



۱. اگر  $f(x) = |x| - [x]$  حاصل  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۳

کد سوال: ۵۱۳۰-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۲. مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ، محور  $x$  ها و دو خط  $x = -2$  و  $x = 3$ ،

کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

کد سوال: ۴۸۸۶۸-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۳. با شرط  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$  حاصل  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sin x + \cos x + c$  (۲)  $\sin x - \cos x + c$  (۳)  $-\sin x + \cos x + c$  (۴)  $-\sin x - \cos x + c$

کد سوال: ۷۸۶۷۴-سراسری-۱۳۹۲-متوسط

۴. مقدار انتگرال معین  $\int_{-1}^3 (x + [x]) dx$ ، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲)  $5\frac{1}{2}$  (۳) ۶ (۴)  $6\frac{1}{2}$

کد سوال: ۸۵۲۱۱-سراسری-۱۳۹۳-متوسط

۵. اگر  $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = 3\sqrt{x} \cdot f(x) + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x} + 2$  (۲)  $\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 6$  (۳)  $\frac{2}{9}x + 3\sqrt{x} + 6$  (۴)  $\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$

کد سوال: ۸۵۲۱۲-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۶. با شرط  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  حاصل  $\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx$ ، کدام است؟

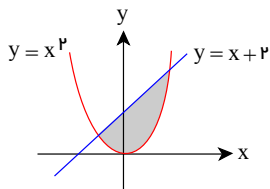
- (۱)  $-2 \cos x + c$  (۲)  $-2 \sin x + c$  (۳)  $2 \cos x + c$  (۴)  $2 \sin x + c$

کد سوال: ۸۵۹۰۹-خارج از کشور-۱۳۹۲-متوسط

۷. حاصل  $\int \frac{(1-x)^3 + x^3 - 1}{x} dx$  به صورت  $\frac{x}{2} f(x) + c$  است.  $f(x)$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $3x - 2$  (۲)  $3x + 2$  (۳)  $3x + 6$  (۴)  $3x - 6$

کد سوال: ۹۱۷۱۸-گزینہ ۲-۱۳۹۴-متوسط



۸. سطح محصور بین منحنی  $y = x^2$  و خط  $y = x + 2$  چقدر است؟

(۱)  $\frac{7}{2}$

(۲)  $\frac{9}{2}$

(۳)  $\frac{5}{2}$

(۴)  $\frac{11}{2}$

کد سوال: ۹۱۷۲۲-گزینہ ۲-۱۳۹۴-متوسط

۹. اگر  $\int_1^x \frac{t}{t^3 + t + 1} dt$ ،  $y = (x^2 + 1)$ ، آن گاه مقدار  $\frac{dy}{dx}$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $\frac{1}{3}$

کد سوال: ۹۱۷۲۳-گزینہ ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۰. حاصل  $\int_0^2 (|x| + |x - 1|) dx$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳)  $2\frac{1}{2}$

(۴) ۳

کد سوال: ۹۱۸۳۵-گزینہ ۲-۱۳۹۴-سخت

۱۱. حاصل عبارت  $\int \frac{(1+x)^3 - x^3}{\sqrt{x}} dx$  به صورت  $2\sqrt{x}f(x) + c$  بیان شده است  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $x + 1 + \frac{x^2}{5}$

(۲)  $x + 1 + \frac{3x^2}{5}$

(۳)  $2x + 1 + \frac{x^2}{5}$

(۴)  $2x + 1 + \frac{3x^2}{5}$

کد سوال: ۹۲۱۵۴-گزینہ ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۲. حاصل  $\int_{-1}^4 (|x| + |x - 3|) dx$  کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) ۱۶

(۳) ۱۵

(۴) ۱۳

کد سوال: ۹۳۶۸۹-گزینہ ۲-۱۳۹۳-سخت

۱۳. حاصل  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 x dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi}{2}$

(۲)  $\frac{\pi - 1}{2}$

(۳)  $\frac{\pi}{2} - 1$

(۴)  $\frac{\pi}{2} + 1$

کد سوال: ۹۳۶۹۳-گزینہ ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۴. اگر  $\int \sqrt{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + 4} dx = \frac{f(x)}{3x} + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟ ( $x > 1$ )

(۱)  $x^4 + 3$

(۲)  $x^4 - 3$

(۳)  $x^3 - 3$

(۴)  $x^3 - 3x$

کد سوال: ۹۴۰۲۴-گزینہ ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۵.  $\int_0^{3\pi} [\sin x] dx$  کدام است؟

(۱)  $-\pi$

(۲)  $-2\pi$

(۳)  $-3\pi$

(۴) صفر

کد سوال: ۹۴۰۶۴-گزینہ ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۶. اگر  $f(x) = |x+1| + |x-3|$  باشد حاصل  $\int_{-2}^5 f(x) dx$  کدام است؟

(۴) ۲۷

(۳) ۲۸

(۲) ۳۰

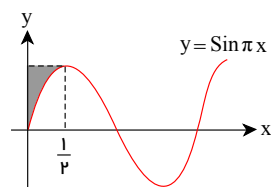
(۱) ۳۳

کد سوال: ۹۶۵۰۰-سنجش-۱۳۹۴-سخت

۱۷. حاصل انتگرال  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^2 dx$  کدام است؟

(۴)  $3 + \frac{\pi}{2}$ (۳)  $3 + \pi$ (۲)  $4 + \pi$ (۱)  $4 + \frac{3\pi}{2}$ 

کد سوال: ۹۶۵۴۹-سنجش-۱۳۹۴-سخت



۱۸. باتوجه به نمودار مقابل، مساحت ناحیه‌ی رنگ شده کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$ (۲)  $\frac{\pi + 2}{2\pi}$ (۳)  $\frac{\pi - 2}{2\pi}$ (۴)  $\frac{\pi - 1}{\pi}$ 

کد سوال: ۹۸۶۰۰-قلم چی-۱۳۹۴-سخت

۱۹. حاصل  $\int_0^{3\pi} |\sin x| dx$  کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۲

(۲)  $3\pi$ 

(۱) ۳

کد سوال: ۹۹۰۵۳-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۰. حاصل  $\int_1^e \frac{[x]}{x} dx$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

(۴)  $\ln \frac{2}{e^2}$ (۳)  $\ln \frac{e^2}{2}$ (۲)  $\ln \frac{2}{e}$ (۱)  $\ln \frac{e}{2}$ 

کد سوال: ۹۹۰۶۵-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۱. حاصل  $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{3}$ (۳)  $\frac{16}{2}$ (۲)  $\frac{8}{3}$ (۱)  $\frac{4}{3}$ 

کد سوال: ۹۹۰۶۷-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۲. با توجه به تابع  $f(x) = \int_4^x \frac{dx}{2 + \sqrt{t}}$  در  $x = 4$  مشتق تابع  $y = x f(x)$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{4}$ (۳)  $\frac{1}{2}$ 

(۲) ۱

(۱) ۰

کد سوال: ۹۹۰۶۸-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۳. اگر  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ \cos \pi x & x \geq 0 \end{cases}$  باشد، حاصل  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  کدام است؟

(۴)  $\frac{3\pi}{2}$ (۳)  $\frac{\pi}{2}$ (۲)  $\frac{3}{2}$ (۱)  $\frac{1}{2}$ 

کد سوال: ۹۹۱۰۵-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۴. اگر  $\int \tan^2 x \, dx = f(x)$  و  $f(0) = -1$ ، آنگاه حاصل  $f(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\pi}{4} - 1$  (۳)  $-\frac{\pi}{4}$  (۴)  $-\frac{\pi}{4} - 1$

کد سوال: ۹۹۱۰۸-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۵. اگر  $\int \frac{x^2 + 2}{x^3} \, dx = \frac{f(x) - 1}{x^2} + c$ ، آنگاه حاصل  $f'(e)$  چقدر است؟

- (۱)  $e$  (۲)  $2e$  (۳)  $3e$  (۴)  $4e$

کد سوال: ۹۹۱۱۴-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۶. اگر  $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} \, dt$  باشد، آنگاه  $F''(1)$  کدام است؟

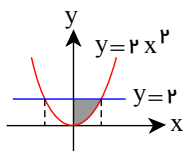
- (۱)  $-\frac{1}{e}$  (۲)  $-\frac{2}{e}$  (۳)  $\frac{1}{e}$  (۴)  $\frac{2}{e}$

کد سوال: ۹۹۱۲۴-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۷. اگر  $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ ، معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

- (۱)  $y = 2x - 2$  (۲)  $y = 2x - 1$  (۳)  $2y = x - 2$  (۴)  $2y = x - 1$

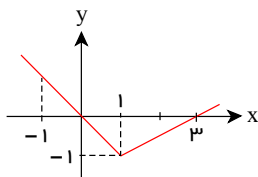
کد سوال: ۹۹۱۳۱-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط



۲۸. با توجه به شکل مقابل، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{8}{3}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

کد سوال: ۹۹۱۴۱-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط



۲۹. شکل زیر نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. حاصل  $\int_{-1}^3 (x + f(x)) \, dx$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

کد سوال: ۹۹۱۵۶-قلم چی-۱۳۹۴-سخت

۳۰. اگر  $\int \frac{(x\sqrt{x} - x)^2}{\sqrt{x}} \, dx = 2x^2 f(x) + c$ ، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x\sqrt{x}$  (۲)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x^2 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$  (۳)  $\frac{1}{5}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{x}$  (۴)  $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} - x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

کد سوال: ۹۹۴۵۱-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۳۱. حاصل  $\int_0^9 |2 - \sqrt{x}| \, dx$  چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲)  $\frac{8}{3}$  (۳) ۱۶ (۴)  $\frac{۱۶}{۳}$

کد سوال: ۹۹۴۵۴-قلم چی-۱۳۹۴-سخت

۳۲. حاصل  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ ، برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\pi$  (۴) صفر

کد سوال: ۱۰۲۴۸۹-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۳۳. اگر  $\int \frac{7x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x} f(x) + c$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}x^2 - 2x$  (۲)  $\frac{2}{3}x^2 - 1$  (۳)  $x^2 - x$  (۴)  $x^2 - 2$

کد سوال: ۱۰۲۴۹۱-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۳۴. اگر  $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{x})^2 dx = \frac{f(x)}{2x} + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^3 - 8x\sqrt{x} + 2$  (۲)  $x^3 - 4x\sqrt{x} + 2$  (۳)  $x^3 - 8x\sqrt{x} - 2$  (۴)  $x^3 - 4x\sqrt{x} - 2$

کد سوال: ۱۰۲۵۷۸-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۳۵. حاصل  $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

کد سوال: ۱۰۲۶۶۶-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۳۶. اگر  $\int \frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} f(x) + c$ ، آنگاه  $f(x)$ ، کدام است؟

- (۱)  $2x^2 - x$  (۲)  $x^2 - x$  (۳)  $x^2 - 1$  (۴)  $2x^2 - 1$

کد سوال: ۱۰۲۶۶۷-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۳۷. اگر  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx = \sqrt{x+2} f(x) + c$  ضابطه‌ی  $f(x)$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

کد سوال: ۱۰۹۴۱۵-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت

۳۸. حاصل  $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{15}{2}$  (۲)  $\frac{26}{3}$  (۳)  $\frac{13}{2}$  (۴)  $\frac{7}{3}$

