



گروه مشاوره
خاکسار

وقت : دقیقه

تاریخ :

تعداد سوالات: ۶۱

نام و نام خانوادگی :

موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پای (۴) تابع ترکیب توابع و دامنه ترکیب توابع × دنباله ها × توابع نمایی، لگاریتم و عدد نپرتابع نمایی، عدد نپرت و لگاریتم طبیعی × مثلثات معادلات

مثلثاتی × احتمال

۱. دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

$$\frac{2}{9} \quad (1) \quad \frac{5}{18} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{5}{12} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-آسان

۲. در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی شوند؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۳. اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و g ، با کدام طول متقاطع اند؟

$$-1 \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۴. در جعبه‌ای ۶ مهره ی سفید و ۹ مهره ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای گذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره ی خارج شده سفید است؟

$$\frac{5}{14} \quad (1) \quad \frac{3}{7} \quad (2) \quad \frac{2}{5} \quad (3) \quad \frac{3}{5} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۵. دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟

$$\frac{1}{256} \quad (1) \quad \frac{5}{128} \quad (2) \quad \frac{3}{64} \quad (3) \quad \frac{7}{64} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۶. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^2 \frac{5\pi}{4} x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۷. ظرف A دارای ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره ی سفید و ۳ مهره ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده، سفید است؟

$$\frac{25}{63} \quad (1) \quad \frac{26}{63} \quad (2) \quad \frac{10}{21} \quad (3) \quad \frac{11}{21} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۸. احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر ۲٪ است. اگر ۵ نفر مستعد، با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند. با کدام احتمال ۳ نفر آنان مبتلا می شوند؟

$$\frac{1}{256} \quad (1) \quad \frac{5}{128} \quad (2) \quad \frac{3}{64} \quad (3) \quad \frac{7}{64} \quad (4)$$

-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۹. در معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموعه تمام جواب‌ها در بازه‌ی $[0, \pi]$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{3\pi}{4} \quad (2) \frac{5\pi}{4} \quad (3) \frac{3\pi}{2} \quad (4) \frac{7\pi}{4}$$

-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۱۰. در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

$$(1) \frac{31}{168} \quad (2) \frac{11}{56} \quad (3) \frac{17}{84} \quad (4) \frac{13}{56}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۱۱. در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم رنگ اند؟

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{3}{14} \quad (3) \frac{2}{9} \quad (4) \frac{5}{14}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-آسان

۱۲. در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نیستند؟

$$(1) \frac{28}{45} \quad (2) \frac{29}{45} \quad (3) \frac{31}{45} \quad (4) \frac{32}{45}$$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۱۳. اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$(1) [-4, 2] \quad (2) [-2, 0] \quad (3) [-4, -1] \cup (1, 2] \quad (4) [-4, -2) \cup (0, 2]$$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۱۴. در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند، می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

$$(1) \frac{8}{27} \quad (2) \frac{10}{27} \quad (3) \frac{11}{27} \quad (4) \frac{13}{27}$$

-سراسری-۱۳۹۴-سخت

۱۵. دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{7+4^{n-1}}{2+4^n}$ ، چگونه است؟

$$(1) \text{بی کران- صعودی} \quad (2) \text{بی کران- نزولی} \quad (3) \text{کراندار- صعودی} \quad (4) \text{کراندار- نزولی}$$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۱۶. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟

$$(1) x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (2) x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (3) x = k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (4) x = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۱۷. در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی، خارج می‌شود؟

$$(1) \frac{31}{42} \quad (2) \frac{37}{42} \quad (3) \frac{67}{84} \quad (4) \frac{73}{84}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۱۸. شصت درصد از کارکنان سازمانی، مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

- (۱) $\frac{۱۸۹}{۱۰۰}$ (۲) $\frac{۱۹۲}{۱۰۰}$ (۳) $\frac{۱۹۶}{۱۰۰}$ (۴) $\frac{۱۹۸}{۱۰۰}$

-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۱۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(۳) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۲۰. در جعبه‌ای ۷ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره‌ی قرمز و حداقل ۲ مهره‌ی سفید، خارج شده است؟

- (۱) $\frac{30}{91}$ (۲) $\frac{25}{77}$ (۳) $\frac{40}{143}$ (۴) $\frac{50}{143}$

-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۱. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۲. در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند. اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

- (۱) $\frac{96}{625}$ (۲) $\frac{114}{625}$ (۳) $\frac{122}{625}$ (۴) $\frac{128}{625}$

-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۳. دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1 + 3^n}{5 + 3^{n-1}}$ چگونه است؟

- (۱) بی کران- صعودی (۲) کراندار- صعودی (۳) کراندار- نزولی (۴) بی کران- نزولی

-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۴. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۵. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ ، کدام است؟

