بسمه تعالی

دانشکده علوم مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۵/۱/۳۰ — ساعت آزمون: ۱۶ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

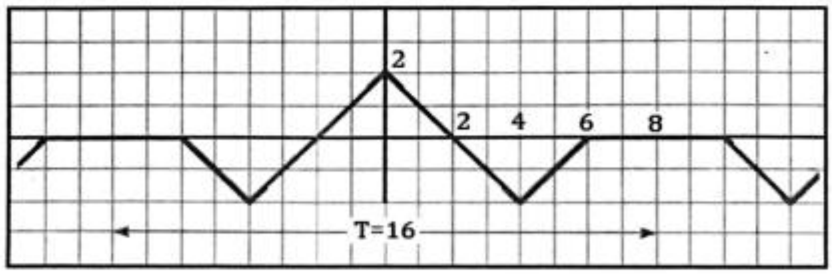
نیمسال: دوم — سال تحصیلی: ۹۵-۱۳۹۴ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو:	شماره دانشجویی:	نمره

۱ — الف: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. $(T = 16)$ — ۱/۵



ب: به کمک سری فوریه بدست آمده حاصل سری عددی زیر را بیابید. — ۱

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n^2}$$

۲ — تبدیلات زیر را بدست آورید. — ۲

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right) \quad ; \quad \mathcal{F}\left(\frac{cos3x}{x^2+2}\right)$$

۳ — در معادله موج زیر با استفاده از <u>روش دالامبر</u> مقدار $u(5,19)$ را بدست آورید. — ۱

$$u_{tt} = 4u_{xx} \;\; ; \;\; 0 < x < 17 \;;\; t > 0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0\,;\; u(17,t) = 0 & B.C. \\ u(x,0) = x \;;\; u_t(x,0) = 6x^2 & I.C. \end{cases}$$

۴ — معادله حرارت غیرهمگن زیر را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید. — ۳

$$u_t = u_{xx} + x^2 + t\big(1 + cos(\pi x)\big) \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t > 0$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 2 \;\; ; \;\; u_x(1,t) = 2(1+t) & B.C. \\ u(x,0) = 2x & I.C. \end{cases}$$

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

دانشکده علوم مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۳/۸/۲۹ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: اول — سال تحصیلی: ۹۴-۱۳۹۳ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: تابع $f(x)=x(\pi-x)$ را که در بازه $0<x<\pi$ تعریف شده است گسترش فرد داده و سری فوریه سینوسی آنرا بیابید.	۱/۵
	ب: به کمک قسمت قبل با انتخاب یک x مناسب، حاصل سری عددی زیر را بدست آورید. $A=\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{5^3}\right)+\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}\right)+\left(\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}\right)+\cdots$	۱
۲	الف: انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورده، به کمک آن I را محاسبه کنید. $f(x)=\begin{cases} cosx & \lvert x\rvert<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad ; \quad I=\int_0^\infty \frac{cosx}{\pi^2-4x^2}dx$	۱/۵
	ب: اگر $\mathcal{F}(f(x))=\hat{f}(\alpha)$ باشد، تبدیل فوریه $xf(x-3)$ را بر حسب $\hat{f}(\alpha)$ بدست آورید.	۱
۳	تابع $f(x)=x$ را بر حسب توابع ویژه مساله اشتورم-لیوویل زیر بسط دهید. $y''+\lambda y=0 \;;\; 0<x<1$ $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)+2y'(1)=0\end{cases}$	۲
۴	معادله حرارت زیر را حل کنید. $u_t=u_{xx}-x-cost \quad ; \quad 0<x<3 \quad ; \quad t>0$ $\begin{cases} u_x(0,t)=t \;;\; u(3,t)=3t-sint & B.C. \\ u(x,0)=2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3}x^3-9 & I.C.\end{cases}$	۳

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۳/۱/۲۸ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: دوم — سال تحصیلی: ۹۳-۱۳۹۲ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی — دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: — شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: فرض کنید ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(-\pi,\pi)$ برابر با a_0 ، a_n و b_n باشند.	۱
	ضرایب سری فوریه تابع $f(x)cosx$ را بر حسب این ضرایب بدست آورید.	
	ب: به کمک قسمت قبل و یا بصورت معمول، سری فوریه $xcosx$ را در بازه $(-\pi,\pi)$ بیابید.	۱
	ج: به کمک قسمت قبل حاصل سری زیر را بدست آورید.	۰/۵
	$A=\frac{3}{2\times 4}-\frac{5}{4\times 6}+\frac{7}{6\times 8}-\frac{9}{8\times 10}+\cdots$	
۲	تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید. (راهنمایی: طرفین را در x^2 ضرب کرده و از دو طرف تبدیل بگیرید)	۱/۵
	$f(x)=\left(\frac{sinx}{x}\right)^2$	
۳	مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله اشتورم لیوویل زیر را بدست آورید. تابع دلخواه $f(x)$ را که در شرایط دیریکله صدق میکند، بر حسب توابع ویژه آن بسط دهید.	۲
	$y''+y'+\lambda y=0 \quad ; \quad y(0)=0 \; ; \; y(1)=0$	
۴	معادله ارتعاش زیر را حل نمایید.	۳
	$u_{xx}=u_{tt}+t^2-x^2-t+x \quad ; \quad 0<x<1 \quad ; \quad t>0$	
	$\begin{cases} u_x(0,t)=t \; ; \; u_x(1,t)=t^2 & B.C. \\ u(x,0)=0 \; ; \; u_t(x,0)=\frac{-x^2}{2} & I.C. \end{cases}$	