کد سوال: ۱۱۵۳۲۲-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۳۹. اگر  $\int (\delta x \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + 4) dx = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + c$  باشد، ضابطه‌ی  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^3 + 2\sqrt{x}$  (۲)  $(2x\sqrt{x} - 1)^2$  (۳)  $(x\sqrt{x} + 1)^2$  (۴)  $(x\sqrt{x} - 1)^2$

کد سوال: ۱۱۵۳۴۹-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۰. حاصل  $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۲

کد سوال: ۱۱۵۳۵۲-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۴۱. اگر  $\int \frac{(1+e^x)^2}{e^x} dx = e^{-x} f(x) + c$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $1 + 2xe^x + e^{2x}$   
 (۲)  $-1 + e^x + 2x$   
 (۳)  $-1 + e^{2x} + 2xe^{-x}$   
 (۴)  $-1 + e^x(e^x + 2x)$

کد سوال: ۱۱۵۳۵۴-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۲. اگر  $F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^2 + 1}$  و  $G(x) = \frac{x}{2x+1} F(\frac{1}{x})$  باشد، آن گاه حاصل  $G'(\frac{1}{2})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $-\frac{1}{5}$   
 (۳)  $-\frac{1}{10}$   
 (۴)  $\frac{1}{20}$

کد سوال: ۱۱۵۳۵۶-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۳. اگر  $f(x) = \frac{3x^2 - x\sqrt{x}}{x - 3x\sqrt{x}}$  باشد، حاصل  $\int_1^4 f(x) dx$  برابر کدام است؟

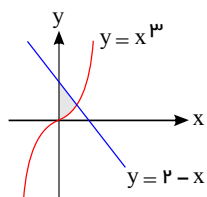
- (۱)  $-\frac{14}{3}$   
 (۲)  $\frac{14}{3}$   
 (۳)  $\frac{7}{3}$   
 (۴)  $-\frac{7}{3}$

کد سوال: ۱۱۵۳۵۸-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۴. اگر  $f(x) = (x + |2 - x|)[x]$  باشد، آن گاه  $\int_1^3 f(x) dx$  برابر کدام است؟ ([ ]، [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۶  
 (۲) ۸  
 (۳) ۱۲  
 (۴) ۱۶

کد سوال: ۱۱۵۳۶۱-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط



۴۵. مساحت قسمت سایه خورده کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$   
 (۲)  $\frac{3}{4}$   
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴)  $\frac{7}{4}$

کد سوال: ۱۱۵۳۶۳-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۶. مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های  $y = x^2|x|$  و  $y = |x|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{3}{8}$   
 (۴)  $\frac{5}{8}$

کد سوال: ۱۱۵۳۶۶-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۷. مشتق تابع  $f$  در هر نقطه از آن به صورت  $\frac{x^2 + 1}{x}$  است. اگر نمودار از نقطه‌ی  $(1, 0)$  عبور کند، حاصل  $f(\sqrt{e})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{e}{4}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{e}}{4}$   
 (۳)  $\frac{e^2}{2}$   
 (۴)  $\frac{e}{2}$

کد سوال: ۱۱۵۳۶۷-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۸. حاصل  $\int_0^3 |[x] - 2| dx$  کدام است؟ ([ ]، [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۲  
 (۲) ۳  
 (۳) ۱  
 (۴) ۴

کد سوال: ۱۱۵۳۶۸-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۴۹. حاصل  $\int_0^3 (4x - 4[x]) dx$  کدام است؟ ([ ]، [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۴  
 (۲) ۱۲  
 (۳) ۸  
 (۴) ۶

کد سوال: ۱۱۶۰۲۸-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۵۰. اگر  $F(x) = \int_0^x t^3 e^{2t} dt$  باشد، مقدار  $F'(1) + F''(1)$  کدام است؟

- (۱)  $24e^2$  (۲)  $22e^2$  (۳)  $26e^2$  (۴)  $2e^2$

کد سوال: ۱۱۶۰۸۷-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۵۱. اگر  $\int \frac{x^2 - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = xf(x) + c$  باشد، تابع  $f(x)$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{4}{11}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}}$  (۲)  $\frac{4}{3}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{7}x^{\frac{5}{4}}$  (۳)  $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$  (۴)  $\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}}$

کد سوال: ۱۱۶۰۹۲-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۵۲. حاصل  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} - e^x + 1} dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{e^{4x}}{4} + x + c$  (۲)  $e^x - x + c$  (۳)  $e^x + x + c$  (۴)  $\frac{e^x}{2} - 2x + c$

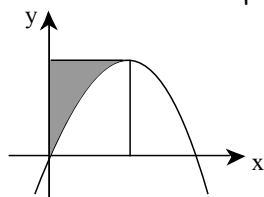
کد سوال: ۱۱۶۱۰۱-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۵۳. می‌دانیم به ازای  $x > 0$  داریم:  $(x \ln x)' = 1 + \ln x$ . حاصل عبارت  $\int_1^e (x \ln x) dx$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $e + 1$  (۳)  $e$  (۴)  $2e - 1$

کد سوال: ۱۱۶۱۱۰-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

۵۴. باتوجه به شکل زیر که مربوط به تابع  $f(x) = -x^2 + 4x$  می‌باشد، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



- (۱)  $\frac{8}{3}$  (۲)  $\frac{16}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{10}{3}$

کد سوال: ۱۱۶۱۲۰-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۵۵. حاصل  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4} - 1$  (۲)  $\frac{\pi}{4} + 1$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $-\frac{\pi}{4}$

کد سوال: ۱۱۶۱۲۱-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۵۶. حاصل  $\int_0^2 |x^{[x]} - 2| dx$  کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

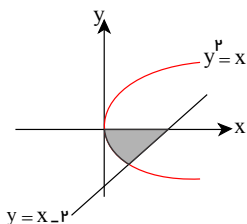
- (۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{5}{2}$

کد سوال: ۱۱۶۱۲۵-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

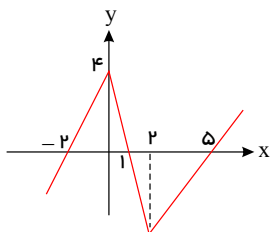
۵۷. اگر  $\int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx = \frac{f(x)}{x+1} + c$ ، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^2 + x + 1$  (۲)  $x^2 + x - 1$  (۳)  $x^2 - x + 1$  (۴)  $x^2 - x$

کد سوال: ۱۱۶۱۲۸-قلم چی-۱۳۹۵-سخت



کد سوال: ۱۱۶۱۲۹-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

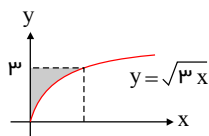


کد سوال: ۱۱۶۱۷۴-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

$$\frac{5}{2} \quad (۴)$$

کد سوال: ۱۱۶۱۸۰-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

کد سوال: ۱۱۷۲۵۲-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط



کد سوال: ۱۱۷۲۵۴-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

$$۴ \quad (۴)$$

کد سوال: ۱۱۹۰۰۰-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

$$۴ \quad (۴)$$

کد سوال: ۱۱۹۴۳۶-سراسری-۱۳۹۵-متوسط

$$x + ۲ \quad (۴)$$

کد سوال: ۱۱۹۴۳۷-سراسری-۱۳۹۵-متوسط

۵۸. باتوجه به شکل زیر، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

$$\frac{۱۹}{۶} \quad (۲)$$

$$\frac{۵}{۳} \quad (۱)$$

$$\frac{۷}{۶} \quad (۴)$$

$$\frac{۵}{۶} \quad (۳)$$

۵۹. باتوجه به نمودار تابع  $f(x)$ ، مقدار  $\int_{-۲}^۵ f(x)dx$  کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$-۲ \quad (۳)$$

$$-۴ \quad (۴)$$

۶۰. اگر  $f(x) = \begin{cases} -[x] & , x < ۰ \\ [۲x] & , x \geq ۰ \end{cases}$  باشد، حاصل  $\int_{-۱}^۳ f(x)dx$  کدام است؟

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

۶۱. حاصل  $\int \frac{\sin ۴x}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} dx$  کدام است؟

$$\frac{-\cos ۴x}{۴ \sin x} + c \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{۲} \sin ۲x + c \quad (۴)$$

$$\frac{-\cos ۴c}{\cos^۳ x - \sin^۳ x} + c \quad (۱)$$

$$-\cos ۲x + c \quad (۳)$$

۶۲. مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده در شکل مقابل، کدام است؟

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۶۳. حاصل  $\int_{-۱}^۳ (|x| - |x-۱|)dx$  کدام است؟

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۶۴. حاصل  $\int_{-۱}^۱ (|۳x| - [x])dx$ ، کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$\frac{۷}{۲} \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$\frac{۵}{۲} \quad (۱)$$

۶۵. اگر  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^۲} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) + c$  باشد آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

$$x - ۲ \quad (۳)$$

$$۲x - ۱ \quad (۲)$$

$$۲x + ۲ \quad (۱)$$



۶۶. حاصل  $\int_{-1}^2 [x] |x| dx$  کدام است؟  $[ ]$ ، نماد جزء صحیح است).

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

کد سوال: ۱۱۹۵۳۱-خارج از کشور-۱۳۹۵-متوسط

۶۷. اگر  $\int (\tan x + 2 \cot x)^2 dx = \frac{f(x)}{\tan x} + c$  باشد، ضابطه ی  $f(x)$  کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $\tan^2 x - x \tan x - 4$  (۲)  $\tan^2 x - \tan x - 4$  (۳)  $\tan^2 x - 4$  (۴)  $\tan x - x + 4$

کد سوال: ۱۲۱۸۱۲-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۶۸. حاصل  $\int_0^2 \frac{x^2 - x}{x - [x]} dx$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

کد سوال: ۱۲۱۸۳۰-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۶۹. اگر  $f(x) = x^2 \int_2^x \frac{t}{t+1} dt$  مشتق  $f(\frac{2}{x})$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{3}$  (۲)  $\frac{16}{3}$  (۳)  $-\frac{16}{3}$  (۴)  $-\frac{8}{3}$

کد سوال: ۱۲۱۸۴۴-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۷۰. اگر  $\int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx = \frac{f(x)}{x+1} + c$  باشد، آن گاه ضابطه ی  $f(x)$  کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $x^2 + x + 1$  (۲)  $x^2 + x - 1$  (۳)  $x^2 - x + 1$  (۴)  $x^2 - x$

کد سوال: ۱۲۱۸۶۰-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۷۱. اگر  $\int f(x) dx = x^3 \sqrt{x} + c$ ، آن گاه  $\int \frac{8}{f(x)} dx$  کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt[3]{x} + c'$  (۲)  $9\sqrt[3]{x} + c'$  (۳)  $3\sqrt[3]{x^2} + c'$  (۴)  $9\sqrt[3]{x^2} + c'$

کد سوال: ۲۱۳۵۳۶-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۷۲. اگر  $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$  و  $B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$ ، آن گاه حاصل  $A - B$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

کد سوال: ۲۱۳۵۵۵-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۷۳. حاصل  $\int_1^2 (\frac{x}{2} - \frac{2}{x}) dx$  کدام است؟