- (۱) $x = \frac{k\pi}{2}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۲۶. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ ، به کدام صورت است؟

$$(1) \quad x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۲۷. در یک دنباله‌ی اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله‌ی هشتم این دنباله، کدام است؟

$$(1) \quad 127 \quad (2) \quad 159 \quad (3) \quad 247 \quad (4) \quad 255$$

سراسری-۱۳۹۵-آسان

۲۸. هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

$$(1) \quad \frac{3}{10} \quad (2) \quad \frac{4}{10} \quad (3) \quad \frac{5}{10} \quad (4) \quad \frac{6}{10}$$

سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۲۹. احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $\frac{9}{10}$ و برای شخص B برابر $\frac{8}{10}$ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

$$(1) \quad \frac{92}{100} \quad (2) \quad \frac{94}{100} \quad (3) \quad \frac{96}{100} \quad (4) \quad \frac{98}{100}$$

سراسری-۱۳۹۵-آسان

۳۰. آزمایشی فقط دو نتیجه دارد. احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چند برابر

احتمال ۳ پیروزی است؟

$$(1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4) \quad \frac{9}{4}$$

سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۳۱. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

$$(1) \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (4) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۳۲. در یک دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

$$(1) \quad 32 \quad (2) \quad 48 \quad (3) \quad 56 \quad (4) \quad 64$$

خارج از کشور-۱۳۹۵-آسان

۳۳. دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

$$(1) \quad \frac{2}{9} \quad (2) \quad \frac{5}{18} \quad (3) \quad \frac{7}{18} \quad (4) \quad \frac{4}{9}$$

خارج از کشور-۱۳۹۵-آسان

۳۴. اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

$$(1) \quad 2x^2 + 3x + 1 \quad (2) \quad 2x^2 - 2x + 3 \quad (3) \quad 2x^2 - x + 4 \quad (4) \quad 2x^2 + x + 3$$

خارج از کشور-۱۳۹۵-متوسط

۳۵. در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

$$(1) \quad \frac{8}{21} \quad (2) \quad \frac{17}{42} \quad (3) \quad \frac{10}{21} \quad (4) \quad \frac{9}{14}$$

خارج از کشور-۱۳۹۵-آسان

۳۶. احتمال جوانه زدن هر دانه‌ی نوعی بذر $\frac{2}{3}$ است. اگر ۴ دانه از این بذر در شرایط یکسان کاشته شوند، با کدام احتمال حداقل سه دانه، جوانه می‌زند؟

$$(1) \frac{44}{81} \quad (2) \frac{15}{27} \quad (3) \frac{46}{81} \quad (4) \frac{16}{27}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۵-متوسط

۳۷. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1}{4} = \cos(x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، کدام است؟

$$(1) x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۵-متوسط

۳۸. چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

$$(1) \frac{19}{48} \quad (2) \frac{41}{96} \quad (3) \frac{23}{48} \quad (4) \frac{55}{96}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۳۹. اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$(1) -\frac{1}{4} \sin^2 2x \quad (2) -\frac{1}{2} \sin^2 2x \quad (3) \frac{1}{4} \cos^2 2x \quad (4) \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۴۰. دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟

$$(1) \frac{2048}{7} \quad (2) \frac{4096}{7} \quad (3) \frac{512}{7} \quad (4) \frac{7144}{7}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۴۱. مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$(1) 8\pi \quad (2) 9\pi \quad (3) 10\pi \quad (4) 11\pi$$

-خارج از کشور-۱۳۹۲-سخت

۴۲. در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

$$(1) \frac{5}{22} \quad (2) \frac{3}{11} \quad (3) \frac{7}{22} \quad (4) \frac{4}{11}$$

-سراسری-۱۳۹۶-آسان

۴۳. اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$(1) x-1 \quad (2) x+1 \quad (3) x \quad (4) 2x$$

-سراسری-۱۳۹۶-آسان

۴۴. در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

$$(1) ۱۵٫۲ \quad (2) ۱۵٫۶ \quad (3) ۱۵٫۸ \quad (4) ۱۶٫۲$$

-سراسری-۱۳۹۶-آسان

۴۵. دانش‌آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

$$(1) \frac{135}{1024} \quad (2) \frac{135}{512} \quad (3) \frac{45}{512} \quad (4) \frac{27}{512}$$

-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۴۶. کوچکترین کران بالای دنباله $a_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + n}$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{7}{6} \quad (2) \frac{13}{10} \quad (3) \frac{4}{3} \quad (4) \frac{3}{2}$$

-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۴۷. از دو معادله $Ln(2x+1) + Ln(y-2) - Lny = Ln3$ و $Ln(2y-3x) + Ln2 = 0$ ، مقدار xy ، کدام است؟

$$(1) 6 \quad (2) 8 \quad (3) 9 \quad (4) 10$$

-سراسری-۱۳۹۶-سخت

۴۸. جواب کلی معادله $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$$(1) x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3) x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۴۹. در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

$$(1) \frac{41}{120} \quad (2) \frac{37}{60} \quad (3) \frac{79}{120} \quad (4) \frac{31}{60}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-آسان

