به راست باز می شود

سهمی مثبت است.

$$y^2+ax-ay=0\rightarrow (y-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+ax=0$$

$$\rightarrow (y-\frac{a}{2})^2=-ax+\frac{a^2}{4}\rightarrow (y-\frac{a}{2})^2=-a(x-\frac{a}{4})$$

$$\rightarrow 4p=-a\rightarrow -a=4\rightarrow a=-4\rightarrow \text{معادله ی سهمی: } (y+2)^2=4(x+1)\rightarrow S\left|\begin{array}{l} -1:\alpha \\ -2:\beta \end{array}\right.$$

$$\text{مختصات کانون: } F\left|\begin{array}{l} \alpha+p \\ \beta \end{array}\right.\rightarrow F\left|\begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array}\right.$$

۲۳.گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه ی  $A\left|\begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right.$  و  $B\left|\begin{array}{l} 8 \\ 3 \end{array}\right.$  را بدست می آوریم.



$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\text{دسته خط}} = -\frac{2k}{k+1} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$$

$$k = 3 \xrightarrow{\text{معادله ی دسته خطوط}} 4y + 6x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2y + 3x = 1$$

گزینه ۱. ۲۴

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x - 2) = 0$$

$$\rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (غ ق ق)}, x = 2 \rightarrow y = 2$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 8}{6y} \xrightarrow{x=2, y=2} -\frac{4 - 8}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow m_{\text{قائم}} = -3$$

گزینه ۱. ۲۵

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C \Big|_{-2}^1$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 + 13 = 18 \rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow C' \Big|_0^{-1}$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 0 + 1 = 2 \rightarrow R' = \sqrt{2}$$

$$CC' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

چون  $CC' = |R - R'|$  است پس دو دایره مماس داخل هستند.

گزینه ۱. ۲۶

چون معادله ی خط هادی به صورت  $x = 2$  است پس سهمی، افقی است.

چون نقطه ی  $\left| \frac{3}{2} \right|$  روی سهمی در سمت راست خط هادی است پس سهمی مثبت است و می دانیم معادله ی محور تقارن در سهمی افقی،  $y = \beta$  است پس  $\beta = 1$  است.

$$\text{هادی: } xH = \alpha - p \rightarrow 2 = \alpha - p \rightarrow \alpha = 2 + p$$

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha) \xrightarrow{\left| \frac{3}{2} \right|} (2 - 1)^2 = 4p(3 - 2 - p)$$

$$\rightarrow 1 = 4p - 4p^2 \rightarrow 4p^2 - 4p + 1 = 0 \rightarrow (2p - 1)^2 = 0 \rightarrow 2p - 1 = 0 \rightarrow 2p = 1$$

فاصله ی کانون تا خط هادی  $2p$  است.گزینه ۴. ۲۷ هذلولی چه افقی چه قائم همیشه بر ضلع  $2b$  مماس است، بنابراین داریم:

$$2b = 8 \rightarrow b = 4, \quad 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

گزینه ۲. ۲۸ نقطه ی  $A \Big|_{\alpha-1}^{\alpha}$  را روی خط  $y = x - 1$  در نظر گرفته و فاصله ی آن را از خط  $2x - 3y = 5$  بدست آورده و

مساوی  $\sqrt{13}$  قرار می دهیم.

$$\begin{cases} A \Big|_{\alpha-1}^{\alpha} \\ 2x-3y-5=0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2\alpha-3\alpha+3-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-\alpha-2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-\alpha-2| = 13$$

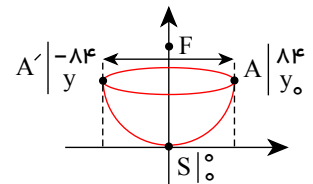
$$-\alpha-2=13 \rightarrow \alpha=-15, \quad -\alpha-2=-13 \rightarrow \alpha=11$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \Big|_{\beta}^{\alpha}$  از خط به معادله‌ی  $ax+by+c=0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  به دست می‌آید.

۲۹. گزینه ۴ برای راحتی کار سهمی را قائم مثبت و با رأس مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم  $S \Big|_{\beta}^{\alpha}$  و فاصله رأس تا کانون همان  $p$  است (پس  $p=72$ ) بنابراین معادله‌ی سهمی می‌شود:

$$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)^2 \rightarrow x^2 = 288y$$

$$A \Big|_{y_0}^{\frac{84}{y_0}} \xrightarrow{\text{صدق در معادله‌ی سهمی}} \frac{84^2}{y_0} = 288y_0 \rightarrow y_0 = \frac{84^2}{288} = 24,5$$



که  $y_0$  عمق آینه در مرکز آن است.