- (۱)  $1 - \ln 2$  (۲)  $\frac{3}{4} - \ln 4$  (۳)  $\frac{3}{4} - \ln 2$  (۴)  $1 - \ln 4$

کد سوال: ۲۱۳۶۳۲-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۷۴. حاصل  $\int_{-1}^1 |x| dx$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است)

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۲

کد سوال: ۲۱۳۶۳۶-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۷۵. اگر مشتق تابع  $f$  در دامنه‌ی تعریف آن به صورت  $1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 7x\sqrt{x}$  باشد و نمودار تابع  $f$  از نقطه‌ی  $(1, 2)$  عبور کند، حاصل

$f\left(\frac{1}{8}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{51}{128}$  (۲)  $\frac{51}{64}$  (۳)  $\frac{37}{128}$  (۴)  $\frac{37}{64}$

کد سوال: ۲۱۳۶۴۵-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۷۶. اگر  $\int \frac{x^3 - x}{x + \sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + c$ ، حاصل  $f(0)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

کد سوال: ۲۱۳۶۵۸-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۷۷. حاصل  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx$  کدام است؟

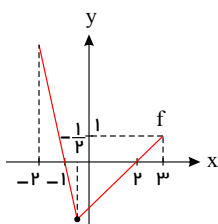
- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲

کد سوال: ۲۱۳۶۶۸-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۷۸. اگر  $G(x) = \int_2^{x^2+1} t \cos(\pi t) dt$  باشد، شیب خط قائم بر تابع  $y = G(x)$  در  $x = 1$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳) -۴ (۴)  $\frac{1}{4}$

کد سوال: ۲۱۳۶۷۷-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط



۷۹. شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f$  است. حاصل  $\int_{-2}^3 f(x) dx$  کدام است؟

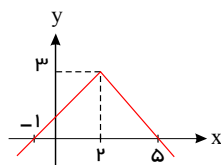
- (۱)  $\frac{27}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{27}{4}$

کد سوال: ۲۱۳۶۹۰-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۸۰. حاصل  $\int_3^8 \frac{x e^{\ln(x-2)}}{x^2 - 4} dx$  کدام است؟

- (۱)  $5 - \ln 2$  (۲)  $5 \ln \frac{e}{4}$  (۳)  $5 - \ln 4$  (۴)  $5 \ln(4e)$

کد سوال: ۲۱۳۷۲۷-قلم چی-۱۳۹۶-سخت



۸۱. با توجه به نمودار تابع  $f$ ، حاصل  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  برابر کدام است؟

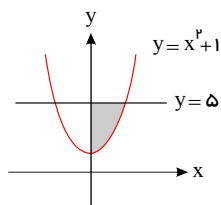
- (۱) ۸  
(۲) -۸  
(۳) -۱۲  
(۴) ۱۲

کد سوال: ۲۱۳۷۴۱-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۸۲. فرض کنید  $G$  تابع مساحت با ضابطه  $y = x^3 G(x)$  باشد. مشتق تابع  $G(x) = \int_1^x \frac{\sin 2\pi t}{1+t^2} dt$  در  $x = 1$  چقدر است؟

- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳) ۳  
(۴)  $\frac{7}{2}$

کد سوال: ۲۱۵۷۱۹-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط



۸۳. در شکل زیر، مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

- (۱) ۵  
(۲)  $\frac{16}{3}$   
(۳)  $\frac{17}{3}$   
(۴) ۶

کد سوال: ۲۱۵۷۲۶-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۸۴. اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = |x|$ ، حاصل  $\int_{-1}^3 (2g(x) - 3f(x)) dx$  کدام است؟

- (۱) ۱۶  
(۲) ۱۰  
(۳) ۶  
(۴) ۴

کد سوال: ۲۱۵۹۴۱-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۸۵. اگر  $\int \frac{(2x - \sqrt{x})(2\sqrt{x} + 1)}{x^2} dx = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + c$ ، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

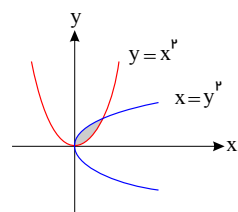
- (۱)  $4x + 1$   
(۲)  $4x + 8$   
(۳)  $8x + 2$   
(۴)  $8x + 4$

کد سوال: ۲۱۵۹۷۶-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۸۶. حاصل  $\int_1^{27} [\sqrt[3]{x}] dx$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۴۵  
(۲) ۴۶  
(۳) ۴۸  
(۴) ۴۹

کد سوال: ۲۱۷۳۰۶-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط



۸۷. در شکل زیر، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$   
(۲)  $\frac{1}{6}$   
(۳)  $\frac{1}{3}$   
(۴)  $\frac{7}{6}$

کد سوال: ۲۱۷۳۴۶-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۸۸. حاصل  $\int_{-2}^1 ||x| - 1| [x] dx$  کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $-\frac{3}{2}$   
(۴)  $-\frac{1}{2}$

کد سوال: ۲۲۰۰۴۸-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۸۹. سطح محصور بین نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x|x| & , -2 < x < 1 \\ \sin \pi x & , 1 \leq x < 2 \end{cases}$  و محور  $x$  ها از  $x = -2$  تا  $x = 2$  کدام است؟

$$\frac{2}{\pi} + \frac{7}{3} \quad (1) \quad 3 + \frac{2}{\pi} \quad (2) \quad 2 + \frac{3}{\pi} \quad (3) \quad 3 - \frac{2}{\pi} \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۱۱۱۹-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۹۰. اگر  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = xf(x) + c$  ، آن گاه  $f(x)$  کدام است؟

$$1 + \frac{Lnx}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (1) \quad xLnx - 4\sqrt{x} + 1 \quad (2) \\ 1 + \frac{Lnx}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad (3) \quad xLnx + 4\sqrt{x} + 1 \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۱۱۲۰-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۹۱. حاصل  $\int \left( \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \right)^2 dx$  کدام است؟

$$-x + \tan x + c \quad (1) \quad \frac{\tan^3 x}{3} + c \quad (2) \\ \frac{\tan^2 x}{2} - x + c \quad (3) \quad x - \tan x + c \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۳۸۱۹-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۹۲. اگر  $f(x) = x - |x - 2|$  باشد، حاصل  $\int_0^4 f(x) dx$  ، کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۹۴۵۶-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۹۳. اگر  $\int (3x + \frac{1}{x})^2 dx = \frac{1}{x} f(x) + c$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

$$3x^3 + 6x^2 - 1 \quad (1) \quad 3x^3 + 3x - 1 \quad (2) \quad 3x^4 + 3x^2 - 1 \quad (3) \quad 3x^4 + 6x^2 - 1 \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۹۴۵۸-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۹۴. اگر  $f(x) = |x - 2| - 2$  باشد، حاصل  $\int_0^6 f(x) dx$  ، کدام است؟

$$-2,5 \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad -1,5 \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

کد سوال: ۲۲۹۷۱۷-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۹۵. مساحت بین نمودار تابع  $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$  و محور  $x$  ها در بازه  $[-1, a]$  برابر ۱۲۴ است. مقدار  $a$  کدام است؟

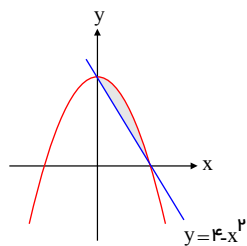
$$\sqrt[3]{10} \quad (1) \quad \sqrt[3]{62} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

کد سوال: ۲۳۴۸۰۱-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۹۶. اگر  $\int \frac{1+x^6}{1+x^2} dx = xf(x) + c$  ، آن گاه حاصل  $f(1)$  کدام است؟

$$\frac{13}{15} \quad (1) \quad \frac{7}{15} \quad (2) \quad \frac{11}{15} \quad (3) \quad \frac{23}{15} \quad (4)$$

کد سوال: ۲۳۶۳۲۸-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط



۹۷. باتوجه به شکل زیر، مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده، کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$   
 (۲)  $\frac{8}{3}$   
 (۳)  $\frac{16}{3}$   
 (۴)  $\frac{20}{3}$

کد سوال: ۲۳۶۳۴۱-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

۹۸. سطح محدود به منحنی  $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$  و محور  $x$  ها در یک طاق آن، کدام است؟

- (۱) ۲  
 (۲)  $2\sqrt{2}$   
 (۳) ۳  
 (۴)  $3\sqrt{2}$

کد سوال: ۲۴۰۷۱۵-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۹۹. حاصل انتگرال  $\int_0^4 |1 - \sqrt{x}| dx$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$   
 (۲)  $\frac{5}{3}$   
 (۳) ۲  
 (۴) ۳

کد سوال: ۲۴۰۷۴۹-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۱۰۰. حاصل انتگرال  $\int_0^4 \sqrt{(x^2 - 2x)^3} dx$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{16}{3}$   
 (۲)  $\frac{20}{3}$   
 (۳) ۸  
 (۴) ۹

کد سوال: ۲۵۴۳۱۳-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۱. گزینه ۳ راه حل اول:

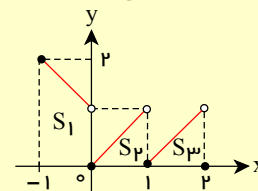
$$\int_{-1}^{\mathfrak{r}} (|x| - [x]) dx = \int_{-1}^{\circ} \overbrace{(-x - (-1))}^{-x+1} dx + \int_{\circ}^1 (x - \circ) + \int_1^{\mathfrak{r}} (x - 1) dx = \left(-\frac{x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} + x\right) \Big|_{-1}^{\circ} + \left(\frac{x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}\right) \Big|_{\circ}^1 + \left(\frac{x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} - x\right) \Big|_1^{\mathfrak{r}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = (\circ - (-\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2} - \circ) + (\circ - (-\frac{1}{2})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

راه حل دوم: تابع  $f$  را در فاصله‌ی  $(-1, 2)$  رسم کرده و مساحت زیر منحنی  $f$  را محاسبه می‌نماییم. داریم:

$$f(x) = |x| - [x] = \begin{cases} -x + 1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

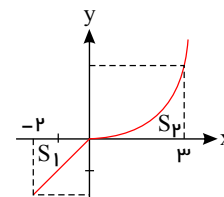
$$\int_{-1}^{\frac{5}{2}} f(x) dx = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



۲. گزینه ۴ مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S = S_{\mathbf{I}} + S_{\mathbf{I}^c} = \left| \int_{-\mathbf{I}}^{\circ} f(x) dx \right| + \left| \int_{\circ}^{\mathbf{I}^c} f(x) dx \right| = - \int_{-\mathbf{I}}^{\circ} x dx + \int_{\circ}^{\mathbf{I}^c} x^{\mathbf{I}^c} dx$$

$$= \left( \frac{-x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} \right) \Big|_{-\mathfrak{r}}^{\circ} + \left( \frac{x^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} \right) \Big|_{\circ}^{\mathfrak{r}} = (\circ + \mathfrak{r}) + (\mathfrak{r} - \circ) = \mathfrak{r} + \mathfrak{r} = 11$$



۳. گزینه ۲ می دانیم:  $\cos^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \P x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{\cos \P x - \sin \P x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c \end{aligned}$$

۴. گزینه ۳ انتگرال را به مجموع دو انتگرال تبدیل می‌کنیم و حاصل را بدست می‌آوریم.

$$\int_{-1}^{\mathfrak{P}} x \, dx = \left( \frac{1}{\mathfrak{r}} x^{\mathfrak{r}} \right) \Big|_{-1}^{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}} - \frac{1}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$$

$$\int_{-1}^{\mathfrak{P}} [x] \, dx = \int_{-1}^{\circ} (-1) \, dx + \int_{\circ}^1 \circ \, dx + \int_1^{\mathfrak{P}} dx + \int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} -x \\ -1 \end{bmatrix}^{\circ} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{r}} + \begin{bmatrix} \mathfrak{r}x \\ \mathfrak{r} \end{bmatrix}^{\mathfrak{w}} = (\circ - 1) + (\mathfrak{r} - 1) + (\mathfrak{e} - \mathfrak{f}) = \mathfrak{r}$$

بنابراین حاصل انتگرال  $6 = 2 + 4$  است.

