**بسمه تعالی**

**** خلاصه نکات درسی ****

**آزمون : جمع بندی**

**درس : ریاضی چهارم تجربی**

**نویسنده : یاسر خوشناموند – دانشجوی پزشکی دانشگاه ایران**

# توابع

**توابع درجه دوم(سهمی ها)**: فرم کلی آن ها به صورت **$ax^2+bx+c$** می باشد و نکات آن به صورت زیر است:

1_ اگر **$a>0$** ، دهانه(تقعر) نمودار رو به بالا و **min دار** است و نمودار تابع قطعا از ناحیه **اول و دوم** محورهای مختصات می گذرد. و اگر **$a<0$** ، دهانه(تقعر) نمودار رو به پایین و **max دار** است و نمودار تابع قطعا از ناحیه **سوم و چهارم** محورهای مختصات می گذرد.

2_ اگر **$c>0$** ، عرض از مبدا **مثبت** و اگر $c<0$، عرض از مبدا **منفی** است.

3_اگر $b>0$ ، نمودار تابع محور y ها را با شیب **مثبت** و اگر $b<0$ ،نمودار تابع محورy ها را با شیب **منفی** قطع می کند.

4_معادله محور تقارن تابع به صورت $\boldsymbol{x=\frac{-b}{2a}}$ و مختصات راس سهمی به صورت $\boldsymbol{x_S=(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})}$ می باشد.

5_ اگر **$a>0$ و $\Delta<0$** ، نمودار تابع همواره بالای محور xها و مقدار تابع همواره مثبت است و اگر **$a<0$ و $\Delta<0$**، نمودار تابع همواره پایین محور xها و مقدار تابع همواره منفی است.

6-اگر **$a>0$** و $\Delta<0$، نمودار تابع مماس بر محور xها و روبه بالا است. و اگر$a<0$ و $\Delta<0$ ،نمودار تابع مماس بر محورx ها و رو به پایین است.

8_ اگر $\frac{c}{a}<0$ ،سهمی از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می گذرد.

9_ اگر یک سهمی از دو نقطه هم عرض a و b بگذرد: $x_S=\frac{1}{2}(x_a+x_b)$.

معادلات درجه دوم: فرم کلی آنها به صورت $ax^2+bx+c=0$ می باشد. روش کلی حل آنها با استفاده از دلتا به صورت زیر می باشد : $\Delta=b^2-4ac$

ریشه های معادله به صورت $\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$ می باشد.

1_ اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی می باشد.

2_ اگر $\Delta=0$ معادله دارای ریشه مضاعف(یک ریشه) می باشد.

3_ اگر $\Delta<0$ باشد، معادله فاقد ریشه می باشد.

5_اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه های معادله باشند و مجموع ریشه ها را با S و ضرب آنها را با P نشان دهیم ، داریم:

$P=\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ و $S=\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{s + 2\sqrt{p}}$$

$$\left|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right| = \sqrt{s - 2\sqrt{p}}$$

6_ اگر $a+b+c=0$ ،یکی از ریشه ها **1** و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

7_ اگر $a+c=b$ ،یکی از ریشه ها **-1** و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

8_ اگر $\frac{c}{a}<0$، معادله دارای دو جواب مختلف العلامه است و اگر $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ ، معادله دارای دو جواب هم علامت است.

9_اگر یکی از ریشه های معادله درجه دومی با ضرایب گویا برابر $K+\sqrt{f}$ باشد، ریشه دیگر برابر $k-\sqrt{f}$ است .

10_ اگر S را مجموع ریشه ها و P را ضرب ریشه ها در نظر بگیریم، معادله درجه دوم به صورت $X^2-SX+P=0$ است.

**قدر مطلق و توابع قدر مطلقی:** $|a| = \begin{cases} -a, & a<0 \\ a, & a\geq 0 \end{cases}$

**نکات مربوط به قدرمطلق:**

1_ $|a| = |-a|$

2_ اگر a>0 و $|u| \leq a \leftrightarrow -a \leq u \leq a$

3_ اگر a>0 و $|u| \geq a \leftrightarrow u \geq a$ یا $u \leq -a$

4_ $a<u<b \leftrightarrow \left|u - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$

5_ u<a یا $u>b \leftrightarrow \left|u - \frac{a+b}{2}\right| > \frac{b-a}{2}$ تذکر: a<b

6_ $|a||b| = |ab|$

7_ $|a^2| = |a|^2$

8_ $|a+b| \leq |a| + |b|$

$\sqrt[2]{a^2} = |a|$ _9

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ _10

**توابع قدرمطلقی:** الف) رسم تابع $|f(x)|$ : قسمتی از نمودار که بالای محور x ها است بدون تغییر باقی می ماند وقسمتی از نمودار را که **پایین** محور x ها است را حذف کرده و **قرینه** آن را نسبت به محور **x ها** رسم می کنیم:

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

ب) رسم تابع $f(|x|)$ : قسمتی از نمودار که سمت راست محور y ها است بدون تغییر باقی می ماند و قسمتی از نمودار که سمت **چپ** محور y ها قرار دارد را حذف کرده و **قرینه** آن را نسبت به محور **y ها** رسم می کنیم. :

$$f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

**جزصحیح:** هر عدد از مجموع یک جزصحیح ( $[x]$) و یک جز اعشاری( $p_x$) تشکیل شده است: $x=p_x+[x]$

نکات مربوط به جزصحیح: (تذکر: در تمام موارد گفته شده برای جزصحیح، $k\in Z$ فرض شود.)

$[x] \leq x < [x]+1$ _1

$[x] \in Z$ _2

$[x] < k \leftrightarrow x < k$ _4

$[x] > k \leftrightarrow x \geq k+1$ _5

$[x] \geq k \leftrightarrow x \geq k$ _6

$[x] \leq k \leftrightarrow x < k+1$ _7

$0 \leq x - [x] < 1$ _8

$[x + k] = [x] + k$ _9

$[x] \geq [x^{2n}] \leftrightarrow x \epsilon \left[0 \text{ و } \sqrt[2n]{2}\right)$ _10

$[-x] = \begin{cases} -[x], x \in Z \\ -[x] - 1 \;\; x \notin Z \end{cases}$ _11

$[x] + [-x] = \begin{cases} 0, \;\; x \in Z \\ -1, \;\; x \notin Z \end{cases}$ _12

**توابع جزصحیح** : هر تابعی که بتوان دامنه آن را به چند بازه تقسیم کرد به طوری که تابع روی هر کدام از این بازه ها مقداری ثابت باشد را توابع جزصحیحی یا پله ای می گویند.