۳۰. گزینه ۳ محل تلاقی مجانب‌های هذلولی همان  $W \Big|_{\beta}^{\alpha}$  است.

$$f'x = 0 \rightarrow 8x+b=0 \rightarrow -16+b=0 \rightarrow b=16$$

$$f'y = 0 \rightarrow 2ay+2=0 \rightarrow 2a+2=0 \rightarrow a=-1$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{|x^2 \text{ ضریب}|}{|y^2 \text{ ضریب}|}} = \pm \sqrt{\frac{|4|}{|-1|}} = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

حال با داشتن شیب و نقطه، معادله‌ی مجانب را می‌نویسیم:

$$W \Big|_1^{-2}, \quad m=2 \rightarrow y-y_1 = m(x-x_1) \rightarrow y-1 = 2(x+2) \rightarrow y = 2x+5$$

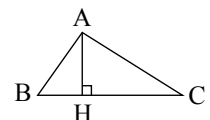
۳۱. گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی هذلولی را استاندارد می‌کنیم.

$$x^2 - 2ax - \frac{1}{2}y^2 = 1 \Rightarrow ((x-a)^2 - a^2) - \frac{1}{2}y^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 - \frac{1}{2}y^2 = a^2 + 1 \xrightarrow{\div (a^2+1)} \frac{(x-a)^2}{a^2+1} - \frac{y^2}{2(a^2+1)} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2(a^2+1)}{a^2+1}} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

۳۲. گزینه ۲



$$BC: 2y+3x=6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی  $A$  کافی است معادلات خطوط اضلاع  $AB$  و  $AC$  را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} 2y-x=3 \\ u-2x=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{7}{3}, \quad y = \frac{1}{3}$$

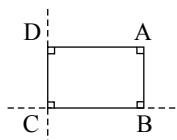
حال، معادله‌ی ارتفاع  $AH$  را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A \left| \begin{array}{c} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right. , m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left( x + \frac{7}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{14}{3}$$

$$\times 3 \rightarrow 9y - 3 = 6x + 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

۳۳. گزینه ۲

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2} , 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی  $A$  در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right. , x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right. , 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9,6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

۳۴. گزینه ۱ پرتوهای نوری که به موازات محور تقارن یک آینه سهمی بر آن می‌تابند در کانون سهمی جمع می‌شوند.

$$x^2 - 2x - 4y + 9 = 0 \rightarrow (x-1)^2 - 1 - 4y + 9 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 4y - 8 \rightarrow (x-1)^2 = 4(y-2)$$

سهمی قائم مثبت

$$S \left| \begin{array}{c} 1 : \alpha \\ 2 : \beta \end{array} \right. , 4p = 4 \rightarrow p = 1$$

در این سهمی قائم مثبت محور تقارن  $x = 1$  می‌باشد پس دو پرتو نورانی  $x = -1$  ,  $x = 3$  که موازی محور تقارن هستند در کانون سهمی به هم می‌رسند پس کافی است مختصات کانون سهمی را پیدا کنیم.

$$F \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta + p \end{array} \right. \rightarrow F \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right.$$

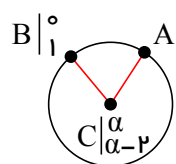
۳۵. گزینه ۳ فاصله‌ی هر دو کانون از هر خط مجانب برابر  $b$  است.

$$4x^2 - y^2 - 8x - 4y = 4 \Rightarrow 4(x^2 - 2x) - (y^2 + 4y) = 4$$

$$\Rightarrow 4((x-1)^2 - 1) - ((y+2)^2 - 4) = 4 \Rightarrow 4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

۳۶. گزینه ۳



قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مختصات مرکز به صورت  $C \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha - 2 \end{array} \right.$  می‌باشد. (زیرا معادله قطر دایره به صورت  $y = x - 2$  می‌باشد)

$$R = AC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (-\alpha+2)^2} , R = BC = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha+3)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (-\alpha+2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha+3)^2}$$

توان

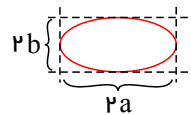
$$\rightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4 = \alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow -4\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\text{بنابراین} : R = AC \stackrel{\alpha=1}{=} \sqrt{(3-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4x = 4 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + 4y^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

بنابراین منحنی داده شده یک بیضی افقی به مرکز  $(2, 0)$  می باشد، که در آن:

$$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \quad , \quad b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$



مساحت مورد نظر، مساحت مستطیلی به طول  $AA' = 2a$  و به عرض  $BB' = 2b$  می باشد، پس داریم:

$$S = AA' \times BB' = 4ab = 4(2\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 16$$

۳۸. گزینه ۳ اگر کسر سوم را با بقیه‌ی کسرهای طرفین وسطین کنیم، دستگاه سه معادله دو مجهول روبه رو به دست می‌آید :

$$\frac{2x-y}{3} = \frac{5x+3y}{2} = \frac{x+y+1}{1} = \frac{3x+y}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y = 3x+3y+3 \\ 5x+3y = 2x+2y+2 \\ 3x+y = 4x+4y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y = -3 & (1) \\ 3x+y = 2 & (2) \\ x+3y = -4 & (3) \end{cases}$$

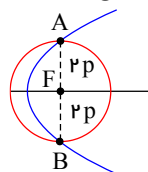
برای بررسی تعداد جواب‌های دستگاه فوق ابتدا دو معادله را در یک دستگاه قرار داده و حل می‌کنیم. اگر جواب به دست آمده معادله‌ی سوم صدق کرد، دستگاه یک دسته جواب دارد و در غیر این صورت، دستگاه جواب ندارد. داریم:

$$\xrightarrow{(1),(3)} \begin{cases} x+4y = -3 \\ x+3y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases} x+4y = -3 \Rightarrow y = 1, x = -7 \\ x+3y = -4 \end{cases} \rightarrow 3(-7) + (1) = 2 \text{ صدق نمی‌کند}$$

در معادله‌ی ۲

جواب به دست آمده از معادلات (۱) و (۳)، در معادله‌ی (۲) صدق نمی‌کند؛ در نتیجه دستگاه جواب ندارد.

