

سوال کو نیز حل فرمایم

فرض کنید $\varphi: A \times X \rightarrow A$ مجموعه‌های مجزای باشند. ثابت کنید تابع زیر یک به یک و پوشا است.

$$\varphi: A^X \times A^Y \rightarrow A^{X \cup Y}$$

$$\varphi(f, g) = f \cup g$$

حل: φ یک به یک است:

فرض کنید $f, f': X \rightarrow A$ و $g, g': Y \rightarrow A$ داده شده باشند بطوریکه

$$\varphi(f, g) = \varphi(f', g') \text{ پس } f \cup g = f' \cup g'$$

به ازای هر $a \in X$ داریم: $(f \cup g)(a) = f(a)$ و $(f' \cup g')(a) = f'(a)$

به ازای هر $b \in Y$ داریم: $(f \cup g)(b) = g(b)$ و $(f' \cup g')(b) = g'(b)$

بنابراین به ازای هر $a \in X$ داریم $f(a) = f'(a)$ پس $f = f'$

همچنین به ازای هر $b \in Y$ داریم $g(b) = g'(b)$ پس $g = g'$

φ پوشا است:

فرض کنید $h: X \cup Y \rightarrow A$ داده شده باشد. f و g را به گونه‌ای می‌یابیم که

$$\varphi(f, g) = h$$

قرار دهیم $f = h|_X$ (تکثیر h به X) و $g = h|_Y$ (تکثیر h به Y)

به ازای هر $a \in X$ داریم $(f \cup g)(a) = f(a) = h(a)$ و

به ازای هر $b \in Y$ داریم $(f \cup g)(b) = g(b) = h(b)$

پس $\varphi(f, g) = f \cup g = h$