رسم تابع $y=[f(x)]$ : ابتدا تابع $y=f(x)$ را رسم می کنیم.سپس خطوطی موازی محور $x$ ها را به فاصله یک واحد از هم رسم می کنیم.محل تلاقی منحنی با خطوط رسم شده توپر و قسمتی از نمودار که بین دو خط متوالی است را روی خط پایین تصویر می کنیم. در زیر چند نمودار مهم آورده شده است:

**نکات:**

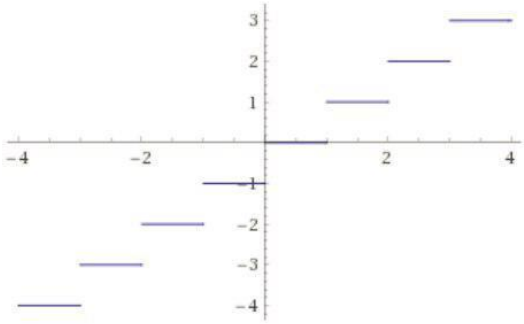
**1_ در تابع $y=m[kx]+n$ طول هر پله برابر $\frac{1}{|k|}$ است. اگر $K>0$ تابع صعودی و اگر $K<0$ تابع نزولی است.**

**2_ دامنه توابع جزصحیح $R$ و برد آن ها $Z$ است.**

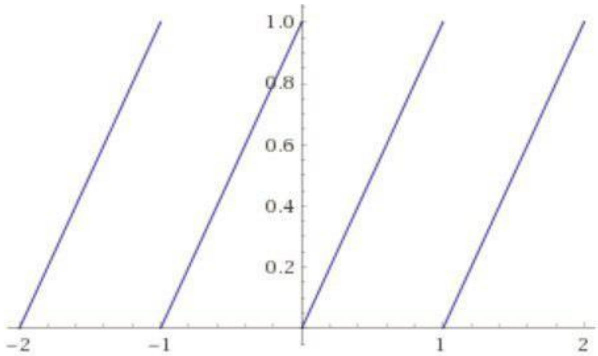
**3_ اگر $f(x)$ صعودی باشد آن گاه $[f(x)]$ نیز صعودی و اگر $f(x)$ نزولی باشد آن گاه $[f(x)]$ نیز نزولی است.**

نمودار چند تابع مهم در زیر آورده شده است:

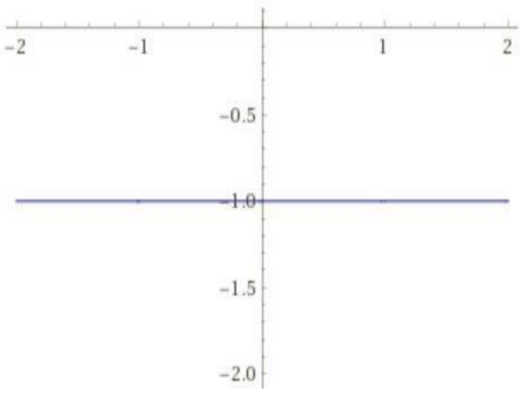
**y=$[x]$**




**Y=x-$[x]$**




**Y=$[x]+[-x]$**



**معادلات مثلثاتی:** ( $\alpha$ کوچک ترین زاویه ای که به ازای آن تساوی برقرار است)

1_ $\sin x = \sin\alpha \leftrightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

2_ $\cos x = \cos\alpha \leftrightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

3_ $\tan x = \tan\alpha \leftrightarrow x = k\pi + \alpha$

4_ $\cot x = \cot\alpha \leftrightarrow x = k\pi + \alpha$

معادلات خاص مثلثاتی(تذکر:این معادلات از فرمول های بالایی استنباط شده و باید با اثبات کردن حفظ شوند):

1_ $\sin x = 0 \ \leftrightarrow x = k\pi$

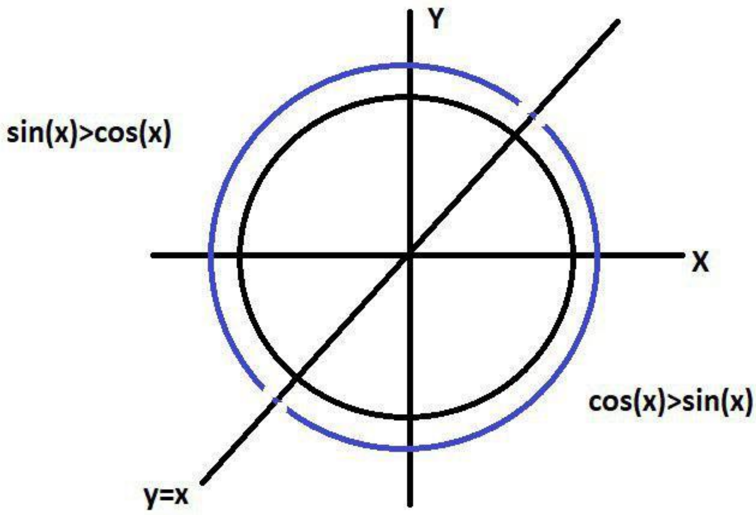
2_ $\sin x = 1 \ \leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

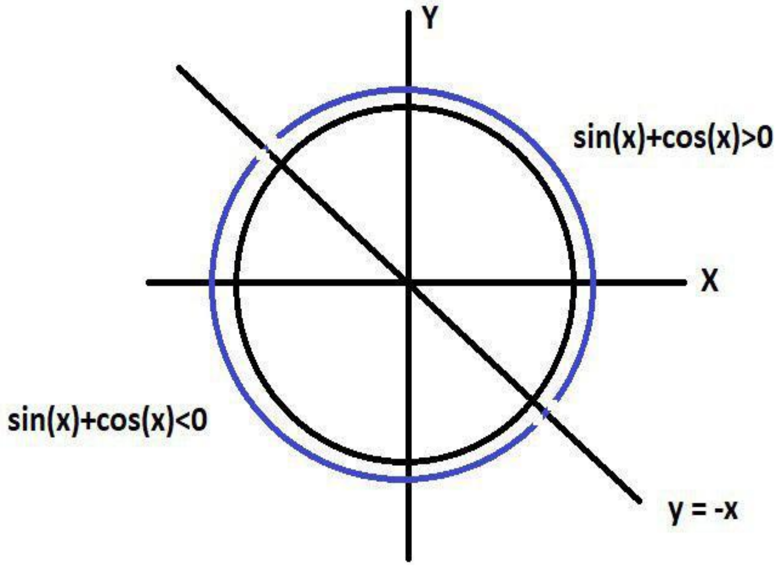
3_ $\sin x = -1 \ \leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ یا $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

4_ $\cos x = \ 0 \leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

5_ $\cos x = 1 \ \leftrightarrow x = 2k\pi$

6_ $\cos x = -1 \leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$




یکنوایی توابع: هرگاه $x_1$ و $x_2$ دو عضو از دامنه تابع f باشند :

1- صعودی ← $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

2_اکیدا صعودی ← $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3_نزولی ← $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

4_اکیدا نزولی ← $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**نکات**: 1_ اگر f **صعودی** باشد،آن گاه: ‎-f و $\frac{1}{f}$ **نزولی** است و $f^{-1}$ ، $f^n$ ،$\sqrt[n]{f}$ **صعودی** است.(تذکر: n باید **فرد** باشد)

2_ اگر f ن**زولی** باشد،آن گاه: ‎-f و$\frac{1}{f}$ **صعودی** است و $f^{-1}$ ، $f^{-1}$، $f^n$ ، $\sqrt[n]{f}$**نزولی** است.(تذکر:n باید **فرد** باشد)

3_ توابع **ثابت** ( y=k)،تنها توابع هم صعودی و هم نزولی هستند.