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

دانشکده های فنی پردیس

گروه علوم پایه مهندسی — مدرس: — آزمون درس: ریاضی مهندسی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۲/۸/۳۰ — ساعت آزمون: ۱۱ — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

نیمسال: اول — سال تحصیلی: ۹۳-۱۳۹۲ — استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	الف: تبدیل فوریه $f(x) = xe^{-ix-\|x\|}$ را بدست آورید. ب: با استفاده از رابطه زیر تبدیل فوریه $f(x)$ را بدست آورید. $f(x) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)dt \quad ; \quad -1 < x < 1$	۲
۲	مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله اشتورم لیوویل زیر را بدست آورید. $(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \quad ; \quad y'(1) = y(2) = 0$	۲
۳	معادله مشتق جزئی زیر را همراه با شرط داده شده حل نمایید. $xu_x + yu_y = 1 + y^2 \quad ; \quad u(x,1) = 1 + x$	۱/۵
۴	مساله زیر را حل نمایید. $u_{xx} = u_t + 1 - 3xt^2 + x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t > 0$ $u(0,t) = t \quad ; \quad u(1,t) = t^3 \quad ; \quad u(x,0) = x^2$	۳/۵

با آرزوی موفقیت

پاسخنامه آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی، نیمسال اول ۹۴-۱۳۹۳

$$\underbrace{A=0;a_n=0}_{\boxed{0.25}};b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)sin(nx)\,dx=\frac{8sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3}\ \boxed{1}\rightarrow x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\ \boxed{0.25}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\ \boxed{0.5}\rightarrow\frac{\pi}{3}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{5^3}\right)+\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}\right)+\left(\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}\right)+\cdots\right]\rightarrow A=\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}}\ \boxed{0.5}$$

$$B(\alpha)=0;A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cosx)(cos\alpha x)\,dx=\frac{2cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi(1-\alpha^2)}\ \boxed{0.75}\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}cos\alpha x\,d\alpha\ \boxed{0.25}$$

$$x=0\rightarrow\underbrace{f(0)}_{1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}d\alpha\ \boxed{0.25}\rightarrow x=\frac{\alpha\pi}{2}\rightarrow\int_0^{\infty}\frac{cosx}{\pi^2-4x^2}dx=\frac{1}{4}\ \boxed{0.25}$$

$$\mathcal{F}\big(f(x-3)\big)=e^{-3i\alpha}\hat{f}(\alpha)\ \boxed{0.25}\rightarrow\mathcal{F}\big(xf(x-3)\big)=i\left(e^{-3i\alpha}\hat{f}(\alpha)\right)'=e^{-3i\alpha}\big(3\hat{f}(\alpha)-i\hat{f}'(\alpha)\big)\ \boxed{0.75}$$

$$\underbrace{\lambda=0,\lambda=-\alpha^2}_{\boxed{0.25}}\boxed{\times}\ ;\lambda=\alpha^2\rightarrow y=c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x)\xrightarrow{B.C.}c_1=0;c_2\sin\alpha+2\alpha c_2\cos\alpha=0\ \boxed{0.5}$$

$$\xrightarrow{y\neq0}tan\alpha=-2\alpha\ \ (0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots)\rightarrow\varphi_n(x)=sin(\alpha_n x)\ \ \boxed{0.25}$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\underbrace{sin(\alpha_n x)}_{\varphi_n(x)}\rightarrow c_n=\frac{\int_0^1 x\,sin(\alpha_n x)\,dx}{\int_0^1 sin^2(\alpha_n x)\,dx}=\frac{-\frac{3cos(\alpha_n)}{\alpha_n}}{\frac{1+2\cos^2(\alpha_n)}{2}}=\frac{-6cos(\alpha_n)}{\alpha_n(1+2\cos^2(\alpha_n))}\ \ \boxed{1}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\ \ ;\ \ w(x,t)=a(t)x+b(t)\ \ \boxed{0.25}$$

$$w_x(0,t)=t\ ;\ w(3,t)=3t-sint\rightarrow w(x,t)=tx-sint\ \ \boxed{0.25}\rightarrow u=v+tx-sint$$

$$v_t=v_{xx}-2x\rightarrow\begin{cases}v_x(0,t)=0\,;v(3,t)=0 & B.C.\\ v(x,0)=2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3}x^3-9 & I.C.\end{cases}\ \ \boxed{0.5}$$

$$v(x,t)=z(x,t)+\varphi(x)\ \ \boxed{0.25}\rightarrow\varphi''(x)=2x\ ;\ \varphi_x(0)=0\ ;\ \varphi(3)=0\rightarrow\varphi(x)=\frac{x^3}{3}-9\ \ \boxed{0.25}$$