۵۰. اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$(1) x \quad (2) -x \quad (3) -x-1 \quad (4) x+1$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-آسان

۵۱. احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۸۴٪ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۷۵٪ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

$$(1) ۰٫۹۲ \quad (2) ۰٫۹۴ \quad (3) ۰٫۹۶ \quad (4) ۰٫۹۸$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-آسان

۵۲. می‌دانیم احتمال مغلوب بودن رنگ چشم $\frac{1}{4}$ برای هر فرزند، ثابت است. در خانواده‌ی ۴ فرزند، با کدام احتمال رنگ چشم ۳ فرزند آن‌ها مغلوب است؟

$$(1) \frac{3}{64} \quad (2) \frac{3}{32} \quad (3) \frac{9}{64} \quad (4) \frac{27}{256}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-آسان

۵۳. کدام یک از دنباله‌های زیر، کراندار و صعودی است؟

$$(1) c_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (2) d_n = \frac{n^2}{2^n} \quad (3) a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} \quad (4) b_n = \frac{3n^2 + 1}{5n + 9}$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۵۴. از دو معادله $Ln(x-4y) = 2Ln2$ و $Ln(y+x-1) + Ln(2y+3) = 0$ ، مقدار xy ، کدام است؟

$$(1) -2 \quad (2) -1 \quad (3) 1 \quad (4) 2$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-سخت

۵۵. مجموع جواب‌های معادله $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{14\pi}{3} \quad (2) 4\pi \quad (3) \frac{9\pi}{2} \quad (4) 5\pi$$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۵۶. اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

-سراسری-۱۳۹۶-سخت

۵۷. دنباله‌ی $\left\{ \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ ، چگونه است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) همگرا به -1 (۲) همگرا به صفر (۳) نزولی - کراندار (۴) واگرا

-سراسری-۱۳۹۶-آسان

۵۸. دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۵۹. اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-سخت

۶۰. یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه‌ی «رو» ظاهر شده است؟

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{11}{12}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۶۱. در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج شده است. از ۵ مهره‌ی باقی‌مانده

یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{12}{35}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{16}{35}$ (۴) $\frac{4}{7}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶-آسان



گروه مشاوره
خاکسار

وقت : دقیقه

تاریخ :

تعداد سوالات: ۶۱

نام و نام خانوادگی :

موضوع ریاضی عمومی پیش دانشگاهی و پایه (۴) تابع ترکیب توابع و دامنه ترکیب توابع × دنباله ها × توابع نمایی، لگاریتم و عدد نبر: توابع نمایی، عدد نبر و لگاریتم طبیعی × مثلثات: معادلات

مثلثاتی «احتمال»

۱. گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ 8 \Rightarrow (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) \\ 12 \Rightarrow (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

۲. گزینه ۱

روش اول:

$$P(\text{اولی فرد}) \times P(\text{دومی زوج}) \times P(\text{سومی فرد}) \times P(\text{چهارمی زوج}) \times P(\text{پنجمی فرد}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

روش دوم:

$$n(S) = 5!$$

$$n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جابجایی مهره های زوج}} \underbrace{2!}_{\text{جابجایی مهره های فرد}} \rightarrow \text{ف ز ف ز ف ز}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3!2!}{5!} = \frac{1}{10} \text{ است.}$$

۳. گزینه ۲

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (2(x+2) - 3)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = (2x-3)^2 \Rightarrow f(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۴. گزینه ۳ روش اول:

(اولی سیاه و دومی سفید) P یا (اولی سفید و دومی سفید) P

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14} \right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14} \right) = \frac{30 + 54}{15 \times 14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

روش دوم: چون نمی دانیم مهره ی اول خارج شده چه رنگی است فرض می کنیم اصلاً مهره های خارج نشده است پس احتمال سفید بودن

$$\text{می شود } \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۵. گزینه ۲ در این مسأله، پیروزی یعنی پاسخ صحیح دادن

$$\begin{cases} n=5 \\ k=3 \\ p=\frac{1}{5}=\frac{2}{10} \end{cases} \Rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^2 = (10) \left(\frac{8}{1000}\right) \left(\frac{64}{100}\right) = \frac{512}{10000} = 0.0512$$

۶. گزینه ۴

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad \text{می دانیم}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۷. گزینه ۱

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \swarrow \\ \text{A ظرف} \xrightarrow{\text{۴ سفید و ۵ سیاه}} \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{60}{126} \\ \frac{1}{3} \rightarrow \\ \text{B ظرف} \xrightarrow{\text{۶ سفید و ۳ سیاه}} \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{45}{126} \\ \frac{1}{3} \searrow \\ \text{C ظرف} \xrightarrow{\text{۶ سفید و ۳ سیاه}} \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{45}{126} \end{array}$$

$$\text{احتمال} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{60}{126}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{45}{126}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{45}{126}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{150}{126}\right) = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