4_ اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد، f یکنوا است. و اگر تابع f اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد، f اکیدا یکنوا است.

5_ هر تابع اکیدا یکنوا، لزوما **یک به یک** هست و بالعکس.

6_ هر تابع اکیدا یکنوا، یکنوا نیز هست اما عکس آن صحیح نیست.

7_ در بازه هایی که مشتق تابع **مثبت** باشد تابع **صودی** و در بازه هایی که مشتق تابغ **منفی** باشد تابع **نزولی** است.

بررسی یکنوایی تابع مرکب: توابع صعودی را با علامت + و توابع نزولی را با علامت - در نظر گرفته و علامت ها را در هم ضرب می کنیم،اگر حاصل مثبت شد،تابع مرکب صعودی است و اگر حاصل منفی شد،تابع مرکب نزولی است.

مثال: اگر تابع f صعودی و تابع g نزولی باشد، وضعیت یکنوایی تابع fog را تعیین کنید: تابع صعودی f را با علامت + و تابع نزولی g را با علامت - در نظر می گیریم، ضرب علامت ها منفی است، در نتیجه تابع fog نیز نزولی است.

ترکیب توابع: اگر f و gدو تابع باشند، در صورتی که آن گاه تابع مرکب fog تشکیل می شود:

$(fog)(x)=f(g(x)) \quad x\in D_g \; g(x)\in D_f$

نکات مربوط به توابع مرکب: 1_ در حالت کلی، $fog\neq gof$است.

2_ اگر f وg وhسه تابع باشند، آن گاه داریم: **$(fog)oh = fo(goh)$**

3_ به ازای x عضو $D\in f$ ، $(f^{-1} of)(x)=x$ است و به ازای xعضو $D\in f^{-1}$ ، $(fof^{-1})=x$ است.

4_ اگر f و g یک به یک باشند، آن گاه fogنیز یک به یک ات.

5_ اگر fog یک به یک باشد، آن گاه g نیز یک به یک است ولی f لزوما یک به یک نیست.

6_ اگر f یک تابع از درجه m و g یک تابع از درجه n باشد، آن گاه تابع fog از درجه mn است.

مثال: اگر تابع f درجه دوم و تابع g درجه سوم باشد، آن گاه تابع fog از درجه شش است.

7_ $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

وارون یک تابع: قرینه نمودار یک تابع نسبت به نیمساز **ربع اول و سوم** را وارون آن می نامند که برای به دست آوردن آن باید جای y و x را عوض کرد و سپس y را محاسبه کرد.

نکته: 1_ شرط وارون پذیر بودن یک تابع یک به یک بودن آن است.

2_ اگر f و g وارون همدیگر باشند: $\mathbf{R_f=D_g}$ و $\mathbf{D_f=R_g}$

3_ وارون توابع **y=x و y=-x+c** روی خودشان می افتد.

4_ اگر دو تابع f و $f^{-1}$ در نقطه (a b) متقاطع باشند: f(a)=b و f(b)=a

5_ اگر (a b) مرکز تقارن تابع f باشد، آن گاه (b a) مرکز تقارن تابع $f^{-1}$ است.

**دنباله ها**

**دنباله حسابی:** فرم کلی: $a_1$، $a_1+d$، $a_1+2d$،....، $a_1+(n-1)d$

جمله عمومی: $a_n=a_1+(n-1)d$

مجموع جملات: $\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(a_1+(2n-1)d)$

نکات: 1_ اگر $d>0$، دنباله **صعودی** است. و اگر $d<0$، دنباله **نزولی** است.

2_ اگر $a_m$، $a_n$، $a_p$، $a_q$ جمله یک دنباله حسابی باشند و $m+n=p+q$ داریم: $a_m+a_n=a_p+a_q$

3_ اگر x و y و z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند: $y=\frac{x+z}{2}$ (y: واسطه حسابی بین x و z)

4_ اگر $a_m$ و $a_n$ دو جمله از یک دنباله هندسی باشند: $a_m-a_n=(m-n)d$

$1+2+3+\cdots=\frac{n(n+1)}{2}$ _5

$2+4+6+\cdots=n(n+1)$ _6 تذکر: موارد 5 و6و7 از فرمول های اصلی استنباط شده و بهتر است اثبات شوند.

$1+3+5+\cdots=n^2$ _7

دنباله هندسی: $a_1$ جمله اول q قدرنسبت دنباله است.

فرم کلی: $a_1$،$a_1q$،$a_1q^2$ ،...، $a_1q^{n-1}$

مجمع جملات: $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

نکات: 1_ اگر $a_m$ و $a_n$ دو جمله از یک دنباله هندسی باشند : $\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$

_2 اگر $a_m$،$a_n$،$a_p$،$a_q$ چهار جمله از یک دنباله هندسی باشند طوری که m+n=p+q داریم: $a_m\times a_n=a_p\times a_q$

_3 اگر $a_1>0$ و $q>1$ یا اینکه $a_1<0$ و $0<q<1$ آن گاه دنباله **صعودی** است.

_4 اگر $a_1<0$ و $q>1$ یا اینکه $a_1>0$ و $0<q<1$ آن گاه دنباله **نزولی** است.

_5 اگر a و b و c سه جمله متوالی از هندسی باشند آن گاه b واسطه هندسی بین a و c است و داریم: $b^2=ac$

_6 اگر وسط اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم محیط و طول n ضلعی های جدید یک دنباله هندسی با قدر نسبت $q=\cos\frac{\pi}{n}$ و مساحت n ضلعی های جدید یک دنباله هندسی با قدر نسبت $q=\cos^2\frac{\pi}{n}$ می سازند.

$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$ _7

_8 در یک دنباله هندسی با $|q|<1$ جملات دنباله مرتب کوچکتر می شوند و حد مجموع جملات دنباله برابر است با: $\frac{a_1}{1-q}$

**بررسی یکنوایی دنباله:**

_1 صعودی $\leftarrow$ $u_{n+1}\geq u_n$

_2 : اکیداصعودی $\leftarrow$ $u_{n+1}>u_n$

_3 نزولی $\leftarrow$ $u_{n+1}\leq u_n$

_4 اکیدانزولی $\leftarrow$ $u_{n+1}<u_n$

همگرایی دنباله: اگر حد یک دنباله در بی نهایت برابر عدد حقیقی L باشد ان گاه می گوییم دنباله هگرا به L است.در غیر این صورت دنباله واگرا است.

نکته:1_ دنباله ثابت هم صعودی است و هم نزولی

2_ اگر تمام جملات یک دنباله را در یک عدد منفی ضرب کنیم یکنوایی دنباله برعکس می شود.

کرانداری دنباله:

کران بالا: اگر $a$عدد حقیقی ثابتی باشد طوری که $u_n<a$ آن گاه را کران بالای دنباله می نامند.