۳۹. گزینه ۱ طول وتر از سهمی که در کانون بر محور تقارن آن عمود می‌شود (وتر کانونی) برابر  $4p$  است. با توجه به شکل، کانون سهمی، مرکز دایره است و قطر دایره برابر  $4p$  است.



$$y^2 = 4(x+y) \rightarrow y^2 = 4x + 4y \rightarrow y^2 - 4y = 4x$$

$$\rightarrow (y-2)^2 - 4 = 4x \rightarrow (y-2)^2 = 4(x+1) \rightarrow \text{سهمی افقی مثبت}$$

$$S \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 2 & \beta \end{vmatrix} : \beta, \quad 4p = 4 \rightarrow p = 1, \quad F \begin{vmatrix} \alpha+p & \\ \beta & \end{vmatrix} \rightarrow F \begin{vmatrix} 0 & \\ 2 & \end{vmatrix}$$

$$C \begin{vmatrix} 0 & \\ 2 & \end{vmatrix}, \quad R = 2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$\rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

۴۰. روش اول: نقطه‌ی  $(3, 0)$  تنها در گزینه‌ی (۳) صدق می‌کند، در نتیجه همین گزینه پاسخ است.

روش دوم: اگر دو خط  $ax+by+c=0$  و  $a'x+b'y+c'=0$  مجانب‌های یک هذلولی باشند، معادله‌ی این هذلولی به صورت زیر خواهد بود:

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c') = k, \quad k \neq 0$$

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی هذلولی}} (2y-x+1)(2y+x-1) = k \xrightarrow{\text{صدق در معادله‌ی هذلولی}} (0-3+1)(0+3-1) = k \Rightarrow k = -4$$

$$\text{معادله‌ی هذلولی} \Rightarrow (2y-x+1)(2y+x-1) = -4 \Rightarrow (2y-(x-1))(2y+(x-1)) = -4$$

$$\Rightarrow (2y)^2 - (x-1)^2 = -4 \Rightarrow 4y^2 - (x^2 - 2x + 1) = -4 \Rightarrow x^2 - 4y^2 - 2x = 3$$

۴۱. گزینه ۳

شیب هر دو خط يك می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل يك مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.

$$\begin{array}{c} \text{---} x-y+1=0 \text{---} \\ \square \\ \text{---} x-y-\frac{3}{2}=0 \text{---} \end{array}$$

(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب  $x$  و  $y$  در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1-(-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه‌ی  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  استفاده می‌کنیم.

۴۲. گزینه ۲

مثبت  $x_F > x_H \rightarrow$  و سهمی افقی  $x_H = -1 \rightarrow$  خط هادیخط هادی  $x = \alpha - p \rightarrow -1 = \alpha - p$ ,  $F \left| \begin{array}{l} \alpha + p = 2 \\ \beta = 4 \end{array} \right.$ 

$$\begin{cases} \alpha + p = 2 \\ \alpha - p = -1 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, p = \frac{3}{2}$$

$$\text{معادله ی سهمی افقی مثبت: } (y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha) \rightarrow (y - 4)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{y=0} 16 = 6x - 3 \rightarrow x = \frac{19}{6}$$

۴۳. گزینه ۳

$$B \left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right., B' \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right. \rightarrow x_B = x_{B'} \rightarrow \text{وسط } BB', \text{ بیضی افقی } W \left| \begin{array}{l} \frac{-1+(-1)}{2} = -1 : \alpha \\ \frac{3+(-1)}{2} = 1 : \beta \end{array} \right.$$

$$BB' = 2b \rightarrow 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$\text{معادله ی بیضی افقی: } \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x + 1)^2}{a^2} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

$$\xrightarrow{\left| \begin{array}{l} -4 \\ 2 \end{array} \right.} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{3}{4} \rightarrow a^2 = 12$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$44. \text{ گزینه ۳ } \text{ برای آن که معادله ی ماتریسی } \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \text{ جواب نداشته باشد، باید } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{ باشد.}$$

داریم:

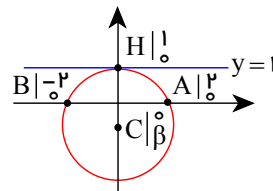
$$\begin{bmatrix} m & 2 \\ 3 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} \frac{m}{3} = \frac{2}{m+5} \neq \frac{m+2}{2} \Rightarrow m(m+5) = 6$$

$$\Rightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \Rightarrow -\frac{6}{3} = \frac{2}{-1} = -\frac{4}{2} \\ m = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (دستگاه بیشمار جواب دارد) غ ق ق}$$



به ازای  $m = -6$  کسر سوم نیز با دو کسر اول برابر بوده و  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  می شود. لذا معادله ی ماتریسی دارای بی شمار جواب بوده و غیرقابل قبول است. ولی به ازای  $m = 1$  کسر سوم با دو کسر اول برابر نبوده و دستگاه ماتریسی فوق جواب ندارد.

۴۵. گزینه ۳ چون دایره از نقاط  $A \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$  ,  $B \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$  می گذرد پس مرکز دایره روی عمودمنصف پاره خط  $AB$  یا همان محور  $y$  ها قرار دارد پس مختصات مرکز دایره  $C \begin{vmatrix} 0 \\ \beta \end{vmatrix}$  است.



$$R = AC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-\beta)^2} = \sqrt{4+\beta^2}$$

$$R = CH = \sqrt{(0-0)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1}$$

$$\rightarrow \sqrt{4+\beta^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + \beta^2 = \beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 2\beta = -3 \rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

$$\text{پس: } R = AC \xrightarrow{\beta = -\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

۴۶. گزینه ۲ شرط آن که دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  دارای بی شمار جواب باشد آن است که  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  باشد.

$$\text{چک کردن گزینه ها} \quad \frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \rightarrow m = -1$$

۴۷. گزینه ۱ معادله ی دایره در حالت گسترده به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است این سه نقطه را در معادله ی دایره صدق می دهیم.