۸. گزینه ۲

در این مسأله، پیروزی یعنی مبتلا شدن

$$\begin{cases} n=5 \\ k=3 \\ p=\frac{2}{10} \end{cases} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^2 = (10) \left(\frac{8}{1000}\right) \left(\frac{64}{100}\right) = \frac{512}{10000} = 0.0512$$

۹. گزینه ۲

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x) \Rightarrow \sin 2x \sin x + \sin 2x \cos x$$

$$= \cos 2x \cos x - \cos 2x \sin x \Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$\Rightarrow \sin(2x+x) = \cos(2x+x) \Rightarrow \sin 3x = \cos 3x \xrightarrow{\div \cos 3x} \tan 3x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$

$$\rightarrow \text{جمع ریشه ها} = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

۱۰. گزینه ۱

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \text{ جعبه ی اول} &\rightarrow \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} \text{ جعبه ی دوم} &\rightarrow \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{24} = \frac{31}{168}$$

۱۱. گزینه ۱

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

مهره‌های خارج شده هم‌رنگ باشند یعنی هر ۳ سفید یا هر ۳ سیاه باشند.

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6} \text{ است.}$$

۱۲. گزینه ۳

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

برای هم‌رنگ نبودن دو مهره یکی از حالت‌های زیر باید اتفاق بیفتد

$$\left. \begin{aligned} \text{یکی سفید و یکی سیاه} & \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6 \\ \text{یکی سفید و یکی قرمز} & \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15 \\ \text{یکی سیاه و یکی قرمز} & \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 2 \times 5 = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 6 + 15 + 10 = 31$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{31}{45} \text{ است.}$$

۱۳. گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g , f را به دست می‌آوریم:

$$Df: 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$Dg: x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$\begin{aligned} Dfog &= \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\} \\ &= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x \leq 2^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x - 8 \leq 0\} \\ &= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, -4 \leq x \leq 2\} \\ &= 4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4, -2) \cup (0, 2] \end{aligned}$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

۱- $x = -1$ در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x = -1$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۱۴. گزینه ۲ در یک بار پرتاب تاس احتمال زوج آمدن $\frac{3}{6}$ و احتمال فرد آمدن نیز $\frac{3}{6}$ است.

$$\begin{aligned} \text{زوج} \quad \frac{1}{2} &\xrightarrow{n=4, k=2, p=\frac{1}{2}} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{24}{16} = \frac{3}{4} \\ \text{فرد} \quad \frac{1}{2} &\xrightarrow{n=3, k=2, p=\frac{1}{2}} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{12}{24} \end{aligned}$$

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{12}{24}\right) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

۱۵. گزینه ۴

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 + 4^{n-1}}{2 + 4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n-1}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \times 4^{-1}}{4^n} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

چون دنباله همگراست پس حتماً کراندار می‌باشد.

چون در گزینه‌ها فقط لفظ صعودی یا نزولی آمده است کافی است جمله‌ی اول دنباله را با حد دنباله مقایسه کنیم.

$$a_1 = \frac{7 + 4^0}{2 + 4^0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\underbrace{\frac{4}{3}}_{\text{جمله اول}}, \dots, \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{جمله آخر}} \rightarrow \text{دنباله نزولی است}$$

۱۶. گزینه ۱

$$\boxed{2 \sin a \cos a = \sin 2a, \quad \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x &= 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x \\ \rightarrow 2 \sin x \cos x &= -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \end{aligned}$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

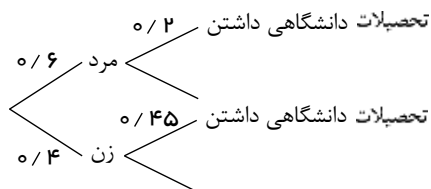
۱۷. گزینه ۲

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

حداقل یک مهره‌ی آبی خارج شود متمم آن است که اصلاً مهره‌ی آبی خارج نشده باشد یعنی ۳ مهره‌ی خارج شده از بین ۵ مهره‌ی قرمز و سفید باشد.

$$P(\text{حداقل یک مهره آبی}) = 1 - P(\text{هیچ کدام از مهره‌ها آبی نباشند}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{84} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$$

گزینه ۱۸



$$\rightarrow p(\text{تحصیلات دانشگاهی داشتن}) = \left(\frac{6}{10} \times \frac{2}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{45}{100}\right) = \frac{12}{100} + \frac{180}{1000} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

در این مسئله، پیروزی یعنی تحصیلات دانشگاهی داشتن

$$\begin{cases} n=3 \\ k=2 \\ p=\frac{3}{10} \end{cases} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right) = 3 \times \frac{9}{100} \times \frac{7}{10} = 0.189$$