۵. گزینه ۴

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \text{ می دانیم:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx &= \int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}-1}{x} dx = \int \left( \frac{3\sqrt{x}}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{x\sqrt{x}}{x} \right) dx = \\ &= \int \left( 3x^{-\frac{1}{2}} + 3 + x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 3x + \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = 6\sqrt{x} + 3x + \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + c = 3\sqrt{x} \left( 2 + \sqrt{x} + \frac{2}{3} x \right) + c \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} + 2 + \frac{2}{3} x \end{aligned}$$

۶. گزینه ۳ می دانیم  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  پس  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  در ناحیه دوم و سوم کسینوس، منفی است.

$$\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \cdot \sin x dx = \int \frac{-1}{\cos x} (\sin x \cos x) dx = -\int \sin x dx = \cos x + c$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \text{ می دانیم:}$$

ابتدا عبارتی را که می خواهیم از آن انتگرال بگیریم را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)^3 + x^3 - 1}{x} &= \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3 + x^3 - 1}{x} = \frac{-3x + 3x^2}{x} = -3 + 3x \\ \Rightarrow \int \frac{(1-x)^3 + x^3 - 1}{x} dx &= \int (-3 + 3x) dx = -3x + \frac{3}{2} x^2 + c = \frac{x}{2} (3x - 6) + c \Rightarrow f(x) = 3x - 6 \end{aligned}$$

۸. گزینه ۲ مساحت محصور بین دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در بازه  $[a, b]$  برابر است با:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ابتدا محل تلاقی دو نمودار را می یابیم:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } 2$$

حال با توجه به نکته ی فوق داریم:

$$S = \int_{-1}^2 ((x+2) - x^2) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left( 2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\int_a^x f(t) dt' = f(x) \text{ و } (fg)' = f'g + fg' \text{ و } \int_a^x f(x) dx = 0 \text{ توجه کنید داریم:}$$

$$y = (x^2 + 1) \int_1^x \frac{t}{t^3 + t + 1} dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \left( \int_1^x \frac{t}{t^3 + t + 1} dt \right)' + 2x \int_1^x \frac{t}{t^3 + t + 1} dt$$

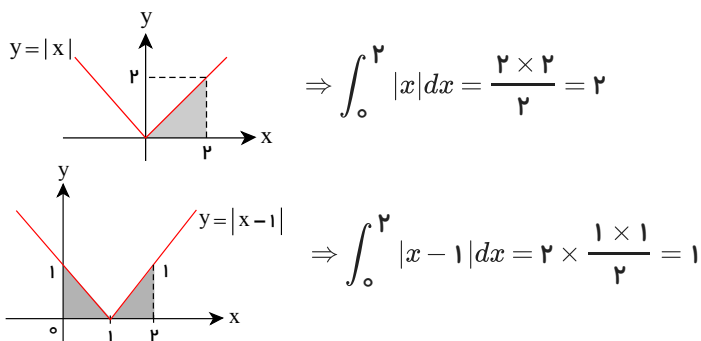
$$= (x^2 + 1) \left( \frac{x}{x^3 + x + 1} \right) + 2x \int_1^x \frac{t}{t^3 + t + 1} dt$$

$$y'(1) = 2 \left( \frac{1}{3} \right) + 2 \int_1^1 \frac{t}{t^3 + t + 1} dt = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

۱۰. گزینه ۴

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \Rightarrow \int_0^2 (|x| + |x-1|)dx = \int_0^2 |x|dx + \int_0^2 |x-1|dx$$

پس کافی است هر یک از دو انتگرال را جداگانه حساب کرده و سپس با هم جمع کنیم.



پس:  $\int_0^2 (|x| + |x-1|)dx = 2 + 1 = 3$

البته با رسم تابع اولیه که یک تابع گلدانی است نیز می توانستیم به جواب برسیم.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{می دانیم: } 11. \text{گزینه } 2$$

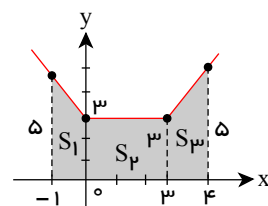
$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x)^3 - x^3}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3 - x^3}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \int \left( x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \times \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx + 3 \times \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + c \\ &= 2\sqrt{x}(1 + x + \frac{3}{5}x^2) \Rightarrow f(x) = 1 + x + \frac{3}{5}x^2 \end{aligned}$$

۱۲. گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی می باشد. با رسم آن، جواب را پیدا می کنیم.

شکل شامل یک مستطیل و دو دوزنقه است.

$$S_1 = \frac{(5+3)(1)}{2} = 4, \quad S_2 = 3 \times 3 = 9, \quad S_3 = \frac{(5+3)(1)}{2} = 4$$

پس:  $\int_{-1}^4 (|x| + |x-3|)dx = 4 + 9 + 4 = 17$



۱۳. گزینه ۱

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 0 = \frac{\pi}{2}$$



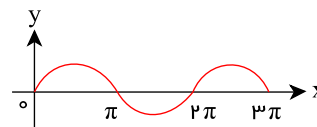
## ۱۴. گزینه ۲

ابتدا عبارتی را که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4} &= \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 + 4} = \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ \int \sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4} dx &= \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (x^2 + x^{-2}) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{-1} x^{-1} + c = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{x} + c \\ &= \frac{x^4 - 3}{3x} + c \rightarrow f(x) = x^4 - 3\end{aligned}$$

۱۵. گزینه ۱ نمودار تابع  $y = \sin x$  در فاصله‌ی صفر تا  $3\pi$  به صورت مقابل است. پس  $[\sin x]$  فقط در فاصله‌ی  $\pi$  تا  $2\pi$  مقادیر غیر صفر دارد. از  $0$  تا  $\pi$  و از  $2\pi$  تا  $3\pi$  سینوس بین صفر و یک است و جزء صحیح آن صفر است و بین  $\pi$  تا  $2\pi$  سینوس بین صفر و  $-1$  است و جزء صحیح آن  $-1$  می‌شود.

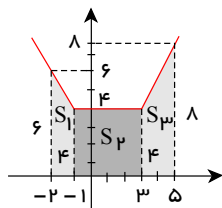
$$\int_0^{3\pi} [\sin x] dx = \int_{\pi}^{2\pi} (-1) dx = (-x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = -2\pi + \pi = -\pi$$



۱۶. گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است آن را رسم می‌کنیم

$$y = |x+1| + |x-3|$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 : a, \quad x-3=0 \rightarrow x=3 : b, \quad \text{کف گلدان} = |a-b| = 4$$



شکل شامل دو دوزنقه و یک مربع است.

$$S_1 = \frac{(6+4)(1)}{2} = 5, \quad S_2 = 4 \times 4 = 16, \quad S_3 = \frac{(8+4)(2)}{2} = 12$$

$$\text{پس } \int_{-2}^5 f(x) dx = 5 + 16 + 12 = 33$$

## ۱۷. گزینه ۱

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

 می‌دانیم:

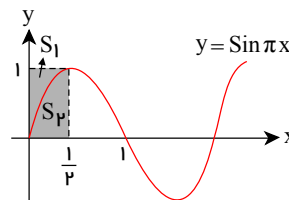
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4 \cos x + 4 \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 4 \cos x + 4 \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 4 \cos x + 2 \cos 2x) dx \\ &= (3x + 4 \sin x + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3\pi}{2} + 4 + 0\right) - (0 + 0 + 0) = \frac{3\pi}{2} + 4\end{aligned}$$

۱۸. گزینه ۳ به شکل توجه کنید:

$$S_1 + S_2 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x dx \rightarrow S_2 = \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi x\right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{\pi} \cos 0\right) = \frac{1}{\pi}$$

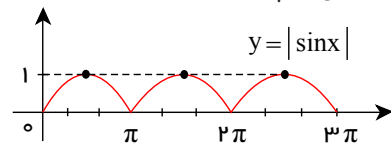
$$\xrightarrow{(*)} S_1 + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi - 2}{2\pi}$$



۱۹. گزینه ۴

تابع  $y = |\sin x|$  را رسم می‌کنیم. دوره‌ی تناوب آن  $\pi$  است، برای محاسبه‌ی انتگرال، حاصل  $\int_0^\pi \sin x \, dx$  را یافته، جواب آن را ۳ برابر می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_0^{3\pi} |\sin x| \, dx &= 3 \int_0^\pi \sin x \, dx \\ &= (-3 \cos x) \Big|_0^\pi = (-3 \cos \pi) - (-3 \cos 0) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$



۲۰. گزینه ۳

از آنجا که  $e \cong ۲٫۷۱۸$  است، بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{[x]}{x} \, dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx + \int_2^e \frac{2}{x} \, dx = (Ln x) \Big|_1^2 + (2Ln x) \Big|_2^e \\ &= (Ln 2 - Ln 1) + 2(Lne - Ln 2) = Ln 2 + 2Lne - 2Ln 2 = 2Lne - Ln 2 = Lne^2 - Ln 2 = Ln \frac{e^2}{2} \end{aligned}$$

۲۱. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \, dx &= \int_0^4 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \, dx = \int_0^4 (\sqrt{x}-1) \, dx = \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x \right) \Big|_0^4 = \left( \frac{16}{3} - 4 \right) - 0 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

بهتر است به خاطر بسپاریم که  $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$  می‌باشد.