کران پایین: اگر $a$ عدد حقیقی ثابتی باشد طوری که $u_n>a$ آن گاه را کران پایین دنباله می نامند.

نکات:1_ دنباله ای که حداقل یک کران بالا داشته باشد را از بالا کراندار و دنباله ای را که حداقل یک کران پایین داشته باشد را از پایین کراندار می گوییم.

2- دنباله از بالا و پایین کراندار را دنباله کراندار می نامیم.

3_هر دنباله همگرا کراندار است و نه بالعکس.

4_هر دنباله بی کران واگرا است و نه بالعکس.

5_ هر دنباله صعودی حتما از پایین کراندار است و هر دنباله نزولی حتما از بالا کراندار است.

**لگاریتم و توابع لگاریتمی**

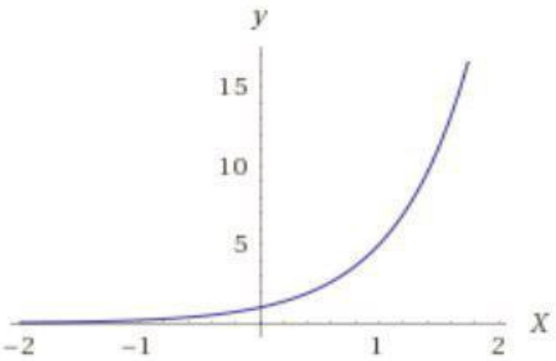
**قضایای لگاریتم:** $y=a^x \leftrightarrow x=\log_a y$

1_ $\log_a A+\log_a B=\log_a AB$

2_ $\log_a A-\log_a B=\log_a \frac{A}{B}$

3_ $\log_b A\times\log_c b=\log_c A$

4_ $\log_b A = \frac{1}{\log_A b} \leftrightarrow \log_b A \times \log_A b = 1$




5_ $\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$

6_ $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$

7_ $\log_a a = 1$ و $\log_a 1 = 0$

8_ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

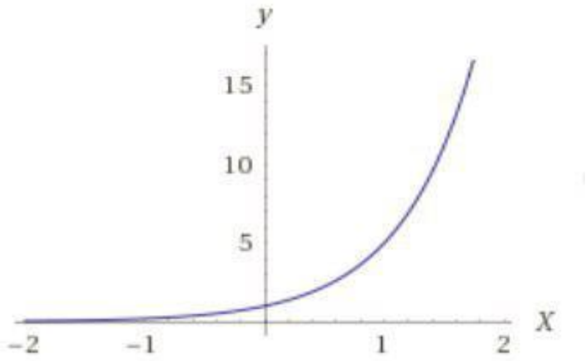
9_ هرگاه مبنای لگاریتم ذکر نشود آن را 10 در نظر می گیریم.

10_ هرگاه مبنای لگاریتم عدد طبیعی نپر( e) باشد آن را $\ln x$ می گوییم و تمام روابط لگاریتمی بالا نیز برای آن حاکم است.

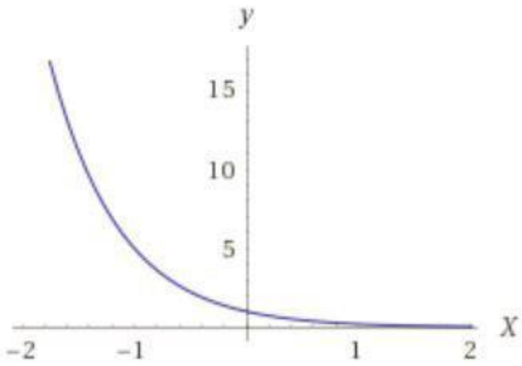
11_ $\log_a f > \log_a g \leftrightarrow \begin{cases} f > g, a > 1 \\ f < g,\ 0 < a < 1 \end{cases}$

توابع لگاریتمی:این توابع معکوس توابع نمایی می باشند و در زیر نمودارهای تیپیک توابع نمایی و لگاریتمی آورده شده است:

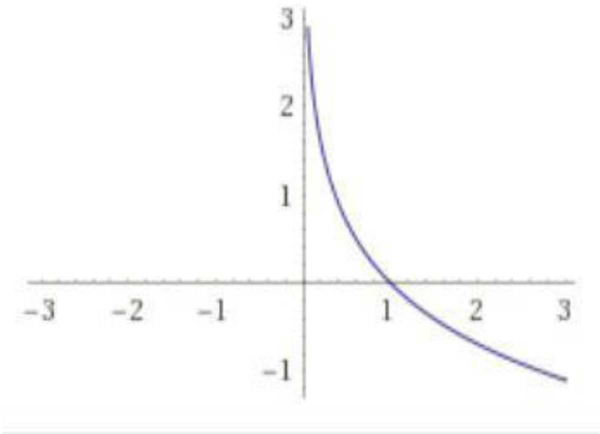
**Y=$a^x$ : a>1**



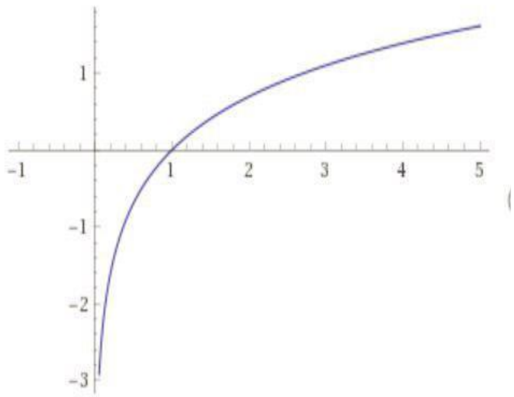

**Y=$a^x$ : 0<a<1**




**Y=$\log_a x$ : 0<a<1**




**Y=$\log_a x$ : a>1**



# ترکیبات و احتمال

1_ تعداد جایگشت های n شی متمایز برابر است با n! 2_ و نشان اصل ضرب و یا نشان اصل جمع است.3_ n نفر را به $(n-1)!$می توان دور یک میز گرد نشاند و با n مهره می توان $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن بند ساخت.4_ در یک صفحه شطرنجی $n\times n$ تعداد کل مربع ها برابر$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ است.

5_ تعداد جایگشت های n شی متمایز که $n_1$ تای آنها از نوع a و $n_2$ تای آنها از نوع b و... به طوری که $n_1+n_2+\dots n_k=n$ برابر است با : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

ترتیب(تبدیل): ترتیب قرار گرفتن مهم است و داریم:$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

7_ ترکیب: ترتیب انتخاب مهم نیست و داریم: $c(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

8_$\binom{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

9_ $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}\leftrightarrow p=q$ یا $p+q=n$

10_ $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$

11_ اگر مجموعه A دارای n عضو باشد،داریم:

الف) تعداد زیر مجموعه های r عضوی آن:$\binom{n}{r}$

ب)تعداد زیرمجوعه های r عضوی که فاقد p عضو مشخص باشد:$\binom{n-p}{r}$

ج) تعداد زیرمجموعه های r عضوی که شامل q عضو مشخص باشد:$\binom{n-q}{r-q}$

د) تعداد زیرمجموعه های r عضوی که فاقد p عضو مشخص و شامل q عضو مشخص باشد:$\binom{n-p-q}{r-q}$

پدیده تصادفی: پدیده ای که نتوان نتیجه آن را از قبل به طور قطعی پیش بینی کرد.