گزینه ۱۹

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+x \rightarrow 2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi \\ 3x=2k\pi+\pi-x \rightarrow 4x=2k\pi+\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ می‌باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

گزینه ۲۰

$$\iota(S) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{24 \times 10!} = 1001$$

$$\begin{cases} \text{یک قرمز} \rightarrow \binom{2}{1} = 2 \\ \text{سه سفید یا دو سفید و یک سیاه} \rightarrow \binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{7}{3} = 105 + 35 = 140 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 2 \times 140 = 280$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{280}{1001} = \frac{40}{143} \text{ می‌باشد.}$$

گزینه ۲۱ ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع f و g را به دست می‌آوریم.

$$Df: -x^2 + x + 2 > 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2$$

$$Dg: R$$

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in R, \left(\frac{1}{4}\right)^x \in (-1, 2)\}$$

$$= \{x \in R, \underbrace{-1 < 2^{-2x}}_{\text{همواره برقرار است}} < 2\} = \{x \in R, 2^{-2x} < 2^1\} = \{x \in R, -2x < 1\}$$

$$= \{x \in R, x > -\frac{1}{2}\} = x > -\frac{1}{2} \rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

۲۲. گزینه ۲

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2} & \text{رو} & n=5, k=1, p=\frac{3}{5} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{48}{625} \\ & & \\ \frac{1}{2} & \text{پشت} & n=3, k=1, p=\frac{3}{5} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125} \end{array}$$

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{48}{625}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{36}{125}\right) = \frac{24}{625} + \frac{18}{125} = \frac{114}{625}$$

۲۳. گزینه ۲

چون دنباله همگرا است پس حتماً کراندار می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^n}{5+3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n \times 3^{-1}} = 3 \rightarrow$$

چون در گزینه‌ها فقط لفظ صعودی یا نزولی آمده است کافی است جمله اول دنباله را با حد دنباله مقایسه کنیم.

$$a_1 = \frac{1+3}{5+3^0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{جمله اول}}, \dots, \underbrace{3}_{\text{جمله آخر}} \rightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

۲۴. گزینه ۱

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow 3x=2k\pi+\pi-x \rightarrow 4x=2k\pi+\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi-\alpha \rightarrow 3x=2k\pi-\pi+x \rightarrow 2x=2k\pi-\pi \rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ قابل قبول است.

۲۵. گزینه ۲

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \sin 2a = 2 \sin a \cos a} \text{ می‌دانیم}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} &= \frac{\sin(x+2x)}{\sin x} = \frac{\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x}{\sin x} = \frac{\sin x \cos 2x}{\sin x} + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos^2 x \\ \Rightarrow \cos 2x + 2 \cos^2 x &= 2 \cos^2 x \Rightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=k\pi+\frac{\pi}{2}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

۲۶. گزینه ۲

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}} \text{ می‌دانیم}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} &= \tan 3x \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \\ \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 3x &= k\pi + \frac{\pi}{4} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

۲۷. گزینه ۴ روش اول:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2) \\
n=2 &\rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 \\
n=3 &\rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 \\
n=4 &\rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 \\
n=5 &\rightarrow a_5 = 2a_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31 \\
n=6 &\rightarrow a_6 = 2a_5 + 1 = 2(31) + 1 = 63 \\
n=7 &\rightarrow a_7 = 2a_6 + 1 = 2(63) + 1 = 127 \\
n=8 &\rightarrow a_8 = 2a_7 + 1 = 2(127) + 1 = 255
\end{aligned}$$

روش دوم: رابطه‌ی $a_n = 2a_{n-1} + 1$ یعنی هر جمله‌ی دنباله (از جمله‌ی اول به بعد) از دو برابر جمله‌ی قبلی، یک واحد بیشتر است. یعنی: $1, 3, 7, 15, \dots$ به عبارت دیگر هر جمله‌ی دنباله، از الگوی $a_n = 2^n - 1$ پیروی می‌کند پس:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

۲۸. گزینه ۲

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60 \rightarrow n(s) = 60$$

برای آنکه عدد رو شده، مضرب ۳ باشد، باید مجموع ارقامش باید بر ۳ بخش پذیر باشد که شامل دسته‌بندی‌های زیر باشد.

$$\left. \begin{aligned}
1, 2, 3 &\rightarrow 3! = 6 \\
1, 3, 5 &\rightarrow 3! = 6 \\
2, 3, 4 &\rightarrow 3! = 6 \\
3, 4, 5 &\rightarrow 3! = 6
\end{aligned} \right\} \rightarrow n(A) = 4 \times 6 = 24$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

۲۹. گزینه ۴ روش اول:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B مستقل هستند

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0.9 + 0.8 - \underbrace{(0.9)(0.8)}_{0.72} = 0.98$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}
P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
&= 1 - P(A') \cdot P(B') = 1 - (0.1)(0.2) = 1 - 0.02 = 0.98
\end{aligned}$$