۲۲. گزینه ۲

$y = xf(x) \Rightarrow y' = f(x) + xf'(x) \Rightarrow y'(4) = f(4) + 4f'(4) \quad (*)$   
حال باید با کمک ضابطه‌ی  $f$  حاصل  $f(4)$ ،  $f'(4)$  را بیابیم:

$$f(x) = \int_4^x \frac{dt}{2+\sqrt{t}} \Rightarrow \begin{cases} f(4) = \int_4^4 \frac{dt}{2+\sqrt{t}} = 0 \\ f'(x) = 1 \times \frac{1}{2+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y'(4) = 0 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

در نتیجه با توجه به (\*):

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0, \quad \left( \int_a^{g(x)} f(t) \, dt \right)' = g'(x) \cdot f(g(x))$$

توجه کنید:

۲۳. گزینه ۱ انتگرال را در دو بازه‌ی جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 (x+1) \, dx + \int_0^1 \cos \pi x \, dx = \left( \frac{1}{2} x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_0^1 = \left( 0 + \frac{1}{2} \right) + (0 - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

توجه کنید:  $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

۲۴. گزینه ۳

برای محاسبه‌ی انتگرال عبارت  $\tan^2 x$  به آن عدد یک را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int 1 \, dx$$

$$= \tan x - x + c \Rightarrow f(x) = \tan x - x + c$$

چون  $f(0) = -1$  است، بنابراین:

$$-1 = \tan 0 - 0 + c \Rightarrow c = -1$$

پس  $f(x) = \tan x - x - 1$ ، بنابراین:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + c, \quad \int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + c}$$
 این دو انتگرال را به خاطر داشته باشید:

۲۵. گزینه ۳

$$\int \left(\frac{x^2+2}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2x^{-3}\right) dx = \ln x + 2 \times \frac{1}{-2} x^{-2} + c = \ln x - \frac{1}{x^2} + c$$

$$= \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2} + c \Rightarrow f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \Rightarrow f'(e) = 2e + e = 3e$$

۲۶. گزینه ۴

$$y = \int_{u(x)}^{g(x)} f(t) dt \rightarrow y' = g'(x)f(g(x)) - u'(x)f(u(x))$$

$$F'(x) = 0 - e^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = 2xe^{-x^2} \Rightarrow F''(1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

۲۷. گزینه ۴

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط مماس: } m = f'(x) = 1 \times \frac{1}{1+x^3} \xrightarrow{x=1} m = \frac{1}{2} \\ \text{نقطه تماس: } A(1, 0) \Rightarrow f(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \Rightarrow A(1, 0) \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y = x - 1$$

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x), \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$
 توجه کنید:

۲۸. گزینه ۲

$$\begin{cases} y = 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$S = \left| \int_0^1 (2x^2 - 2) dx \right| = \left| \left(2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2x\right) \Big|_0^1 \right| = \left| \left(\frac{2}{3}(1) - 2\right) - 0 \right| = \left| \frac{2}{3} - 2 \right| = \frac{4}{3}$$
 مساحت قسمت هاشورخورده

$$\int_{-1}^3 (x + f(x)) dx = \int_{-1}^3 x dx + \int_{-1}^3 f(x) dx$$

هرکدام از انتگرال‌ها را به طور جداگانه حساب کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^3 x dx &= \left( \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \int_{-1}^3 f(x) dx &= \underbrace{\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx}_{\circ} + \int_1^3 f(x) dx = -\left( \frac{1 \times 2}{2} \right) = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 + (-1) = 3$$

دقت کنید دو مثلثی که از ۱- تا ۰ و از ۰ تا ۱ ساخته می‌شوند با هم مساوی بوده برای همین علت جمع دو انتگرال معین از ۱- تا ۰ و از ۰ تا ۱ تابع برابر صفر گردید.

۳۰. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int \frac{(x\sqrt{x} - x)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^3 - 2x^2\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left( x^{\frac{5}{2}} - 2x^2 + x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} - 2 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c \\ &= 2x^2 \left( \frac{1}{7} x \sqrt{x} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{5} \sqrt{x} \right) + c \rightarrow f(x) = \frac{1}{7} x \sqrt{x} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{5} \sqrt{x} \end{aligned}$$

۳۱. گزینه ۴

ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$2 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 4: \begin{array}{c|c} x & 2 - \sqrt{x} \\ \hline 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 9 & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^9 |2 - \sqrt{x}| dx &= \int_0^4 (2 - x^{\frac{1}{2}}) dx + \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} - 2) dx \\ &= \left( 2x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_0^4 + \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x \right) \Big|_4^9 = ((8 - \frac{2}{3} \times 4 \times 2) - 0) + ((\frac{2}{3} \times 9 \times 3 - 18) - (\frac{2}{3} \times 4 \times 2 - 8)) \\ &= (8 - \frac{16}{3}) + (0 + 8 - \frac{16}{3}) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

توجه کنید:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$$

۳۲. گزینه ۲ باتوجه به اینکه  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  می‌باشد مسأله را حل می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

در ناحیه‌ی اول کسینوس مثبت است و در ناحیه‌ی دوم کسینوس منفی است. پس داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx = (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) + \left( -\sin \pi - \left( -\sin \frac{\pi}{2} \right) \right) = (1 - 0) + (0 + 1) = 2 \end{aligned}$$

۳۳. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2}} dx &= \int \left( \frac{\sqrt{x^2}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{4x}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int \left( \sqrt{x}^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \sqrt{x} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - 4 \times \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} (x^{\frac{1}{2}} - 4) + c \rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x \end{aligned}$$

۳۴. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x} \right)^2 dx &= \int \left( x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left( x - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - 2 \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{-1} x^{-1} + c = \frac{1}{2} x^2 - 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + c \\ &= \frac{x^3 - 8x\sqrt{x} - 2}{2x} + c \rightarrow f(x) = x^3 - 8x\sqrt{x} - 2 \end{aligned}$$

۳۵. گزینه ۴

$1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$

 می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos x)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(2 \sin^2 \frac{x}{2})} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx \end{aligned}$$

در ناحیه‌ی اول و دوم دایره‌ی مثلثاتی، سینوس مثبت است.  $0 < x < 2\pi \rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \pi \rightarrow$

$$\text{پس: } \int_0^{2\pi} 2 \overbrace{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}^{+} dx = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{x}{2} dx = \left( -4 \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = (-4 \cos \pi) - (-4 \cos 0) = 4 + 4 = 8$$

توجه کنید:  $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

۳۶. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left( \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{4}{\sqrt{x}} + c = \frac{2}{5} \sqrt{x^2} (\sqrt{x^3} - 1) + c = \frac{2}{5} \sqrt{x^2} (x^{\frac{3}{2}} - 1) + c \rightarrow f(x) \\ &= x^{\frac{5}{2}} - 4 \end{aligned}$$

۳۷. گزینه ۲

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx &= \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int ((x+2)^{\frac{1}{2}} - (x+2)^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} (x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} (x+2)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} (x+2) \sqrt{x+2} - 2 \sqrt{x+2} + c \\ &= \sqrt{x+2} \left( \frac{2}{3} (x+2) - 2 \right) + c = \sqrt{x+2} \left( \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} \right) + c \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} x - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

۳۸. گزینه ۲

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx &= \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left( \frac{1}{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 \\ &= \left( \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} \right) \Big|_0^4 = \left( \frac{1}{3} (9)(3) \right) - \left( \frac{1}{3} (1)(1) \right) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\end{aligned}$$

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a} \times \frac{1}{m+1} (ax+b)^{m+1} + c, m \neq -1$$

۳۹. گزینه ۳

$$\begin{aligned}\int (\Delta x \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + 4) dx &= \int (\Delta x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + 4) dx \\ &= \int (\Delta x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} + 4) dx = \Delta \times \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{-1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + 4x + c \\ &= 2x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 4x + c = \frac{2x^3 + 2 + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + c \\ &= \frac{2(x^3 + 1 + 2x\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + c = \frac{2(x\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} + c \rightarrow f(x) = (x\sqrt{x} + 1)^2\end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{می دانیم:} \quad \text{۴۰. گزینه ۱}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} 2x &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} |\cos x| dx \\ &= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx}_{\text{ناحیه اول}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-\cos x) dx}_{\text{ناحیه دوم}} = (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= (1 - 0) + \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

۴۱. گزینه ۴

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+e^x)^2}{e^x} dx &= \int \frac{1+e^{2x}+2e^x}{e^x} dx = \int \left( \frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{2e^x}{e^x} \right) dx \\ &= \int (e^{-x} + e^x + 2) dx = -e^{-x} + e^x + 2x + c = e^{-x}(-1 + \frac{e^x}{e^{-x}} + \frac{2x}{e^{-x}}) + c = e^{-x}(-1 + e^{2x} + 2x \cdot e^x) \\ &= e^{-x}(-1 + e^x(e^x + 2x)) + c \rightarrow f(x) = -1 + e^x(e^x + 2x) \end{aligned}$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \quad \text{توجه کنید:}$$

۴۲. گزینه ۲

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{2x+1} F\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow G'(x) = \frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} F\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x^2} \cdot F'\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{x}{2x+1} \\ \rightarrow G'(x) &= \frac{1}{(2x+1)^2} F\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x} F'\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{1}{2x+1} \\ \rightarrow G'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} F(2) - F'(2) \quad (I) \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t^2+1} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2+1} \rightarrow \begin{cases} F(2) = \int_2^2 \frac{dt}{t^2+1} = 0 \\ F'(2) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(I) : G'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\circ) - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\left( \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = g'(x) \cdot f'(g(x)), \quad \int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{توجه کنید:}$$

۴۳. گزینه ۱ ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = \frac{3x^2 - x\sqrt{x}}{x - 3x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(3x\sqrt{x} - x)}{-(3x\sqrt{x} - x)} = -\sqrt{x}$$

$$\int_1^4 -\sqrt{x} dx = \int_1^4 -x^{\frac{1}{2}} dx = \left( \frac{-1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \left( \frac{-2}{3} x \cdot \sqrt{x} \right) \Big|_1^4$$

$$= \left( -\frac{2}{3}(4)(2) \right) - \left( -\frac{2}{3}(1)(1) \right) = \frac{-16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-14}{3}$$

۴۴. گزینه ۲ بعد از عدد یک، اولین عددی که داخل جزء صحیح می کند عدد ۲ می باشد.

$$1 < x < 2 \rightarrow [x] = 1, \quad \underbrace{|2-x|}_{+} = 2-x$$

$$2 < x < 3 \rightarrow [x] = 2, \quad \underbrace{|2-x|}_{-} = -2+x$$

$$\int_1^3 (x + |2-x|)[x] dx = \int_1^2 (x+2-x)(1) dx + \int_2^3 (x-2+x)(2) dx$$

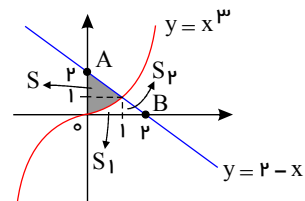
$$= \int_1^2 2 dx + \int_2^3 (2x-2) dx = (2x) \Big|_1^2 + (2x^2-2x) \Big|_2^3 = (4-2) + (6-0) = 8$$

۴۵. گزینه ۱ ابتدا طول نقطه ی تلاقی دو تابع را پیدا می کنیم.

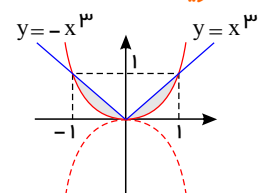
$$x^3 = 2 - x \rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب مساوی صفر است}} x = 1$$

$$SOAB = S + S_1 + S_2 \rightarrow \frac{2 \times 2}{2} = S + \int_0^1 x^3 dx + \frac{1 \times 1}{2}$$

$$\rightarrow 2 = S + \left( \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = S + \left( \frac{1}{4} - 0 \right) \rightarrow S = \frac{5}{4}$$



۴۶. گزینه ۲



$$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

$$x^2 |x| = |x| \rightarrow |x| (x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

چون، شکل نسبت به محور yها متقارن است کافی است مساحت بین دو تابع را بین صفر تا یک حساب کنیم و جواب را دو برابر کنیم.

$$\int_0^1 (|x| - x^2 |x|) dx = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{4}$$

بنابراین، مساحت خواسته شده برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$  است.