فضای نمونه ای: مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای می گوییم و آن را با n(s) نشان می دهیم.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی می نامیم.

نکته: تعدا کل پیشامد های تصادفی = تعداد کل زیرمجموعه های فضای نمونه ای= $2^{n(s)}$

نکته: فضای نمونه ای پرتاب n سکه برابر $2^n$ و فضای نمونه ای پرتاب n تاس برابر $6^n$ است.

احتمال: احتمال وقوع پیشامد تصادفی A در فضای نمونه ای S برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

نکات) 1_ S را پیشامد حتمی و $\emptyset$ را پیشامد غیر ممکن می گویند. 2_ $P(S)=1$ و $P(\emptyset)=0$

خارج کردن متوالی و بدون جایگذاری مهره از کیسه:

الف) به ترتیب رنگ هیچ کدام از مهره های انتخابی اشاره نشود: فرض می کنیم که مهره ها را با هم(نه متوالیا) خارج کرده ایم.

ب)به ترتیب رنگ برخی(نه همه) از مهره ها اشاره نشود: فرض می کنیم که مهره هایی که به رنگشان اشاره نشده، از اول انتخاب نشده اند.

پیشامد های مستقل: اگرA و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که وقوع B در کاهش یا افزایش احتمال وقوع A بی تاثیر باشد را دو پیشامد مستقل می گوییم و داریم: 1_ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

2_ A و $B'$ مستقل از هم هستند. 3_ B و $A'$ مستقل از هم هستند. 4_ $A'$ و $B'$ مستقل از هم هستند.

نکته: دو پیشامد که مستقل نباشند را پیشامد های وابسته می گوییم.

پیشامد های نا سازگار: اگر $A\cap B=\emptyset$ ، آن گاه A و B را نا سازگار(جدا از هم) می گوییم و در غیر این صورت سازگارند.

نکته: اگر A و B ناسازگار باشند؛ آن گاه: A و $B'$ سازگارند.B و $A'$ سازگارند.

احتمال شرطی: احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B را با $p(A|B)$

نشان می دهیم و داریم: $p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

آزمایش برنولی: نتیجه آن فقط پیروزی یا شکست است و برای سکه،جنسیت فرزند و ...به کار می رود.

اگر آزمایش برنولی را n بار مستقل انجام دهیم و احنمال هر پیروزی برابر p باشد،احتمال k پیروزی برابر است با: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

نکات پایانی : 1_ در تابع احتمال داریم: $p(x_i)\geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$

2_ $p(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

3_ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$p(A')$ =1-P(A)_4

تعریف مشتق چپ: $f'_{-}(a)=\lim_{h\to o^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

تعریف مشتق راست: $f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

تعریف مشتق: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

نکته) برای آن که تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد ، باید اولا در آن نقطه پیوسته باشد و دوما مشتق های چپ و راست در آن نقطه با هم برابر باشد و هم چنین مقدار مشتق محاسبه شده یک عدد متناهی باشد.

نکته) برای محاسبه مشتق توابع قدر مطلقی ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت کرده و در توابع جزصحیحی ، ابتدا جزصحیح را با عدد مناسب جایگزین می کنیم و سپس مشتق می گیریم.

نکته) ساده کردن یک تابع مقدم بر مشتق گیری آن است.

نکته) شکستگی های نمودارهای خطی، نقاط مشتق ناپذیری آن تابع هستند؛ توابع قدر مطلقی در ریشه های ساده داخل قدرمطلق مشتق ناپذیرند.

نکته) توابع جزصحیحی در نقاطی که پیوسته باشند، دارای مشتق صفر هستند و در بقیه نقاط مشتق ناپذیرند.

نکته) در بازه هایی که مشتق تابع مثبت باشد، تابع صعودی است. در بازه هایی که مشتق تابع منفی باشد، تابع نزولی است.

مشتق گیری از انواع توابع: ( u تابعی بر حسب x می باشد)

1) $y=k\to y'=0$ ( k عدد ثابت می باشد)

2) $y=u^n\to y'=nu'u^{n-1}$

3) $y=\sqrt[m]{u^n}\to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

4) $y=|u|\to y'=\frac{uu'}{|u|}$

5) $y=\ln u\to y'=\frac{u'}{u}$

6) $y=\log_a u \to y' = \frac{u'}{u \ln a}$

7) $y=sin^n u \to y' = nu' sin^{n-1}u\, cosu$

8) $y=cos^n u \to y' = -nu' cos^{n-1}u sin^u$

9) $y=tan^n u \to y' = nu'(1+tan^2 u)tan^{n-1}u$

10) $y=cot^n u \to y' = -nu'(1+cot^2 u)cot^{n-1}u$

11) $y=f(x)+g(x)\to y' = f'(x) + g'(x)$

12) $y=f(x)g(x)\to y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

13) $y=\frac{f(x)}{g(x)} \to y' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

14) $y=a^u \to y' = u' a^u \ln a$

15) $y=f(u)\to y' = u' f'(u)$

16) $y=\frac{au+b}{cu+d} \to y' = \frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^2}$

17) قاعده زنجیره ای: اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، داریم: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

18) مشتق ضمنی(معادله بر حسب دو متغیر x و y داریم): ابتدا همه معلوم و مجهول ها را به یک طرف تساوی می بریم و معادله را به صورت f(x)=0 در می آوریم و داریم: $y'_x = \frac{-f'(x)}{f'(y)}$ ( برای محاسبه $f'(x)$ ، عبارت های بر حسب y را عدد ثابت فرض می کنیم و برای محاسبه $f'(y)$ ، عبارت های برحسب x را عدد ثابت فرض می کنیم.)

خطوط مماس و قائم در نقطه واقع بر منحنی: اگر $A(x_0\ ,y_0\ )$ روی منحنی f(x) باشد، داریم:

معادله خط مماس بر f(x) در نقطه A: $y-y_0=f^{\prime}(x_0)(x-x_0)$

معادله خط قائم بر f(x) در نقطه A : $y-y_0=\frac{-1}{f^{\prime}(x_0)}(x-x_0)$

مماس و قائم بر منحنی در از نقطه غیر واقع بر منحنی: اگر A(x ,y ) نقطه غیر واقع بر منحنی باشد و (a , f(a) ) نقطه تماس فرضی باشد:

معادله خط مماس: جایگذاری $y-f(a)=f^{\prime}(a)(x-a)\rightarrow A$

معادله خط قائم: $y-f(a)=\frac{-1}{f^{\prime}(a)}(x-a)$

زاویه بین مماس های چپ و راست: اگر α زاویه بین دو نیم مماس چپ و راست در x=b باشد و داشته باشیم:

$m^{\prime}=f_{-}^{\prime}(b)$ و $m=f_{+}^{\prime}(b)$ آن گاه داریم : $\tan\alpha=\frac{-|m-m^{\prime}|}{1+mm^{\prime}}$ که اگر شیب یکی از آن ها m و دیگری +∞ باشد داریم : $\tan\alpha=\frac{-1}{m}$ و اگر یکی m و دیگری -∞ باشد داریم: $\tan\alpha=\frac{1}{m}$

آهنگ متوسط f(x) در بازه $(x_1\ ,x_2\ )$ : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

نکته) اگرتابع صعودی $\rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ و اگر تابع نزولی $\rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}<0$

آهنگ آنی: آهنگ آنی f(x) در x=a برابر است با: $f^{\prime}(a)$

نکته) آهنگ متوسط تغییر تابع درجه دوم f(x) در بازه $[\alpha و \beta]$ با آهنگ آنی f(x) در $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است.