۳۰. گزینه ۴ با توجه به فرمول $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ داریم:

$$\frac{P(\text{۴ بار پیروزی})}{P(\text{۳ بار پیروزی})} = \frac{\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{(15) \left(\frac{3}{4}\right)}{(20) \left(\frac{1}{4}\right)} = 3 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

۳۱. گزینه ۱

$$\sin^2 x + 3 \cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = A \rightarrow 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \\ \cos x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۳۲. گزینه ۴

$$\begin{aligned}
 n = 2 &\rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4 \\
 n = 3 &\rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 = 2(4) - 2 = 6 \\
 n = 4 &\rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 = 2(6) - 2 = 10 \\
 n = 5 &\rightarrow a_5 = 2a_4 - 2 = 2(10) - 2 = 18 \\
 n = 6 &\rightarrow a_6 = 2a_5 - 2 = 2(18) - 2 = 34 \\
 n = 7 &\rightarrow a_7 = 2a_6 - 2 = 2(34) - 2 = 66 \\
 n = 8 &\rightarrow a_8 = 2a_7 - 2 = 2(66) - 2 = 130 \\
 \text{پس: } a_8 - a_7 &= 130 - 66 = 64
 \end{aligned}$$

۳۳. گزینه ۲

$$\begin{aligned}
 n(S) &= 6^2 = 36 \\
 A &= \left\{ (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(5, 6) \right. \\
 &\quad \left. (2, 1)(3, 2)(4, 3)(5, 4)(6, 5) \right\} \rightarrow n(A) = 10
 \end{aligned}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ است.}$$

۳۴. گزینه ۳ روش اول:

$$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $2x+1$ را مساوی t قرار دهیم.

$$\begin{aligned}
 2x+1 &= t \rightarrow 2x = t-1 \rightarrow x = \frac{t-1}{2} \\
 \text{پس: } f(t) &= 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2 + 1 - 2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5 \\
 &\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4 \\
 &\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4
 \end{aligned}$$

روش دوم: $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می دهیم:

$$x = 0 \rightarrow f(1) = 5$$

گزینه ای درست است که اگر در آن $x = 1$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه ی سوم است.

۳۵. گزینه ۳

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

یکی از مهره ها باید سفید باشد و دو مهره ی دیگر باید از بین ۵ مهره ی قرمز و سیاه باشد.

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{40}{84} = \frac{10}{21} \text{ است.}$$

۳۶. گزینه ۴ در این مسأله، پیروزی یعنی جوانه زدن. و دقت کنید که حداقل سه دانه جوانه بزنند یعنی سه دانه یا چهار دانه جوانه بزنند.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} n = 4 \\ k = 3 \text{ یا } 4 \\ p = \frac{2}{3} \end{cases} &\rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\
 &= \binom{4}{3} \left(\frac{8}{27}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{4}{4} \left(\frac{16}{81}\right) (1) = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}
 \end{aligned}$$

۳۷. گزینه ۱

$$\boxed{\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 x + \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

توجه کنید که: $\cos^2 x = \cos^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

۳۸. گزینه ۲

P (ماه تولد هر چهار نفر، متفاوت باشد) $1 - P$ (ماه تولد حداقل دو نفر از چهار نفر یکسان باشد)

$$= 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4} = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

$$\boxed{1 - \sin^2 a = \cos^2 a, \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a} \quad \text{می دانیم:} \quad ۳۹. \text{گزینه ۱}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sin^4 x) = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x \\ &= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= -(\sin x \cdot \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

۴۰. گزینه ۲ در این مسأله، پیروزی یعنی پاسخ صحیح دادن

$$\begin{cases} n=5 \\ k=1 \\ p=\frac{1}{5}=\frac{2}{10} \end{cases} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^4 = (5) \left(\frac{2}{10}\right) \left(\frac{4096}{10000}\right) = 0,4096$$

۴۱. گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 5x=2k\pi-4x \rightarrow 9x=2k\pi \rightarrow x=\frac{2k\pi}{9} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} 5x=2k\pi+\pi+4x \rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \pi \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 0 & 1 \\ \hline x & \pi & 2\pi \end{array}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \dots + 18\pi}{9} + \underbrace{\pi}_{\text{جدول پایین}}$$

$$= \frac{(2+4+6+\dots+18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ است روی همین اصل داریم:

$$2+4+6+\dots+18 = 9(9+1) = 90$$

۴۲. گزینه ۲

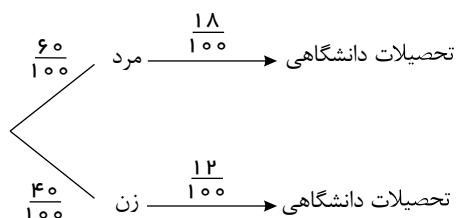
$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220.$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک سفید}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یک سیاه}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک آبی}} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