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} B \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5 \\ C \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 + 4 + a - 2b = 0 \Rightarrow a - 2b = -5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -3, b = 1$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{9 + 1 - 0}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

۴۸. گزینه ۳ در این سؤال اندازه ی وتر کانونی  $MN = \frac{2b^2}{a}$  را خواسته است.

$$3x^2 - 6x - 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) - 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3((x-1)^2 - 1) - 4y^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-1)^2 - 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{3}$$

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

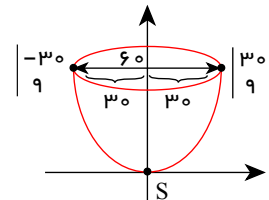
۴۹. گزینه ۲ هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\textcolor{violet}{r}} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| \\
&= \frac{1}{\textcolor{violet}{r}} |\textcolor{violet}{r}(\circ - \textcolor{violet}{r}) + \textcolor{violet}{r}(\textcolor{violet}{r} - \textcolor{brown}{\mathfrak{s}}) + \circ(\textcolor{brown}{\mathfrak{s}} - \circ)| = \frac{1}{\textcolor{violet}{r}} |- \textcolor{violet}{r} - \textcolor{violet}{9} + \circ| = \frac{1\textcolor{violet}{3}}{\textcolor{violet}{r}} = \textcolor{violet}{6}_{/\textcolor{brown}{\mathfrak{s}}}
\end{aligned}$$

۵۰. گزینه ۴ برای راحتی کار سهمی را قائم مثبت و با رأس مبدأ مختصات  $S \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right|_0^0$  در نظر می‌گیریم و می‌دانیم فاصله کانون تا رأس برابر  $p$  است.

$$(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta) \Rightarrow x^2 = 4py$$

$$\left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right|_0^{30} \xrightarrow{\text{صدق}} 900 = 36p \Rightarrow p = \frac{900}{36} = 25$$



۵۱. گزینه ۳

مختصات دو سر قطر بزرگ بیضی هستند.  $A \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix} \right|$ ,  $A' \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix} \right|$

$$x_A = x_{A'} \rightarrow \text{وسط } AA' \text{ و بیضی قائم } W \left| \begin{smallmatrix} \frac{3+3}{2} = 3 : \alpha \\ \frac{6+(-2)}{2} = 2 : \beta \end{smallmatrix} \right|$$

$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4, \quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 16 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{12}$$

$$\text{معادله بیضی قائم: } \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \xrightarrow{y=0} \frac{(x - 3)^2}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow (x - 3)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6 \\ x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۵۲. گزینه ۱ چون سهمی افقی است محور  $x$  ها، محور تقارن است و این دو اشعه که به موازات محور  $x$  ها بر سهمی می‌تابند در کانون سهمی به هم می‌رسند پس کافی است معادله سهمی را استاندارد کرده و مختصات کانون را بدست آوریم:

$$y^2 - 2y + 4x = 11 \Rightarrow (y - 1)^2 - 1 + 4x = 11 \Rightarrow (y - 1)^2 = -4x + 12$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y - 1)^2 = -4(x - 3)}_{\text{سهمی افقی منفی}}, S \left| \begin{smallmatrix} 3 : \alpha \\ 1 : \beta \end{smallmatrix} \right|, 4p = 4 \Rightarrow p = 1 \text{ و مختصات کانون } F \left| \begin{smallmatrix} \alpha - p \\ \beta \end{smallmatrix} \right| \Rightarrow F \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right|$$

سهمی افقی منفی

۵۳. گزینه ۳ چون هر پرتو نوری که از نقطه‌ی  $\left| \begin{smallmatrix} -\frac{5}{4} \\ -2 \end{smallmatrix} \right|$  بر سهمی می‌تابد در امتداد محور  $x$  ها بازتاب می‌کند پس این نقطه، کانون

سهمی است.

$$\text{منفی } x_F < x_H \text{ و سهمی افقی } x_H = \frac{13}{4} \text{ هادی}$$

$$\text{خط هادی: } x = \alpha + p \rightarrow \frac{13}{4} = \alpha + p, \quad F \left| \begin{smallmatrix} \alpha - p = -\frac{5}{4} \\ \beta = -2 \end{smallmatrix} \right|$$

حال، تشکیل دستگاه می‌دهیم تا  $\alpha$  و  $p$  بدست آیند.

$$\begin{cases} \alpha + p = \frac{13}{4} \\ \alpha - \beta = -\frac{5}{4} \end{cases} \rightarrow \alpha = 1, \quad p = \frac{9}{4}$$

$$\text{معادله ی سهمی افقی منفی} : (y - \beta)^2 = -4p(x - \alpha) \rightarrow (y + ۲)^2 = -۹(x - ۱)$$

$$\xrightarrow{y=۰} ۴ = -۹x + ۹ \rightarrow ۹x = ۵ \rightarrow x = \frac{۵}{۹}$$

۵۴. گزینه ۱ ابتدا معادله ی هذلولی را استاندارد می کنیم.