تابع رشد و زوال: فرم کلی آن به صورت $p(t)=p(0)e^{kt}$ که اگر k>0 آن گاه تابع صعودی و رشد است و اگر k<0 آن گاه تابع نزولی و زوال است.

# کاربرد مشتق(1)

نقاط بحرانی: نقاط دورنی(نه انتهایی) از دامنه یک تابع را که مشتق تابع در آن نقطه وجود نداشته باشد یا برابر صفر باشد را نقطه بحرانی می گویند.

نکات:1_ اگر تابعی در بازه ای ثابت باشد، آن تابع دارای بی شمار نقطه بحرانی است.2_ در تابع y=$|f(x)|$ ، ریشه های f(x)=0 و $f'(x) = 0$ نقاط بحرانی تابع هستند.

ماکزیمم و می نیمم نسبی: تابع f با دامنه [ a , b ] مفروض است، فرض می کنیم (e,g) یک بازه شامل c در دامنه f است. اگر به ازای هر $x\in(e,g)$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$ در این صورت f در c ماکزیمم نسبی است و اگر $f(x)\geq f(c)$ در این صورت f در c می نیمم نسبی است.

ماکزیمم و می نیمم مطلق: تابع f با دامنه [a,b] مفروض است.اگر به ازای هر $x\in[a.b]$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$ ،می گوییم f در بازه[ a , b ] در نقطه c ماکزیمم مطلق است. همچنین اگر به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$ می گوییم تابع f در بازه [ a , b ] در c می نیمم مطلق است.

نکته) ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و می نیمم نسبی باشد ولی مقدار(نه تعداد نقاط) ماکزیمم و می نیمم مطلق در صورت وجود، منحصر به فرد است.

آزمون مشتق اول: اگر تابع f در بازه [a,b] پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و $c\in(a,b)$ و یک نقطه بحرانی از تابع باشد:

1_ اگر $f'$ در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، آن گاه x=c ، ماکزیمم نسبی است.

2_ اگر $f'$ در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد،آن گاه x=c ، می نیمم نسبی است.

3_ اگر $f'$ در دو طرف x=c هم علامت باشد، x=c ماکزیمم یا می نیمم نسبی نیست.

نکات) 1_ اگر برد یک تابع به صورت [a,b) یا $[a,+\infty)$ باشد، تابع فاقد ماکزیمم مطلق است و اگر برد یک تابع به صورت (a,b] یا $(-\infty,a]$ باشد، تابع فاقد می نیمم مطلق است.

2_ اگر برد یک تابع به صورت (a,b) باشد، تابع فاقد ماکزیمم یا می نیمم مطلق است.

3_ برای تعیین ماکزیمم یا می نیمم مطلق توابع به فرم $a\sin^2 a + b\sin a + c$ یا $a\cos^2 a + b\cos a + c$ باشد، به جای $\sin a$ یا $\cos a$، مقادیر $\pm 1$ و $\frac{-b}{2a}$ را جایگذاری می کنیم.

جهت تقعر منحنی: اگر f در بازه i بالای همه مماس هایش باشد( $f'$ در بازه i صعودی اکید باشد) ، منحنی مقعر روبه بالا است.
و اگر در بازه i پایین همه مماس هایش باشد( $f'$در بازه i نزولی اکید باشد)، منحنی مقعر روبه پایین است.

نکته) اگر در بازه i ،مشتق دوم تابع مثبت باشد،تقعر رو به بالا است و اگر مشتق دوم تابع منفی باشد، تقعر رو به پایین است.

نکته) عوض شدن جهت تقعر لزوما در نقاط عطف اتفاق نمی افتد( به عنوان مثال تابع $y=\frac{1}{x}$)

نقطه عطف: نقطه x=c ( $x\in D_f$) را نقطه عطف f گویند،هرگاه:

1) f در x=c دارای مماس واحد باشد(می تواند مماس قائم باشد)
2) جهت تقعر f در x=c عوض شود(مشتق دوم در x=c تغییر علامت دهد)

## نکات:

1_ مماس بر منحنی در نقطه عطف از منحنی عبور می کند

2- مختصات نقطه عطف در ضابطه تابع صدق می کند)_ ریشه های ساده یا مکرر از مرتبه فرد مشتق دوم یک عبارت، نقاط عطف تابع هستند.

# کاربرد مشتق 2(مجانب ها)

مجانب افقی: خط y=b مجانب افقی نمودار تابع f(x) است ، هرگاه حداقل :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=b \text{ یا } \lim_{x\to +\infty} f(x)=b$$

نکات) 1_ توابعی که دامنه محدود دارند،چون x نمی تواند به $\pm\infty$ میل کند،فاقد مجانب افقی هستند.2_ توابعی که حد آن ها در $\pm\infty$ وجود ندارد،نیز فاقد مجانب افقی هستند.3_ یک تابع حداکثر دارای دو مجانب افقی است و در هر شاخه $+\infty$ و$-\infty$ حداکثر یک مجانب افقی دارد.4_توابع کسری فقط در صورتی که درجه صورت $\geq$ درجه مخرج باشند،دارای مجانب افقی هستند(اگر درجه صورت بزرگتر از مخرج باشد،حد تابع در $\pm\infty$ برابر $\pm\infty$ است و تابع فاقد مجانب افقی می شود)

5_ اگر $\lim_{x\to +\infty \text{ یا } -\infty} (f(x)-b)=0^+$ ؛ در شاخه $+\infty$ یا $-\infty$ ، بالای مجانب است

و اگر $\lim_{x\to +\infty \text{ یا } -\infty} (f(x)-b)=0^+$ ، در شاخه $+\infty$ یا $-\infty$ پایین مجانب است.( y=b مجانب افقی تابع است)

تذکر: برای هر نوع تابعی (خصوصا مثلثاتی) ابتدا تا حد امکان ساده سازی صورت گیرد و سپس مجانب ها را بررسی کنید.

مجانب قائم : خط x=a مجانب قائم تابع است هرگاه حداقل :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty \quad \text{ یا } \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty$$

نکات) 1_ در توابع کسری: الف) پیوسته بودن مخرج کسر: اگر x=a ریشه ی مخرج باشد، مجانب قائم تابع است مگر اینکه ریشه صورت کسر نیز باشد(که اگر پس از رفع ابهام،حاصل حد برابر $\pm\infty$ شود، x=a باز هم مجانب قائم است) یا تابع در هیچ همسایگی از x=a تعریف نشده باشد.