پس $P(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$ است.
گزینه ۴

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

گزینه ۲



$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{6}{10} \times \frac{18}{100}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{12}{100}\right) = \frac{108 + 48}{1000} = \frac{156}{1000} = 15,6\%$$

گزینه ۱ در این مسأله، پیروزی یعنی پاسخ درست دادن

$$\begin{cases} n=6 \\ k=3 \\ p=\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = (20) \left(\frac{1}{64}\right) \left(\frac{27}{64}\right) = \frac{5 \times 27}{16 \times 64} = \frac{135}{1024}$$

گزینه ۴ حد این دنباله برابر $\frac{3}{2}$ است و جمله‌ی اول این دنباله برابر $a_1 = \frac{4}{3}$ است و با توجه به

گزینه‌های داده شده، کوچکترین کران بالای دنباله برابر $\frac{3}{2}$ است.

گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{Lna + Lnb = Lnab, \quad Ln\frac{a}{b} = Lna - Lnb}$

$$\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3 \rightarrow \ln \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = \ln 3 \rightarrow \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = 3$$

$$\rightarrow 2xy - 4x + y - 2 = 3y \rightarrow 2xy = 4x + 2y + 2(I)$$

$$\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0 \rightarrow \ln(4y-6x) = 0 \xrightarrow{\ln 1 = 0} 4y - 6x = 1$$

$$\rightarrow 4y = 1 + 6x \rightarrow y = \frac{1+6x}{4}$$

$$I: 2x\left(\frac{1+6x}{4}\right) = 4x + 2\left(\frac{1+6x}{4}\right) + 2 \rightarrow \frac{x+6x^2}{2} = 4x + \frac{1+6x}{2} + 2$$

$$\times 2 \rightarrow x + 6x^2 = 8x + 1 + 6x + 4 \rightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 169 + 120 = 289 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+17}{12} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{13-17}{12} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{5}{2} \xrightarrow{y = \frac{1+6x}{4}} y = \frac{1+15}{4} = 4 \rightarrow xy = \left(\frac{5}{2}\right)(4) = 10$$

به ازای $x = -\frac{1}{3}$ مقدار y منفی می شود که قابل قبول نمی باشد.

$$\boxed{1 + \cos 2a = 2\cos^2 a} \text{ می دانیم: } \text{۴۸. گزینه ۳}$$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۴۹. گزینه ۳

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو سفید}} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یکی از بقیه ی رنگ ها}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دو سیاه}} + \underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{یکی از بقیه ی رنگ ها}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{دو قرمز}} + \underbrace{\binom{8}{1}}_{\text{یکی از بقیه ی رنگ ها}} = 50 + 21 + 8 = 79$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{79}{120} \text{ است.}$$

۵۰. گزینه ۳ روش اول:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{-7x-7}{7} = \frac{7(-x-1)}{7} = -x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را انتخاب می کنیم.

$$g(f(1)) = g(5) = \frac{1-15}{5+2} = \frac{-14}{7} = -2$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای $x = -1$ عدد -2 به دست می‌آید.

۵۱. گزینه ۳

$$P(\underbrace{A \cup B}_{\text{لااقل یکی}}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B مستقل هستند.

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0.84 + 0.75 - \underbrace{(0.84)(0.75)}_{0.63} = 0.96$$

۵۲. گزینه ۱ در این مسأله، پیروزی یعنی رنگ چشم مغلوب داشتن

$$\begin{cases} n=4 \\ k=3 \\ p=\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{64}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}$$

۵۳. گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

$$\text{دنباله غیریکنوا است.} \rightarrow \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$$

$$\text{دنباله غیریکنوا است.} \rightarrow \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \dots$$

$$\text{دنباله همگرا و در نتیجه کراندار است.} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} \rightarrow a'_n = \frac{4n(n^2 + 3) - 2n(2n^2 + 1)}{(n^2 + 3)^2} = \frac{1 \cdot n}{(n^2 + 3)^2} > 0 \rightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 1}{5n + 9} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{5n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5}n = +\infty \rightarrow \text{دنباله از پایین کراندار است}$$

گزینه‌ی چهارم:

بنابراین گزینه‌ی سوم صحیح است.

$$\boxed{Lna^n = nLna, \quad Lna + Lnb = Lnab} \quad \text{۵۴. گزینه ۲ می‌دانیم:}$$

$$Ln(x - 4y) = 2Ln2 \rightarrow Ln(x - 4y) = Ln4 \rightarrow x - 4y = 4 \rightarrow x = 4y + 4$$

$$Ln(y + x - 1) + Ln(2y + 3) = 0 \rightarrow Ln(y + x - 1)(2y + 3) = 0$$

$$\xrightarrow{Ln1=0} (y + x - 1)(2y + 3) = 1 \rightarrow 2y^2 + 3y + 2xy + 3x - 2y - 3 = 1$$

$$\xrightarrow{x=4y+4} 2y^2 + 3y + 2(4y+4)y + 3(4y+4) - 2y - 4 = 0$$

$$\rightarrow 2y^2 + 3y + 8y^2 + 8y + 12y + 12 - 2y - 4 = 0 \rightarrow 10y^2 + 21y + 8 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 441 - 320 = 121 \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-21+11}{20} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x=4y+4} x = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 2 \\ y = \frac{-21-11}{20} = -\frac{16}{10} \end{cases} \quad \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.)}$$

پس $xy = (۲)\left(\frac{-۱}{۲}\right) = -۱$ است.