$$\begin{aligned} 5y^2 - 20y - 4x^2 &= 0 \rightarrow 5(y^2 - 4y) - 4x^2 = 0 \rightarrow 5((y-2)^2 - 4) - 4x^2 = 0 \\ \rightarrow 5(y-2)^2 - 4x^2 &= 20 \rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1 \end{aligned}$$

هذلولی قائم است و  $w \begin{vmatrix} 0 : \alpha \\ 2 : \beta \end{vmatrix}$  و  $a = 2$  و  $b = \sqrt{5}$  و  $c = 3$  است  $(c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9)$  باتوجه به اینکه کانون های بیضی منطبق بر رئوس هذلولی هستند یعنی فاصله کانونی بیضی یعنی  $2c$  همان  $2a$  هذلولی است پس  $c = 2$  و چون رأس های بیضی منطبق بر کانون های هذلولی هستند یعنی  $2a$  بیضی همان  $2c$  هذلولی است پس  $a = 3$  و در بیضی  $c^2 = a^2 - b^2$  بنابراین  $4 = 9 - b^2 \rightarrow b = \sqrt{5}$

$$\text{معادله ی بیضی قائم: } \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$\xrightarrow{\times 45} 9x^2 + 5(y-2)^2 = 45 \rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y + 20 = 45 \rightarrow 5y^2 + 9x^2 - 20y = 25$$

۵۵. گزینه ۴

فاصله ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3+2+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

۵۶. گزینه ۲ اگر دو دایره به مراکز  $C$  و  $C'$  و شعاع های  $R$  و  $R'$  مماس خارج باشند  $CC' = R + R'$  است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C' \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - 1 = 4 \rightarrow R' = 2$$

$$\text{شرط مماس خارج: } CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = R + 2 \rightarrow \sqrt{9+16} = R + 2 \rightarrow R + 2 = 3 \rightarrow R = 1$$

۵۷. گزینه ۱ صورت سؤال تعریف ریاضی هذلولی است یعنی دو نقطه ی داده شده کانون های هذلولی هستند پس

$$F \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} 2 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ و } 2a = 6 \rightarrow a = 3 \text{ است.}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+2}{2} = 2 : \alpha \\ \frac{-4+6}{2} = 1 : \beta \end{cases}$$

$$FF' = 2c \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5, c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 9 + b^2 \rightarrow b = 4$$

$$\text{معادله ی هذلولی قائم: } \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

$$\xrightarrow{x=5} \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{9}{16} = 1 \rightarrow \frac{(y-1)^2}{9} = \frac{25}{16} \rightarrow (y-1)^2 = \frac{9 \times 25}{16}$$

$$\rightarrow y-1 = \pm \frac{15}{4} \rightarrow y = 1 \pm \frac{15}{4}$$

۵۸. گزینه ۲ چون هر پرتوی که موازی محور  $x$  بر سهمی می‌تابد به نقطه‌ی  $\begin{vmatrix} 9 \\ -1 \end{vmatrix}$  بازتاب می‌کند پس این نقطه، کانون سهمی است.

مثبت  $x_F > x_S \rightarrow$  ، سهمی افقی  $y_F = y_S$

$$S \begin{vmatrix} -1,6 : \alpha \\ -1 : \beta \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} \alpha + p = 9,9 \rightarrow -1,6 + p = 9,9 \rightarrow p = 11,5 \\ \beta = -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{معادله ی سهمی افقی مثبت: } (y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha) \rightarrow (y+1)^2 = 10(x+1,6)$$

$$\xrightarrow{x=0} (y+1)^2 = 10(1,6) \rightarrow (y+1)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} y+1 = 4 \rightarrow y = 3 \\ y+1 = -4 \rightarrow y = -5 \end{cases}$$

۵۹. گزینه ۱ در معادله‌ی گسترده‌ی دایره ضرایب  $x^2$  ،  $y^2$  باهم برابر اند پس:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 - 6}{4} = \frac{-1}{2} < 0 \text{ امکان ندارد}$$

$$a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 + 6}{4} = \frac{5}{2} > 0$$

پس فقط  $a = -3$  قابل قبول است.

۶۰. گزینه ۲

$$4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0 \rightarrow 4y^2 + 2y - 5(x^2 - 4x) + 4 = 0$$

$$\rightarrow 4((y+1)^2 - 1) - 5((x-2)^2 - 4) + 4 = 0$$

$$\rightarrow 4(y+1)^2 - 5(x-2)^2 = -20 \xrightarrow{\div(-20)} \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ در نتیجه } b = \sqrt{5}, a = 2, W \begin{vmatrix} 2 : \alpha \\ -1 : \beta \end{vmatrix}$$

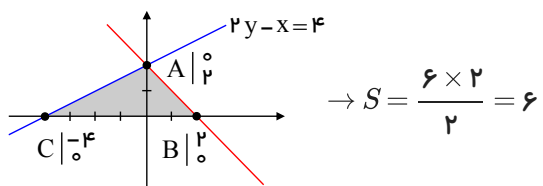
در هذلولی افقی است و مختصات کانون‌ها به صورت زیر است:

$$F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow F \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow F' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

۶۱. گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}, 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

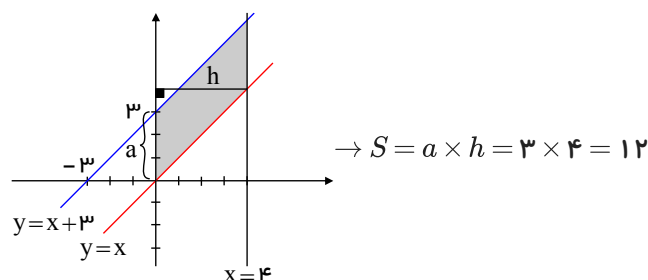
سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.