۴۷. گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال می گیریم}} f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \ln|x| + c$$

$$\xrightarrow{f(1)=0} 0 = \frac{1}{3} + \underbrace{\ln 1}_0 + c \rightarrow c = -\frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \ln x - \frac{1}{3}$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{3} (\sqrt{e})^3 + \ln \sqrt{e} - \frac{1}{3} = \frac{e}{3} + \frac{1}{2} \ln e - \frac{1}{3} = \frac{e}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{e}{3}$$

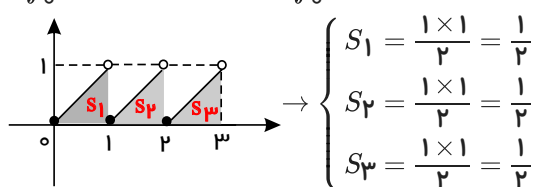
توجه کنید که  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$  می باشد.

۴۸. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \int_0^3 |[x] - 2| dx &= \int_0^1 \underbrace{|[x] - 2|}_{0} dx + \int_1^2 \underbrace{|[x] - 2|}_{1} dx + \int_2^3 \underbrace{|[x] - 2|}_{2} dx \\ &= \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx = (0x) \Big|_0^1 + (x) \Big|_1^2 + (2x) \Big|_2^3 = (0 - 0) + (2 - 1) + (6 - 4) = 3 \end{aligned}$$

۴۹. گزینه ۲

$$2 \int_0^3 (4x - 3[x]) dx = 8 \int_0^3 (x - [x]) dx$$



$$8 \int_0^3 (x - [x]) dx = 8 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 8 \left( \frac{3}{2} \right) = 12$$



۵۰. گزینه ۱

$$\boxed{\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt\right)' = g'(x) \cdot f(g(x))} \text{ می‌دانیم:}$$

$$F(x) = \int_0^x t^3 \cdot e^{t^2} dt \rightarrow F'(x) = x^3 \cdot (x^2)^3 \cdot e^{x^2} = x^9 \cdot e^{x^2} \rightarrow F'(1) = 1e^1$$

$$F''(x) = (14x^6) \cdot e^{x^2} + (x^9 \cdot e^{x^2})' \cdot 2x \rightarrow F''(1) = 14e^1 + 18e^1 = 32e^1$$

$$\text{پس: } F'(1) + F''(1) = 32e^1$$

۵۱. گزینه ۱

$$\int \frac{x^2 - 3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \left( \frac{x^2}{\sqrt[4]{x}} - \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \int \left( \frac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} \right) dx = \int (x^{\frac{7}{4}} - 3x^{\frac{5}{4}}) dx = \frac{1}{\frac{11}{4}} x^{\frac{11}{4}} - 3$$

$$\times \frac{1}{9} x^{\frac{9}{4}} + c$$

$$= \frac{4}{11} x^{\frac{11}{4}} - \frac{4}{3} x^{\frac{9}{4}} + c = x \left( \frac{4}{11} x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3} x^{\frac{5}{4}} \right) + c \rightarrow f(x) = \frac{4}{11} x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3} x^{\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c, a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)} \text{ می‌دانیم: } ۵۲. \text{گزینه ۳}$$

$$\int \frac{e^{3x+1}}{e^{2x} - e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} + 1 - e^x)}{(e^{2x} - e^x + 1)} dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + c$$

۵۳. گزینه ۱

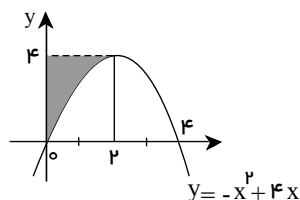
$$(x \ln x)' = 1 + \ln x \rightarrow \int (1 + \ln x) dx = x \ln x + c$$

اکنون به کمک راهنمایی که در صورت سؤال، مطرح شده است حاصل انتگرال را بدست می‌آوریم.

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e ((1 + \ln x) - 1) dx = \int_1^e (1 + \ln x) dx - \int_1^e 1 dx$$

$$= (x \ln x) \Big|_1^e - (x) \Big|_1^e = (e \ln e - 0) - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

۵۴. گزینه ۱



$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \xrightarrow{\text{تابع}} y_s = -4 + 8 = 4$$

$$\text{مساحت مستطیل} - \left| \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx \right|$$

$$= (4 \times 2) - \left| \left( -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = 8 - \left| \left( -\frac{8}{3} + 8 \right) - 0 \right| = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

۵۵. گزینه ۲

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 1 + \tan^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = (x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (\tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) + (1 - 0) = \frac{\pi}{4} + 1$$

۵۶. گزینه ۲

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^x - 2| dx &= \int_0^1 \underbrace{|x^0 - 2|}_{-1} dx + \int_1^2 \underbrace{|x^1 - 2|}_{-} dx \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = (x) \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) \Big|_1^2 = (1 - 0) + (2 - \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

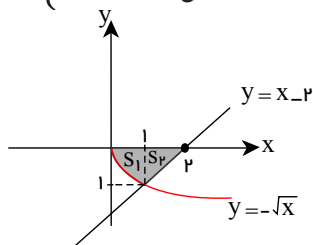
۵۷. گزینه ۱

$$\begin{aligned}\int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} dx \stackrel{\text{تفکیک}}{=} \int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= \int (1 - (x+1)^{-2}) dx = x - \frac{1}{-1}(x+1)^{-1} + c = x + \frac{1}{x+1} + c = \frac{x^2+x+1}{x+1} + c \rightarrow f(x) = x^2+x+1\end{aligned}$$

۵۸. گزینه ۴  $y = -\sqrt{x} \rightarrow$  (چون به قسمتی از منحنی که در پائین محور  $x$  ها است نیاز داریم)  $y^2 = x \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$  ابتدا باید نقطه‌ی تلاقی خط و منحنی را بدست آوریم.

توان  $x - 2 = -\sqrt{x} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$  (غ ق ق در معادله صدق نمی‌کند)



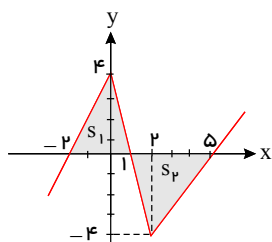
$$\begin{aligned}S &= S_1 + S_2 = \left| \int_0^1 -\sqrt{x} dx \right| + \frac{1 \times 1}{2} = \left| \int_0^1 -x^{\frac{1}{2}} dx \right| + \frac{1}{2} = \left| \frac{-1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right| + \frac{1}{2} = \left| \left(-\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right) \right|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ &+ \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

۵۹. گزینه ۳ برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع در  $x = 2$  چه مقدار پائین آمده است باید معادله‌ی خطی را که از دو نقطه  $A \Big|_4^0$  و

$B \Big|_0^1$  می‌گذرد را بنویسیم.

$$AB: \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \rightarrow \frac{y-4}{x-4} = \frac{4}{-1} \rightarrow y-4 = -4x \rightarrow y = -4x+4$$

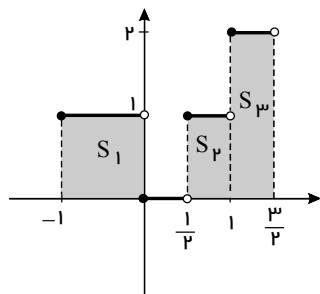
$$\begin{aligned}x=2 &\rightarrow y = -4\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{3 \times 4}{2} = 6 \\ \rightarrow S_2 &= \frac{4 \times 4}{2} = 8\end{aligned}$$

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = 6 - 8 = -2$$

۶۰. گزینه ۴ کافی است در بازه  $(-1, 0)$ ، تابع  $y = -[x]$  و در بازه‌ی  $(0, \frac{3}{4})$  تابع  $y = [2x]$  را رسم کنیم.



$$S_1 = 1 \times 1 = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\int_{-1}^{3/2} f(x) dx = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \quad \sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \quad \text{می دانیم: ۳ گزینه ۶۱}$$

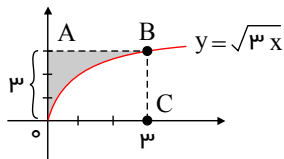
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int 2 \sin^2 x dx = -\cos 2x + c$$

$$\text{توجه کنید } \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c \text{ می باشد.}$$

۶۲. گزینه ۲

$$y = \sqrt{3x} \xrightarrow{y=3} 3 = \sqrt{3x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 = 3x \rightarrow x = 3$$

(مساحت محصور بین منحنی و محور طول از ۰ تا ۳) - (مساحت مربع) = مساحت قسمت هاشور خورده

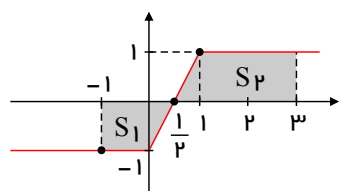


$$= 9 - \int_0^3 \sqrt{3x} dx = 9 - \int_0^3 \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} dx = 9 - \sqrt{3} \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} dx = 9 - \sqrt{3} \left( \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= 9 - \sqrt{3} \left( \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} \right) \Big|_0^3 = 9 - \sqrt{3} (2\sqrt{3} - 0) = 9 - 6 = 3$$

۶۳. گزینه ۱

تابع  $y = |x| - |x-1|$  یک تابع آبشاری می باشد، آن را رسم می کنیم.



$$S_1 = \frac{(\frac{3}{2} + 1)(1)}{2} = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \frac{(\frac{5}{2} + 2)(1)}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow \int_{-1}^3 (|x| - |x-1|) dx = -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

۶۴. گزینه ۴

$$\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx = \int_{-1}^0 (\underbrace{|3x|}_{-} - \underbrace{[x]}_{-1}) dx + \int_0^1 (\underbrace{|3x|}_{+} - \underbrace{[x]}_{0}) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-3x + 1) dx + \int_0^1 3x dx = \left( -\frac{3}{2} x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{3}{2} x^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= (0 + \frac{5}{2}) + (\frac{3}{2} - 0) = 4$$

۶۵. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx \\ \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \left( \frac{x\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + c = \frac{1}{\sqrt{x}}(2x+2) + c \rightarrow f(x) = 2x+2 \end{aligned}$$

۶۶. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 [x] |x| dx &= \int_{-1}^0 \underbrace{[x]}_{-1} \underbrace{|x|}_{\overline{x}} dx + \int_0^1 \underbrace{[x]}_0 |x| dx + \int_1^2 \underbrace{[x]}_1 \underbrace{|x|}_{\overline{x}} dx \\ &= \int_{-1}^0 x dx + \int_1^2 x dx = \left( \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^2 = \left( 0 - \frac{1}{2} \right) + \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

۶۷. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \boxed{\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c, \quad \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c} \text{ می‌دانیم:} \\ \int (\tan x + 2 \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 4 \cot^2 x + 4) dx = \int (1 + \tan^2 x + 4 \cot^2 x + 4 - 1) dx \\ = \int (1 + \tan^2 x) dx + 4 \int (1 + \cot^2 x) dx - \int dx = \tan x - 4 \cot x - x + c = \tan x - \frac{4}{\tan x} - x + c \\ = \frac{\tan^3 x - 4 - x \tan x}{\tan x} + c \rightarrow f(x) = \tan^3 x - x \tan x - 4 \end{aligned}$$

۶۸. گزینه ۲ ابتدا با محدوده بندی، جزء صحیح را حذف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2 - x}{x - [x]} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 - x}{x} dx + \int_1^2 \frac{\overbrace{x^2 - x}^{x(x-1)}}{x-1} dx = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 x dx \\ &= \left( \frac{1}{2} x^2 - x \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^2 = \left( \frac{1}{2} - 1 - 0 \right) + \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

۶۹. گزینه ۳ توجه کنید که  $\int_a^a f(t) dt = 0$  و  $\left( \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = g'(x) \cdot f(g(x))$  است.