$\sin ۲a = ۲ \sin a \cos a \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \sin \alpha$

 ۵۵. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\sin ۲x + \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = ۰ \rightarrow ۲ \sin x \cos x + \sin x = ۰ \rightarrow \sin x(۲ \cos x + ۱) = ۰$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = ۰ \xrightarrow{\text{حال خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=۰,۱,۲} x = ۰, \pi, ۲\pi \\ ۲ \cos x + ۱ = ۰ \rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{x=۲k\pi \pm \alpha} \left\{ \begin{array}{l} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{۲\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{k=۱} x = \frac{۴\pi}{۳} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $۰ + \pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$ است.

۵۶. گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f, g را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow Df = R - \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow Dg: x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$Dgof = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \underbrace{\{x \neq 1, x \neq -1\}}_I, \quad 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
\rightarrow	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

عبارت ≤ 0

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{یا} \quad x > 1 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x = 0$ می‌رسیم.

۵۷. گزینه ۴ برای بررسی همگرایی و واگرایی دنباله، حد آن را در $+\infty$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} \left[\frac{1}{+\infty} \right] = [0^+] = 0 & \text{زوج } n \\ \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1 & \text{فرد } n \end{cases} \rightarrow \text{دنباله واگراست}$$

توجه کنید

۵۸. گزینه ۱ اگر A پیشامد هر دو سکه رو و B پیشامد آمدن عدد ۶ در تاس باشد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{A, B \text{ مستقل هستند}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{6+4-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

۵۹. گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow Df = R$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^2} \rightarrow Dg: x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(1 - x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \underbrace{\{x \in R, 0 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1\}}$$

$$\underbrace{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}_{+} \geq 0 \rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 : II$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1 - x^2 - 1 - x^2}{1 + x^2} \leq 0 \rightarrow \underbrace{\frac{-2x^2}{1 + x^2}}_{\text{منفی یا صفر}} \leq 0 \quad III: \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب $-1 \leq x \leq 1$ می‌رسیم. ($x \in [-1, 1]$)

۶۰. **گزینه ۴** در ابتدا احتمال آنکه مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد را حساب می‌کنیم (یعنی مجموع دو تاس، برابر ۵ یا ۶ یا ۷ ... یا ۱۲ باشد) برای این کار از متمم استفاده می‌کنیم.

$$4 \rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2)$$

$$3 \rightarrow (1, 2), (2, 1)$$

$$2 \rightarrow (1, 1)$$

$$\rightarrow n(A) = 36 - 6 = 30 \rightarrow P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

اگر A پیشامد آنکه مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد و B پیشامد آن باشد که سکه «رو» ظاهر شود داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{مستقل}} = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

۶۱. **گزینه ۴** در صورتی که از رنگ n مهره‌ی خارج شده اطلاعی نداشته باشیم احتمال آنکه مهره‌ی $(n+1)$ ام خارج شده سفید

باشد مانند آن است که اولین مهره‌ی خارج شده سفید باشد یعنی $P(A) = \frac{4}{7}$ است.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۹۲۳۹۰

۲-۵	۳-۴	۲-۳	۱-۲	۳-۱
۱-۱۰	۲-۹	۲-۸	۱-۷	۴-۶
۴-۱۵	۲-۱۴	۴-۱۳	۳-۱۲	۱-۱۱
۳-۲۰	۴-۱۹	۱-۱۸	۲-۱۷	۱-۱۶
۲-۲۵	۱-۲۴	۲-۲۳	۲-۲۲	۱-۲۱
۴-۳۰	۴-۲۹	۲-۲۸	۴-۲۷	۲-۲۶
۳-۳۵	۳-۳۴	۲-۳۳	۴-۳۲	۱-۳۱
۲-۴۰	۱-۳۹	۲-۳۸	۱-۳۷	۴-۳۶
۱-۴۵	۲-۴۴	۴-۴۳	۲-۴۲	۴-۴۱
۳-۵۰	۳-۴۹	۳-۴۸	۴-۴۷	۴-۴۶
۴-۵۵	۲-۵۴	۳-۵۳	۱-۵۲	۳-۵۱
۴-۶۰	۲-۵۹	۱-۵۸	۴-۵۷	۲-۵۶
				۴-۶۱