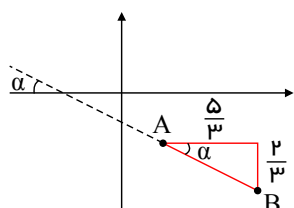
۶۲. **گزینه ۴** معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم  $y = x$  است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط، نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم  $(y = -x)$  را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  قطع می‌کند پس عرض آن  $y = -2$  است.

$$A \mid_{-2}, m=1 \rightarrow y - (-2) = 1(x - 2) \rightarrow y + 2 = x - 2 \rightarrow y - x = -4$$

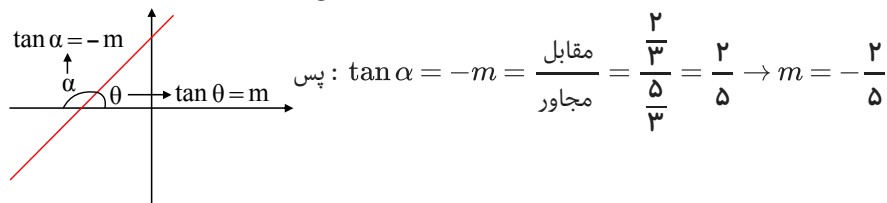
۶۳. گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.



۶۴. گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.

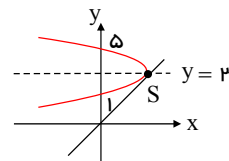


۶۵. گزینه ۱ معادله‌ی محور تقارن سهمی  $y = \frac{5+1}{2} = 3$  می‌باشد و باتوجه به این که محور تقارن از رأس سهمی می‌گذرد و با

توجه به این که رأس سهمی روی خط  $y = x$  است نتیجه می‌گیریم:  $S(3, 3)$  بنابراین معادله‌ی سهمی افقی منفی به صورت زیر است:

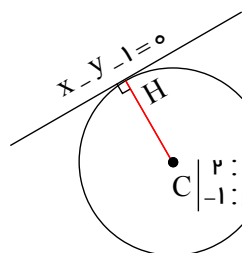
$$(y - \beta)^2 = -4p(x - \alpha) \rightarrow (y - 3)^2 = -4p(x - 3)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{صدق}} 4 = 12p \rightarrow p = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر  $2p$  یعنی  $\frac{2}{3}$  است.

۶۶. گزینه ۱



فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، نشان‌دهنده شعاع دایره می‌باشد.

$$R = CH = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + 1 = 2$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \mid_{\beta}^{\alpha}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.



$$kx^2 - 2y^2 + 4y = 4 \rightarrow kx^2 - 2(y^2 - 2y) = 4 \rightarrow kx^2 - 2((y-1)^2 - 1) = 4$$

$$\rightarrow kx^2 - 2(y-1)^2 = 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{kx^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{k}} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \rightarrow a^2 = \frac{2}{k}, b^2 = 1$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{2}{k}}} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{1 + \frac{k}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3 = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \frac{k}{2} = 2 \rightarrow k = 4$$

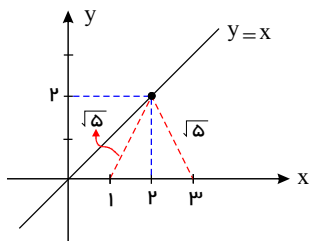
۶۸. گزینه ۳ چون مرکز دایره بر روی نیمساز ربع اول  $(y = x)$  قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت  $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$  است. و چون

دایره محور  $x$  ها را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۳ قطع کرده است، پس نقاط  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  روی دایره قرار دارند و فاصله‌ی هر کدام از این نقاط از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

$$R = AC = \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2}, \quad R = BC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + \alpha^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + \alpha^2} \rightarrow (1-\alpha)^2 + \alpha^2 = (3-\alpha)^2 + \alpha^2$$

$$\rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha = 9 + \alpha^2 - 6\alpha \rightarrow 4\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow R = BC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$



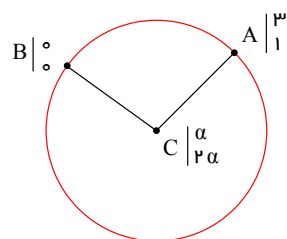
از روش شکل، مشخص است که مرکز دایره نقطه‌ی  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  بوده و شعاع دایره برابر  $\sqrt{5}$  است.

۶۹. گزینه ۴ شیب دو مجانب داده شده برابر  $\pm 2$  است و می‌دانیم که شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی، برابر  $\pm \frac{b}{a}$  است.

$$\pm \frac{b}{a} = \pm 2 \rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

۷۰. گزینه ۳ چون مرکز دایره روی خط به معادله‌ی  $y = 2x$  قرار دارد بنابراین می‌توان مرکز دایره را به صورت  $C \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$  در نظر گرفت.