بنا به مشتق توابع مرکب داریم:

$$\begin{aligned} y = f\left(\frac{2}{x}\right) &\Rightarrow y' = \frac{-2}{x^2} f'\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow y'(1) = \frac{-2}{1} f'(2) = -2 f'(2) \quad (*) \\ f(x) = x^2 \int_2^x \frac{t}{t+1} dt &\Rightarrow f'(x) = 2x \int_2^x \frac{t}{t+1} dt + \frac{x}{x+1} \cdot x^2 \rightarrow f'(2) = 2 \underbrace{\int_2^2 \frac{t}{t+1} dt}_{=0} + \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$(*) \quad y'(1) = -2 f'(2) = -2 \times \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$$

۷۰. گزینه ۱ با ایجاد عبارت موجود در مخرج کسر و تفکیک کسر داده شده، حاصل انتگرال را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}\int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} dx \\&= \int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \int (1 - (x+1)^{-2}) dx = x - \frac{1}{-1} (x+1)^{-1} + c \\&= x + \frac{1}{x+1} + c = \frac{x^2+x+1}{x+1} + c \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 1\end{aligned}$$

۷۱. گزینه ۴ انتگرال، عکس عمل مشتق است.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= x\sqrt[3]{x} + c \rightarrow f(x) = (x\sqrt[3]{x} + c)' = (x\frac{4}{3} + c)' = \frac{4}{3} x\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \\ \text{پس: } \int \frac{4}{f(x)} dx &= \int \frac{4}{\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}} dx = 6 \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 6 \times \frac{1}{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + c' = 9\sqrt[3]{x^2} + c'\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a, \quad \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c} \quad \text{۷۲. گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$\begin{aligned}A - B &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^2 x - \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\cos 2x \, dx \\&= \left( -\frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c, \quad n \ln a = \ln a^n} \quad \text{۷۳. گزینه ۲ می‌دانیم:}$$

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{2}x - 2 \times \frac{1}{x} \right) dx = \left( \frac{1}{4}x^2 - 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = (1 - 2 \ln 2) - \left( \frac{1}{4} - 2 \ln 1 \right) = \frac{3}{4} - 2 \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 4$$

۷۴. گزینه ۴

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |[x] + x| \, dx &= \int_{-1}^0 \underbrace{|-x+1|}_{+} \, dx + \int_0^1 |0+x| \, dx = \int_{-1}^0 (-x+1) \, dx + \int_0^1 x \, dx \\&= \left( -\frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = (0 - (-\frac{1}{2} - 1)) + (\frac{1}{2} - 0) = \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$

۷۵. گزینه ۱

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \rightarrow f'(x) = 2x\frac{4}{3} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} f(x) = 2 \times \frac{1}{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} - 2 \times \frac{1}{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + x + c$$

$$\rightarrow f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + c \xrightarrow{f(1)=2} 2 = 3 - 3 + 1 + c \rightarrow c = 1$$

$$\text{پس: } f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1 \rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = 3\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + 1$$

$$\rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{128} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3-96+144}{128} = \frac{51}{128}$$

۷۶. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x}{x + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} dx = \int \frac{x(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx = \int \sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}-1) dx = \int (x - \sqrt{x})(x+1) dx \\ &= \int (x^2 + x - x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = x\sqrt{x} \left( \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{5}x - \frac{2}{3} \right) + c \rightarrow f(0) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$f(x)$

۷۷. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad \int (1 + \tan^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx = \left( \frac{1}{2} \times 2 \tan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

۷۸. گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\left( \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = g'(x) \cdot f(g(x))$$

$$G(x) = \int_2^{x^2+1} t \cos \pi t dt \rightarrow G'(x) = 2x \cdot (x^2 + 1) \cdot \cos \pi(x^2 + 1)$$

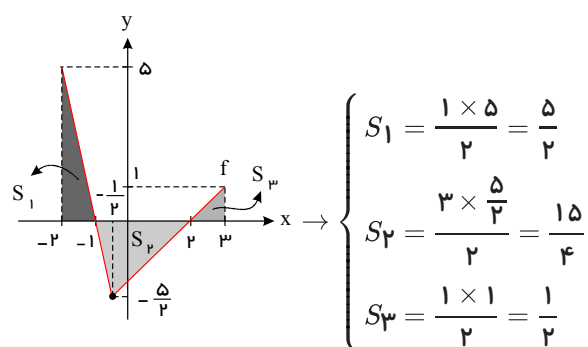
$$\rightarrow m_{\text{ماس}} = G'(1) = 2(2) \cos 2\pi = 4 \rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{4}$$

۷۹. گزینه ۲ باتوجه به شکل، تابع  $f$  از دو خط تشکیل شده است که معادله‌ی هر کدام از این خطوط را باید بدست آوریم تا مشخص شود تابع در  $x = 3$  و  $x = -2$  چه عرضی دارد.

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \rightarrow \frac{y}{x-2} = \frac{-1}{-1} = 1 \rightarrow y = x-2 \xrightarrow{x=3} y=1$$

$$\begin{cases} C \\ D \end{cases} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \frac{y-y_C}{x-x_C} = \frac{y_C-y_D}{x_C-x_D} \rightarrow \frac{y}{x+1} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5 \rightarrow y = -5x-5 \xrightarrow{x=-2} y=5$$

توجه کنید که عرض نقطه‌ی  $D$  از قرار دادن  $x = \frac{-1}{2}$  در  $y = x - 2$  بدست آمده است.



پس:  $\int_{-2}^3 f(x) dx = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = 3 - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}$

$e^{Lnu} = u, \quad \int \frac{1}{x} dx = Lnx + c, \quad Lna - Lnb = Ln \frac{a}{b}, \quad nLna = Lna^n$

۸۰. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\int_3^8 \frac{x e^{Ln(x-2)}}{x^2-4} dx = \int_3^8 \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} dx = \int_3^8 \frac{x}{x+2} dx = \int_3^8 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$= (x - 2Ln(x+2)) \Big|_3^8 = (8 - 2Ln10) - (3 - 2Ln5) = 8 - 2Ln10 - 3 + 2Ln5$$

$$= 5 - 2(Ln10 - Ln5) = 5 - 2Ln \frac{10}{5} = 5 - 2Ln2 = 5 - Ln4$$

توجه کنید:

$$\frac{x}{-x-2} \begin{vmatrix} x+2 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

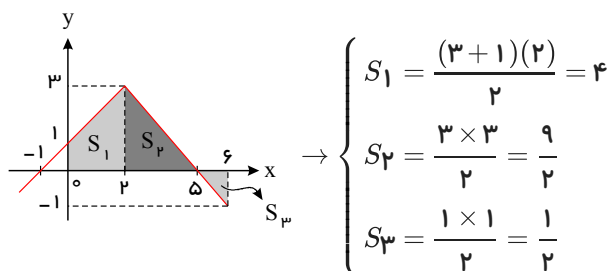
$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

۸۱. گزینه ۲ می‌دانیم:

معادله‌ی دو خط تابع  $f(x)$  را باید بدست آوریم تا مشخص شود که در  $x = 6$  و  $x = 0$  تابع دارای چه عرضی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 3 \end{array} \rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \rightarrow \frac{y}{x-5} = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow y = -x+5 \xrightarrow{x=6} y = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \\ D \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \rightarrow \frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_B-y_D}{x_B-x_D} \rightarrow \frac{y-3}{x-2} = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow y-3 = x-2 \rightarrow y = x+1 \xrightarrow{x=0} y = 1$$



$$\int_6^0 f(x) dx = - \int_0^6 f(x) dx = -(4 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2}) = -8$$

$$\left( \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = g'(x) \cdot f(g(x)) , \int_a^a f(t) dt = 0 , (uv)' = u'v + v'u \quad \text{۸۲. گزینه ۱ می دانیم:}$$

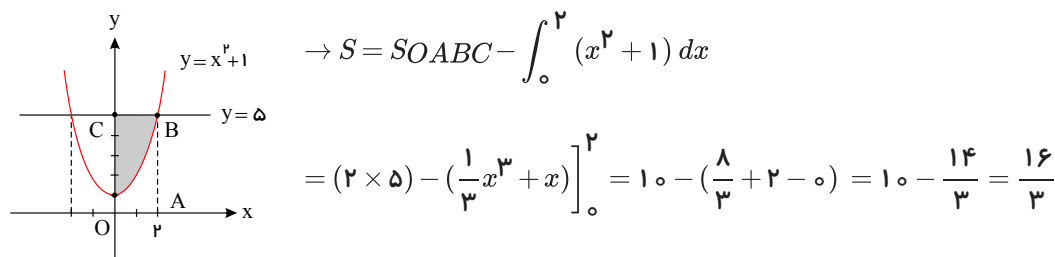
$$y = x^3 \cdot G(x) \rightarrow y' = 3x^2 G(x) + x^3 \cdot G'(x) \rightarrow y'(1) = 3G(1) + G'(1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} G(x) = \int_1^x \frac{\sin 2\pi t}{1+t^2} dt \rightarrow G(1) = \int_1^1 \frac{\sin 2\pi t}{1+t^2} dt = 0 \\ G(x) = \int_1^x \frac{\sin 2\pi t}{1+t^2} dt \rightarrow G'(x) = 1 \times \frac{\sin 2\pi x}{1+x^2} \rightarrow G'(1) = \frac{\sin 2\pi}{1+4} = 0 \end{cases}$$

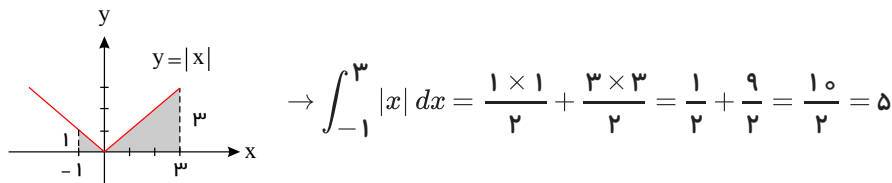
$$\text{پس: } y'(1) = 3G(1) + G'(1) = 3(0) + 0 = 0$$

۸۳. گزینه ۲ ابتدا باید محل تلاقی خط  $y = 5$  و منحنی  $y = x^2 + 1$  را بدست آوریم.