ب)اگر مخرج کسر ناپیوسته باشد(یا فاقد ریشه باشد) ولی حد آن درx=a برابر$\pm\infty$ شود، x=a مجانب قائم است.

2_ توابع کران دار فاقد مجانب قائم هستند( چون دارای برد محدود هستند؛ینی $f(x)\neq \pm\infty$ )

3_ در یک تابع هموگرافیک محل تلاقی مجانب ها برابر مرکز تقارن تابع است.

4_ در تابع y=tan(ax+b) ، اگر a>0 بین دو مجانب قائم خود اکیدا صعودی و اگر a<0 بین دو مجانب قائم خود اکیدا نزولی است.

مجانب مایل: خط y=mx+h مجانب مایل f(x) است هرگاه حداقل :

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-(mx+h)|=0 \text{ یا } \lim_{x\to-\infty}|f(x)-(mx+h)|=0$$

و داریم: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $h=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

نکات) 1_ شرط لازم برای وجود مجانب مایل، عدم کران دار بودن دامنه و برد تابع است.

2_ اگر $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+h))=b$ ؛ اگر $b=0^+$ ، نمودار بالای مجانب مایل و اگر $b=0^-$ نمودار زیر مجانب مایل است.

3_ در تابع کسری $y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{cx^{n-1}+dx^{n-2}+\dots}$ که درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر است، معادله مجانب به صورت $y=(\frac{a}{c})x-\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2}$ است.( هر کدام از ضرایب a ، b، c و d وجود نداشت، بجای آن صفر می گذاریم)

4_ معادله مجانب مایل تابع $y=x\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+d}}$ به صورت $y=c(x+\frac{b-d}{n})$ است.

5_ معادله مجانب افقی و مایل تابع $y=mx+h\pm\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}}$ به صورت های زیر است:

$$y=mx+h\pm\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

6_ معادله مجانب مایل یک تابع=تابع خطی هم ارز آن در بی نهایت:

اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ و $y=ax+b+\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ خط y=ax+b+c را مجانب مایل تابع می نامند.

## نکات ترکیبی مجانب ها

1_ اگر تعداد مجانب ها روی یک بازه مدنظر باشد، فقط مجانب های قائم را بررسی می کنیم.

2_ توابع تناوبی غیرثابت چون در $\pm\infty$ فاقد حد هستند، مجانب افقی و مایل ندارند.

3_ مجموع تعداد مجانب های افقی و مایل یک تابع حداکثر دو تا است؛ اگر یک تابع در هر دو شاخه $+\infty$ و $-\infty$ دارای مجانب افقی باشد، مجانب مایل ندارد و برعکس!

4_ اگر x =a و y=b مجانب های قائم و افقی تابع f(x) باشند، y=a و x=b مجانب های افقی و قائم تابع $f^{-1}(x)$ هستند.

## هندسه مختصاتی

فاصله دو نقطه از هم: (طول پاره خط) $A(X_1 , Y_1)$: و $B(X_2 , Y_2)$

$|AB|$:$\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$

نکته:1_ هر نقطه روی محور طول ها ،دارای عرض صفر است و هر نقطه روی محور عرض ها دارای طول صفر است.

مختصات وسط پاره خط: اگر $A(X_1 , Y_1)$ و $B(X_2 , Y_2)$ و M وسط پاره خط باشد

M: $\left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2}\right)$:

شیب خط: شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(X_1 , Y_1)$ و $B(X_2 , Y_2)$ $M= \frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$

نکته) در معادله y=ax+b ، به a شیب خط می گویند.

نکته) خط گذرنده از نقطه $A(x_1,y_1)$ با شیب m به صورت $y-y_1 = m(x - x_1)$ می باشد.

نکته)دو خط موازی دارای شیب های مساوی و دو خط عمود برهم دارای شیب های عکس و قرینه هستند.

فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A(X_1 , Y_1)$ از خط به معادله ax+by+c=0 برابر $\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ است.

نکته) فاصله یک نقطه از محور طول ها برابر قدر مطلق عرض آن نقطه و فاصله یک نقطه از محور عرض ها برابر قدر مطلق طول آن نقطه است.

دایره:

اگر o( $\alpha,\beta$) مرکز دایره و r شعاع دایره باشد،معادله استاندارد دایره به صورت زیر می باشد: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

و معادله گسترده دایره به صورت زیر می باشد: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ , $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکته) در همه مقاطع مخروطی،ریشه مشتق نسبت به x ( $f'(x)=0$) برابر محور تقارن قائم و طول مرکز است و ریشه مشتق نسبت به y ( $f'(y)=0$ ) برابر محور تقارن افقی و عرض مرکز است و محل تلاقی محورهای تقارن افقی و قائم برابر مرکز تقارن است.

نکات)1_ اگر a وb دو سر قطر دایره ای باشند: $o=\frac{a+b}{2}$ , $2r=|ab|$

2_اگر خطی بر دایره ای مماس باشد،فاصله مرکز دایره از آن خط برابر شعاع دایره است و برعکس!

3_ اگر دایره $o(\alpha,\beta)$ بر محور x مماس باشد، $r=|\beta|$ و اگر بر محورy مماس باشد، $r=|\alpha|$ و اگر بر هر دو محورx وy مماس باشد، $r=|\alpha|=|\beta|$ که در این حالت مرکز دایره روی یکی از خطوط $y=\pm x$ است.

4_ اگر دایره ای بر دو خط متقاطع مماس باشد،مرکزش روی یکی از نیمسازهای این دو خط است.

5_ اگر دایره ای بر دو خط موازی مماس باشد،مرکز دایره روی خط میانگین این دو خط قرار داشته و قطر دایره برابر فاصله دو خط است.

6_خط میانگین دو خط ax+by=c و $ax+by=c'$ برابر است با: $ax+by=\frac{c+c'}{2}$

7_فاصله دو خط موازی ax+by=c و ax+by=$c'$ برابر است با : $\left|\frac{c-c'}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

8_اگر دایره ای از رئوس یک مثلث قائم الزاویه بگذرد،وتر مثلث برابر قطر دایره است.

9_ اگر دایره ای بر دو نقطه A و B بگذرد، مرکز دایره روی خط عمود منصف AB است.

10_ اگر فاصله یک نقطه از مرکز دایره برابر d باشد، ماکسیمم فاصله آن نقطه از مرکز دایره برابر d+rو مینیمم آن برابر $|d-r|$ است.

11_ برای نوشتن معادله گذرنده بر 3 نقطه به یکی از دو روش زیر عمل می کنیم:1_ با استفاده از تلاقی 2 عمود منصف گذرا بر خطوط گذرنده از 3 نقطه 2_ قرار دادن سه نقطه در معادله گسترده دایره.

وضعیت دو دایره نسبت به هم: اگر فاصله مرکز دو دایره d باشد، حالت های زیر متصور است: 1) $r_1+r_2$ <d : متخارج 2) d= $r_2+r_1$ :مماس خارج 3) d= $|r_1-r_2|$ :مماس داخل 4) d< $|r_1-r_2|$ : متداخل 5) متقاطع: $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$

وتر مشترک: خطی است که از نقاط روی آن می توان مماس هایی با طول مساوی بردو دایره رسم کرد.