$$R = AC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2}, \quad R = BC = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2}$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2} \xrightarrow{\text{توان}} (3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2 = 5\alpha^2$$

$$\rightarrow 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha = 5\alpha^2 \rightarrow 10\alpha = 10 \rightarrow \alpha = 1$$

$$R = AC \stackrel{\alpha=1}{=} \sqrt{4+5} = \sqrt{9}$$

۷۱. گزینه ۳ معادله ی بیضی را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$2x^2 + 4x + y^2 - 4y + 2 = 0 \rightarrow 2(x^2 + 2x) + y^2 - 4y + 2 = 0 \rightarrow 2((x+1)^2 - 1) + (y-2)^2 - 4 + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2(x+1)^2 - 2 + (y-2)^2 - 2 = 0 \rightarrow 2(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$\rightarrow \text{بیضی قائم } W \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right|_{\beta}^{\alpha}, \quad a = 2, \quad b = \sqrt{2}$$

$\rightarrow$  دورترین نقاط روی بیضی قائم از  $W$ ، نقاط  $A$  و  $A'$  هستند.



$$\rightarrow \begin{cases} A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta + a \end{matrix} \right| \rightarrow A \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \right| \\ A' \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta - a \end{matrix} \right| \rightarrow A' \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right| \end{cases}$$

۷۲. گزینه ۴

$$x + z = 9 \rightarrow x = 9 - z$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(9-z) + y - z = 4 \\ 9 - z + 2y + 3z = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 3z = -14 \\ y + z = 4 \end{cases} \rightarrow 4y = -8 \rightarrow y = -2$$

۷۳. گزینه ۲ معادله ی دایره در حالت استاندارد به صورت  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$  است، با داشتن مرکز و شعاع هر دو دایره، معادلات آن ها را می نویسیم.

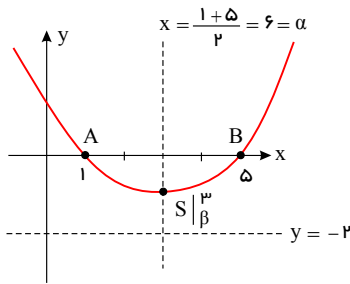
$$\begin{cases} C \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right| \rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y = 4 \\ R = 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} C' \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right| \rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = 4 \\ R' = 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

برای پیدا کردن معادله ی وتر مشترک بین دو دایره، کافی است که جملات از درجه ی دوم را بین آن ها حذف کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 6x = 2y \rightarrow y = 3x$$

۷۴. گزینه ۱ ابتدا شکل مسأله را ترسیم می کنیم:



معادله ی سهمی قائم مثبت:  $(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta) \rightarrow (x - 3)^2 = 4p(y - \beta)$

حال در معادله ی سهمی، نقطه ی  $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$  را صدق می دهیم.

$$(1 - 3)^2 = 4p(0 - \beta) \rightarrow 4 = -4p\beta \rightarrow p\beta = -1$$

$$y = \beta - p \rightarrow -2 = \beta - p \rightarrow p = \beta + 2 \xrightarrow{p\beta = -1} (\beta + 2)\beta = -1$$

$$\rightarrow \beta^2 + 2\beta + 1 = 0 \rightarrow (\beta + 1)^2 = 0 \rightarrow \beta = -1$$

۷۵. گزینه ۴ کسرها را دو بدو انتخاب کرده و طرفین وسطین می کنیم.

$$\frac{3x - y}{3} = \frac{5x + y}{1} = \frac{7x + y}{2} = \frac{x - 3y}{5}$$

$$\begin{cases} 15x + 3y = 3x - y \\ 10x + 2y = 7x + y \\ 35x + 5y = 2x - 6y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 4y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 33x + 11y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

دستگاه سه معادله دو مجهول داده شده تبدیل به یک معادله و دو مجهول شده است و می دانیم یک معادله و دو مجهول دارای بی شمار جواب است.

۷۶. گزینه ۴

$$y^2 - 6y + 2x + a = 0 \rightarrow (y - 3)^2 - 9 + 2x + a = 0 \rightarrow (y - 3)^2 = -2x + 9 - a$$

$$\rightarrow (y - 3)^2 = -2\left(x - \frac{9}{2} + \frac{a}{2}\right) \rightarrow S \left| \begin{smallmatrix} \frac{9}{2} - \frac{a}{2} \\ 3 \end{smallmatrix} \right. : \alpha, \quad 4p = 2 \rightarrow p = \frac{1}{2} : \beta$$

$$x = \alpha + p \rightarrow x = \frac{9}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow x = 5 - \frac{a}{2}$$

چون خط هادی از نقطه ی  $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right.$  می گذرد بنابراین داریم:

$$1 = 5 - \frac{a}{2} \rightarrow \frac{a}{2} = 4 \rightarrow a = 8$$

۷۷. گزینه ۲ سؤال، اندازه ی وتر کانونی  $(MN = \frac{2b^2}{a})$  را خواسته است.

$$16y^2 + 5x^2 - 10x = 75 \rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x) = 75 \rightarrow 16y^2 + 5((x - 1)^2 - 1) = 75$$

$$\rightarrow 16y^2 + 5(x - 1)^2 = 80 \rightarrow \frac{y^2}{5} + \frac{(x - 1)^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}$$

$$MN=\frac{rb^r}{a}=\frac{r(\delta)}{r}=\frac{\delta}{r}=r_{/\delta}$$

۷۸. گزینه ۲ چون محور تقارن سهمی موازی محور طول است پس سهمی افقی است. سهمی از نقطه‌ی  $\left| \begin{smallmatrix} ۵ \\ ۹ \end{smallmatrix} \right|$  می‌گذرد باتوجه به رأس

سهمی که  $\left| \begin{smallmatrix} -۱ \\ ۳ \end{smallmatrix} \right|$  می‌باشد سهمی مثبت است.