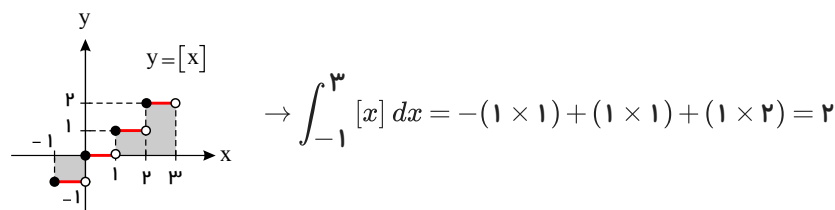
$$x^2 + 1 = 5 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$



۸۴. گزینه ۴ این سؤال را به کمک رسم شکل حل می کنیم.







$$\begin{aligned} \text{پس: } \int_{-1}^3 (2g(x) - 3f(x)) dx &= 2 \int_{-1}^3 g(x) dx - 3 \int_{-1}^3 f(x) dx \\ &= 2 \int_{-1}^3 |x| dx - 3 \int_{-1}^3 [x] dx = 2(5) - 3(2) = 4 \end{aligned}$$

۸۵. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x - \sqrt{x})(2\sqrt{x} + 1)}{x^2} dx &= \int \frac{4x\sqrt{x} + 2x - 2x - \sqrt{x}}{x^2} dx \\ &= \int \left( \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{x^2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right) dx = \int \left( 4x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = 4 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + c \\ &= 8\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c = \frac{8x + 2}{\sqrt{x}} + c \rightarrow f(x) = 8x + 2 \end{aligned}$$

۸۶. گزینه ۱ بعد از عدد یک اولین عددی که داخل جزء صحیح را صحیح می کند هشت می باشد.

$$\begin{aligned} \int_1^{27} [\sqrt[3]{x}] dx &= \int_1^8 \underbrace{[\sqrt[3]{x}]}_{1 < x < 8, 1 < \sqrt[3]{x} < 2} dx + \int_8^{27} \underbrace{[\sqrt[3]{x}]}_{8 < x < 27, 2 < \sqrt[3]{x} < 3} dx = \int_1^8 1 dx + \int_8^{27} 2 dx \\ &= (x)]_1^8 + (2x)]_8^{27} = (8 - 1) + (54 - 16) = 7 + 38 = 45 \end{aligned}$$

۸۷. گزینه ۳ کافی است که محل تلاقی دو نمودار را بدست آورده و سپس از قدر مطلق تفاضلشان، انتگرال بگیریم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \rightarrow y = \sqrt{x} \end{cases} \rightarrow x^2 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1 \\ S = \left| \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx \right| = \left| \int_0^1 \left( x^2 - x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right| = \left| \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \right|_0^1 = \left| \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) - 0 \right| = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۸۸. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 ||x| - 1| [x] dx &= \int_{-2}^{-1} ||\bar{x}| - 1| (-2) dx + \int_{-1}^0 ||\bar{x}| - 1| (-1) dx + \int_0^1 \underbrace{||x| - 1| (0)}_{\text{صفر}} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} -2|-x-1| dx + \int_{-1}^0 -|-x-1| dx = \int_{-2}^{-1} (2x+2) dx + \int_{-1}^0 (-x-1) dx \\ &= (x^2 + 2x)]_{-2}^{-1} + \left( -\frac{1}{2}x^2 - x \right)_{-1}^0 = ((1-2) - (4-4)) + (0 - (-\frac{1}{2} + 1)) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \sin ax dx = \frac{-1}{a} \cos ax + c} \quad \text{۸۹. گزینه ۲ می دانیم:}$$

دقت کنید به ازای  $x < 0$  داخل قدر مطلق منفی است و به ازای  $x > 0$  داخل قدر مطلق مثبت است.

$$\begin{aligned}
 S &= \left| \int_{-2}^0 x \overbrace{(-x)}^{\bar{}} dx \right| + \left| \int_0^1 x \overbrace{(x)}^{+} dx \right| + \left| \int_1^2 \sin \pi x dx \right| \\
 &= \left| \int_{-2}^0 -x^2 dx \right| + \left| \int_0^1 x^2 dx \right| + \left| \int_1^2 \sin \pi x dx \right| \\
 &= \left| \left( -\frac{1}{3} x^3 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left( \frac{1}{3} x^3 \right) \right|_0^1 + \left| \left( -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) \right|_1^2 = \left| 0 - \left( -\frac{8}{3} \right) \right| + \left| \frac{1}{3} - 0 \right| + \left| \frac{-1}{\pi} - \left( \frac{1}{\pi} \right) \right| \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} = 3 + \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

۹۰. گزینه ۳

می دانیم:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx &= \int \left( \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int \left( \frac{x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} \right) dx \\
 &= \int \left( 1 + \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = x + \ln x - 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + c = x + \ln x - 4\sqrt{x} + c \\
 &= x \left( 1 + \frac{\ln x}{x} - \underbrace{\frac{4\sqrt{x}}{x}}_{\sqrt{x}\sqrt{x}} \right) + c = x \left( 1 + \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) + c \rightarrow f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

۹۱. گزینه ۱ می دانیم:  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  ,  $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$  ,  $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$

$$\int \left( \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \right)^2 dx = \int \left( \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} \right)^2 dx = \int \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx = \int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$$

۹۲. گزینه ۳ ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 2 & +\infty \\ \hline x-2 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 (x - |x-2|) dx &= \int_0^2 (x - (-x+2)) dx + \int_2^4 (x - (x-2)) dx \\
 &= \int_0^2 (2x-2) dx + \int_2^4 2 dx = (x^2 - 2x) \Big|_0^2 + (2x) \Big|_2^4 = (4-4) - 0 + 8 - 4 = 4
 \end{aligned}$$

البته مسأله را می توان به کمک رسم شکل نیز حل کرد.

۹۳. گزینه ۴

$$\begin{aligned}
 \int \left( 3x + \frac{1}{x} \right)^2 dx &= \int \left( 9x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \right) dx = \int (9x^2 + x^{-2} + 6) dx \\
 &= 9 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{-1} x^{-1} + 6x + c = 3x^3 - \frac{1}{x} + 6x + c = \frac{3x^4 - 1 + 6x^2}{x} + c \rightarrow f(x) = 3x^4 + 6x^2 - 1
 \end{aligned}$$

۹۴. گزینه ۲ ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 : \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 2 & +\infty \\ \hline x-2 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\int_0^6 (|x-2|-2) dx = \int_0^2 (-x+2-2) dx + \int_2^6 (x-2-2) dx = \int_0^2 -x dx + \int_2^6 (x-4) dx$$

$$= \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 + \left( \frac{1}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_2^6 = (-2-0) + (-6+6) = -2$$

البته می‌توانید مسأله را از راه رسم شکل نیز حل کنید.

۹۵. گزینه ۳

$$\int_{-1}^a (3x^2 + 12x + 12) dx = \int_{-1}^a 3(x^2 + 4x + 4) dx = \int_{-1}^a 3(x+2)^2 dx$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} (x+2)^3 \Big|_{-1}^a = (a+2)^3 - 1 = 124 \rightarrow (a+2)^3 = 125 \rightarrow a+2 = 5 \rightarrow a = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\int \frac{1+x^6}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)} dx = \int (1-x^2+x^4) dx$$

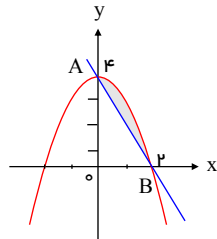
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + c = x(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4) + c$$

$$\text{پس } f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 \rightarrow f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-5+3}{15} = \frac{13}{15}$$

۹۷. گزینه ۱ ابتدا نقاط تلاقی نمودار تابع  $y = 4 - x^2$  را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 4 - 0 \rightarrow y = 4$$



$$\rightarrow S = \int_0^2 (4 - x^2) dx - S_{\triangle OAB} = \left( 4x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 - \frac{4 \times 2}{2}$$

$$= \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - 0 - 4 = \frac{4}{3}$$

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a \quad \text{می‌دانیم:}$$

یک طاق از منحنی  $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$  یعنی فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی تقاطع متوالی منحنی با محور  $x$  ها.

$$y = \sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{2} |\sin x| = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi$$

$$S = \left| \int_0^\pi \sqrt{2} \underbrace{|\sin x|}_{\sin x} dx \right| = \left| \int_0^\pi \sqrt{2} \sin x dx \right| = \left| (-\sqrt{2} \cos x) \Big|_0^\pi \right| = \left| -\sqrt{2}(-1) - (-\sqrt{2})(1) \right| = 2\sqrt{2}$$

۹۹. گزینه ۳ برای محاسبه‌ی انتگرال‌های قدر مطلق، باید ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت کنیم.

$$1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 - \sqrt{x} & + & 0 & - \end{array}$$

$$\int_0^4 |1 - \sqrt{x}| dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (-1 + \sqrt{x}) dx = \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{2}}) dx + \int_1^4 (-1 + x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \left( x - \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 + \left( -x + \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \left( x - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 + \left( -x + \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_1^4$$

$$= \left( 1 - \frac{2}{3} \right) - 0 + \left( -4 + \frac{16}{3} \right) - \left( -1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

۱۰۰. گزینه ۳ می‌دانیم که  $\sqrt{(x^2 - 2x)^2} = |x^2 - 2x|$  است. اکنون باید عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت کنیم.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \rightarrow \frac{x}{x^2 - 2x} \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\int_0^4 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \left( -\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 + \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right) \Big|_2^4$$

$$= \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) - 0 + \left( \frac{64}{3} - 16 \right) - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) = -\frac{8}{3} + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 8 = 16 - 8 = 8$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۴۶۲۰۱۶

۴ -۵	۳ -۴	۲ -۳	۴ -۲	۳ -۱
۴ -۱۰	۳ -۹	۲ -۸	۴ -۷	۳ -۶
۱ -۱۵	۲ -۱۴	۱ -۱۳	۱ -۱۲	۲ -۱۱
۳ -۲۰	۴ -۱۹	۳ -۱۸	۱ -۱۷	۱ -۱۶
۳ -۲۵	۳ -۲۴	۱ -۲۳	۲ -۲۲	۱ -۲۱
۳ -۳۰	۲ -۲۹	۲ -۲۸	۴ -۲۷	۴ -۲۶
۴ -۳۵	۳ -۳۴	۳ -۳۳	۲ -۳۲	۴ -۳۱
۱ -۴۰	۳ -۳۹	۲ -۳۸	۲ -۳۷	۳ -۳۶
۱ -۴۵	۲ -۴۴	۱ -۴۳	۲ -۴۲	۴ -۴۱
۱ -۵۰	۲ -۴۹	۲ -۴۸	۴ -۴۷	۲ -۴۶
۲ -۵۵	۱ -۵۴	۱ -۵۳	۳ -۵۲	۱ -۵۱
۴ -۶۰	۳ -۵۹	۴ -۵۸	۱ -۵۷	۲ -۵۶
۱ -۶۵	۴ -۶۴	۱ -۶۳	۲ -۶۲	۳ -۶۱
۱ -۷۰	۳ -۶۹	۲ -۶۸	۱ -۶۷	۲ -۶۶
۱ -۷۵	۴ -۷۴	۲ -۷۳	۳ -۷۲	۴ -۷۱
۳ -۸۰	۲ -۷۹	۲ -۷۸	۳ -۷۷	۲ -۷۶
۳ -۸۵	۴ -۸۴	۲ -۸۳	۱ -۸۲	۲ -۸۱
۳ -۹۰	۲ -۸۹	۳ -۸۸	۳ -۸۷	۱ -۸۶
۳ -۹۵	۲ -۹۴	۴ -۹۳	۳ -۹۲	۱ -۹۱
۳ -۱۰۰	۳ -۹۹	۲ -۹۸	۱ -۹۷	۱ -۹۶