نکته) برای پیدا کردن معادله وتر مشترک،معادله دو دایره را از هم کم کرده و عبارات درجه دو را حذف می کنیم. فاصله بین دو نقطه حاصل از تلاقی معادله وتر مشترک با معادله یکی از دایره ها برابر طول وتر مشترک است.

بیضی: اگر o$(\alpha,\beta)$ و قطر بزرگ برابر 2a و قطر کوچک برابر 2b و فاصله کانونی برابر 2c باشد، آن گاه معادله استاندارد بیضی های افقی و قائم به صورت زیر است:

بیضی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

بیضی قائم: $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

نکات:1_ خطوط x= α وy=β محورهای تقارن بیضی هستند. 2_فاصله نزدیک ترین نقطه محیط بیضی تا مرکز برابرb و تا کانون برابر a-c است و فاصله دور ترین نقطه محیط بیضی تا مرکز برابر a و تا کانون برابر a+c است.4_ $b^2 + c^2 = a^2$

خروج از مرکز بیضی: آن را با e نشان می دهند وبرابر $\frac{c}{a}$ است.

نکته) خروج از مرکز بیضی همواره بین صفر و یک است و هرچه بیشتر به صفر میل کند،بیضی به سمت دایره میل می کند. و هر چه بیشتر به یک میل کند،بیضی به سمت پاره خط میل می کند.

سهمی: نقاطی که فاصله آن ها از کانون و خط هادی یکی است.

اگر a را فاصله کانونی سهمی و $s(\alpha, \beta)$ را راس سهمی در نظر بگیریم، معادله استاندارد سهمی های افقی و قائم به صورت زیر است:

قائم: $(x-\alpha)^2 = 4a\,(y-\beta)$

افقی: $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

نکات:1_ نوع سهمی و خط هادی از لحاظ قائم و افقی بودن برعکس هم است. 2_ در معادلات استاندارد اگر a>0 ،سهمی رو به بالا(یا راست) است. و اگر a<0 ، سهمی رو به پایین(یا چپ) باز می شود.

3_ نزدیک ترین نقطه به کانون و خط هادی برابر راس سهمی است.4_ کانون، a واحد جلوتر(بالاتر) و خط هادی a واحد عقب تر از راس سهمی است و این تغییرات روی متغیر درجه اول است.

5_ هرچه دهانه سهمی بازتر باشد، کانون و خط هادی دورتر از راس سهمی است.

6_ از روی خط هادی،2 مماس عمود برهم بر سهمی رسم می شودو به موازات هر امتداد دلخواه(به جز محور سهمی) 1 مماس بر سهمی رسم می شود.

هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت،عددی ثابت است.

تذکر: f و $f'$ کانون های هذلولی، = $ff'$فاصله کانونی= 2c ، قطرهذلولی= $\left|MF - MF'\right|$ =2a

$$c^2 = a^2 + b^2$$

معادلات هذلولی:

افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

# نکات:

1_ کمترین فاصله نقاط دو شاخه هذلولی برابر قطر هذلولی

2_ هذلولی های افقی و قائم به ترتیب محورهای تقارن افقی و قائم خود را قطع می کنند.

3_ شیب مجانب های هذلولی افقی برابر $\frac{\pm b}{a}$ و هذلولی قائم برابر $\frac{\pm a}{b}$ است و در هر دو حالت افقی و قائم شیب ها قرینه هستند.

4_ فاصله هر کانون از هر کدام از خطوط مجانب برابرb و حاصل ضرب فواصل هر نقطه از هذلولی از دو خط مجانب برابر $\frac{a^2b^2}{c^2}$ است.

خروج از مرکز هذلولی: $e = \frac{c}{a}$ و e>1 ، $e^2 = 1 + (\frac{b}{a})^2$

نکته:1_ هر چه e به 1 نزدیک تر باشد، دهانه هذلولی بسته تر و به دو نیم خط شبیه می شود و هر چه eبزرگتر باشد، دهانه هذلولی بازتر و بیشتر شبیه دو خط موازی می شود.

3_ از نقاط درون هذلولی صفر مماس،نقاط روی آن 1 مماس، نقاط بیرون آن 2 مماس(به جز مجانب ها که آن هم 1 مماس) می توان بر هذلولی رسم کرد.

4_ طول وتر کانونی برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.

انتقال محورها: $(x,y)+(0,0)=(x',y')+(\alpha,\beta)$

مبدا قدیم = (0,0) ، مبدا جدید= $(\alpha,\beta)$ ،مختصات قدیم = (x,y) ،مختصات جدید= $(x',y')$

# انتگرال نامعین

1_ $\int f(x)\,dx = f(x) + c \leftrightarrow f'(x) = f(x)$

2_ $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x) \pm \int g(x)$

3_ $\frac{d}{dx}\int (x)\,dx = f(x)$

4_ $\int \frac{1}{x^n}$dx=$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$+c

5_ $\int kdx = kx + c$

6_ $\int \sqrt[m]{x^n}dx = \frac{m}{m+n}x\sqrt[m]{x^n} + c$

7_ $\frac{dx}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$=n$\sqrt[n]{x} + c$

8_ $\int sinaxdx = \frac{-1}{a}cosax + c$

9_ $\int cosaxdx = \frac{1}{a}sinax + c$

10_ $\int tanaxdx = \frac{-1}{a}ln|cosax| + c$

11_ $\int cotaxdx = \frac{1}{a}ln|sinax| + c$

12_ $\int (1 + tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}tanax + c$

13_ $\int (1 + cot^2 ax)\,dx = \frac{-1}{a}cotax + c$

14_ $\int tan^2 axdx = \frac{1}{a}tanax - x + c$

15_ $\int cot^2 axdx = \frac{-1}{a}cotax - x + c$

16_ $\int \frac{dx}{x+k} = ln|x + k| + c$

$17\_\int e^{x+k}\,dx = e^{x+k} + c$

$18\_\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

$19\_\int \frac{d}{dx} = ln|x| + c$

$20\_\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$+c

انتگرال معین: مساحت جبری(بالای محور ایکس ها را مثبت و پایین محور ایکس ها را منفی در نظر می گیریم) بین نمودارf و محور x ها و دو خط x=a وx=b را انتگرال معین f می گویند و با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می دهند.

$1\_\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$2\_\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$3\_\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$4\_\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$

$5\_\int_a^b f(x)dx = \int_{a\pm k}^{b\pm k} f(x \pm k)$

$6\_\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$

نکاتی در مورد مساحت ها:

1_ سطح محدود بین نمودار $x^2 = ay$ و $y^2 = bx$ برابر $\frac{|ab|}{3}$ است.

2_ در توابع asinkx و acoskx داریم: طول هر طاق برابر $\frac{\pi}{|k|}$ و مساحت هر طاق برابر $\frac{2}{|k|}$ است.