$$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha) \xrightarrow{\left| \begin{smallmatrix} -۱:\alpha \\ ۳:\beta \end{smallmatrix} \right|} (y-۳)^2 = 4p(x+۱) \xrightarrow{\left| \begin{smallmatrix} ۵ \\ ۹ \end{smallmatrix} \right| \text{ صدق}} (۹-۳)^2 = 4p(۵+۱)$$

$$\rightarrow ۳۶ = ۲۴p \rightarrow p = \frac{۳۶}{۲۴} = \frac{۳}{۲}$$

فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر  $۲p$  یعنی  $۳$  است.  $۲\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۳$

۷۹. گزینه ۲

سهمی مثبت  $x_F > x_H \rightarrow$  و سهمی افقی  $x_H = -۴ \rightarrow$

مختصات کانون  $F \left| \begin{smallmatrix} \alpha+p=۲ \\ \beta=۳ \end{smallmatrix} \right|$  ، معادله‌ی خط هادی  $x = \alpha - p \rightarrow -۴ = \alpha - p$

$$\begin{cases} \alpha + p = ۲ \\ \alpha - p = -۴ \end{cases} \rightarrow \alpha = -۱, p = ۳$$

معادله‌ی سهمی افقی مثبت  $(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha) \rightarrow (y-۳)^2 = ۱۲(x+۱) \xrightarrow{y=۰} ۹ = ۱۲x+۱۲$

$$\rightarrow ۱۲x = -۳ \rightarrow x = -\frac{۳}{۱۲} = -\frac{۱}{۴}$$

۸۰. گزینه ۱ کانون‌ها  $F \left| \begin{smallmatrix} ۱ \\ -۱ \end{smallmatrix} \right|$  و  $F' \left| \begin{smallmatrix} ۱ \\ -۱ \end{smallmatrix} \right|$  هستند.

$$x_F = x_{F'} \rightarrow \text{وسط } FF' \text{ و بیضی قائم } W \left| \begin{smallmatrix} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ : \alpha \\ \frac{-۱+۱}{۲} = ۰ : \beta \end{smallmatrix} \right|, FF' = ۲c \rightarrow ۲c = ۲ \rightarrow c = ۱$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{a} \rightarrow a = ۲, c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow ۱ = ۴ - b^2 \rightarrow b^2 = ۳$$

$$\text{معادله‌ی بیضی قائم: } \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = ۱ \rightarrow \frac{(x-۱)^2}{۳} + \frac{y^2}{۴} = ۱ \xrightarrow{y=۲x} \frac{(x-۱)^2}{۳} + \frac{۴x^2}{۴} = ۱$$

$$\rightarrow \frac{(x-۱)^2}{۳} + x^2 = ۱ \xrightarrow{\times ۳} x^2 + ۱ - ۲x + ۳x^2 = ۳ \rightarrow ۴x^2 - ۲x - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۸۱. گزینه ۱ خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد.

$$f'_x = ۰ \rightarrow ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱, f'_y = ۰ \rightarrow ۲y + ۱ = ۰ \rightarrow y = -\frac{۱}{۲}$$

اکنون کافی است که مختصات مرکز دایره  $C \left| \begin{smallmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \end{smallmatrix} \right|$  را در خط به معادله‌ی  $۳x + ۲y = a$  صدق دهیم.

$$۳(۱) + ۲\left(-\frac{۱}{۲}\right) = a \rightarrow ۳ - ۱ = a \rightarrow a = ۲$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 2 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow C' \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$R'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{16 + 4 + 16}{4} = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow R' = 3$$

می‌دانیم قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مرکز دایره‌ی  $C$  نقطه‌ی  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  است.

$$CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(8-2)^2 + (7+1)^2} = R + 3 \rightarrow \sqrt{36 + 64} = R + 3$$

$$\rightarrow 10 = R + 3 \rightarrow R = 7$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۴۳۵۱۴۷

۴-۵	۴-۴	۱-۳	۱-۲	۱-۱
۲-۱۰	۳-۹	۳-۸	۲-۷	۴-۶
۲-۱۵	۱-۱۴	۴-۱۳	۲-۱۲	۳-۱۱
۱-۲۰	۲-۱۹	۱-۱۸	۱-۱۷	۳-۱۶
۱-۲۵	۱-۲۴	۲-۲۳	۲-۲۲	۳-۲۱
۳-۳۰	۴-۲۹	۲-۲۸	۴-۲۷	۱-۲۶
۳-۳۵	۱-۳۴	۲-۳۳	۲-۳۲	۱-۳۱
۳-۴۰	۱-۳۹	۳-۳۸	۳-۳۷	۳-۳۶
۳-۴۵	۳-۴۴	۳-۴۳	۲-۴۲	۳-۴۱
۴-۵۰	۲-۴۹	۳-۴۸	۱-۴۷	۲-۴۶
۴-۵۵	۱-۵۴	۳-۵۳	۱-۵۲	۳-۵۱
۲-۶۰	۱-۵۹	۲-۵۸	۱-۵۷	۲-۵۶
۱-۶۵	۳-۶۴	۲-۶۳	۴-۶۲	۲-۶۱
۳-۷۰	۴-۶۹	۳-۶۸	۴-۶۷	۱-۶۶
۴-۷۵	۱-۷۴	۲-۷۳	۴-۷۲	۳-۷۱
۱-۸۰	۲-۷۹	۲-۷۸	۲-۷۷	۴-۷۶
			۲-۸۲	۱-۸۱