$$z_t=z_{xx}\rightarrow\begin{cases}z_x(0,t)=0\,;z(3,t)=0 & B.C.\\ z(x,0)=2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) & I.C.\end{cases}\ \ \boxed{0.5}$$

$$X''+\lambda X=0\xrightarrow{X'(0)=X(3)=0}\lambda_n=\alpha_n^2\,;\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{6};\ X_n(x)=cos(\alpha_n x)\ \ \boxed{0.25}$$

$$T'+\alpha_n^2T=0\rightarrow T_n(t)=ce^{-\alpha_n^2t}\ \boxed{0.25}\rightarrow z(x,t)=X_n(x)T_n(t)=A_ncos(\alpha_n x)e^{-\alpha_n^2t}$$

$$z(x,0)=2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\rightarrow A_ncos(\alpha_n x)=2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\rightarrow A_n=2;\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\rightarrow n=5\ \ \boxed{0.25}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=z(x,t)+\varphi(x)+w(x,t)\rightarrow u=\underbrace{2cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)e^{\frac{-9\pi^2}{4}t}}_{z}+\underbrace{\frac{x^3}{3}-9}_{\varphi}+\underbrace{tx-sint}_{w}\ \ \boxed{0.25}$$

بسمه تعالی

گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی
تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۳/۲۰	ساعت آزمون: ۸ صبح	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه
نیمسال: دوم	سال تحصیلی: ۸۹-۱۳۸۸	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست

پردیس دانشکده های فنی

دانشگاه تهران

لطفا تا حد امکان مرتب و خوانا بنویسید. برگه سوال بایستی ضمیمه پاسخنامه گردد

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	ابتدا سری فوریه تابع $f(x) = x\sin x$ را در بازه $-\pi \le x \le \pi$ بدست آورده $(T = 2\pi)$ و به کمک آن سری عددی $A = \frac{1}{1\times 3} - \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} - \frac{1}{7\times 9} + \ldots$ را محاسبه کنید.	۳
۲	تبدیل معکوس فوریه تابع زیر را محاسبه نمایید. $F^{-1}\left\{\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right\}$	۱/۵
۳	معادله دیفرانسیل مشتق جزئی مرتبه یک زیر را با توجه به شرط مرزی داده شده حل نمایید. $z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = y \quad ; \quad z(x,2) = x$	۲
۴	میله ای باریک به طول ۱ واحد در نظر است. دمای اولیه نیمه سمت چپ میله ۱ واحد و نیمه سمت راست ۰/۵ واحد میباشد. محیط اطراف میله عایق بوده و هیچ گرمایی از نقاط ابتدایی و انتهایی آن منتقل نمیشود (یعنی گرادیان دما در این نقاط صفر است) . در اینصورت برای یافتن دما در هر لحظه خاص معادله دیفرانسیل مشتق جزئی زیر را خواهیم داشت. آنرا به کمک روش تفکیک متغیرها ، با توجه به شرایط مرزی داده شده حل نمائید. در نهایت دمای حالت پایدار را نیز بدست آورید. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad 0 < x < 1 \, , \, t > 0$ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=1} = 0$ $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \end{cases}$	۳/۵

با آرزوی موفقیت

بسمه تعالی

حل امتحان ریاضی مهندسی پایان ترم ۲-۸۹-۸۸

---

۱)

$f(x)=x\sin x \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi \qquad f(-x)=f(x)\Rightarrow b_n=0$ $\boxed{0/25}$ $\quad 2l=2\pi\Rightarrow \frac{n\pi x}{l}=nx$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos nx\,dx=\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}=\begin{cases}\frac{2}{n^2-1} & n\neq 1 \text{ و } n \text{ فرد}\\ \frac{-2}{n^2-1} & n \text{ زوج}\end{cases}\quad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow a_0=2\ ,\ a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\quad \boxed{0/5}$$

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}-\frac{\cos 3x}{3^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}-\dots\right)\quad \boxed{0/5}$$

$$x=\pi/2\Rightarrow \frac{1}{1\times 3}-\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}-\frac{1}{7\times 9}+\dots=\frac{\pi-2}{4}\quad \boxed{0/75}$$

---

۲)

$$F(e^{-ax}H(x))=\frac{1}{a+i\alpha}\quad ①$$
$$F(x f(x))=i\,F'_\alpha(\alpha)\quad ②$$
$$F(f(x-a))=e^{-ia\alpha}F(\alpha)\quad ③$$

$$①,② \Rightarrow F^{-1}\left(\frac{1}{(3+i\alpha)^2}\right)=xe^{-3x}H(x)\quad ④ \quad \boxed{0/75}$$

$$③,④ \Rightarrow F^{-1}\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{(3+i\alpha)^2}\right)=(x-2)e^{-3(x-2)}H(x-2)\quad \boxed{0/75}$$

---

۳)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\quad 0<x<1\ ,t>0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0\ ① \qquad u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<0/5\\ 0 & 0/5<x<1\end{cases}\ ②$$

$$u(x,t)=F(x)G(t)\Rightarrow \frac{F''}{F}=\frac{G'}{G}=K \qquad \partial u(x,t)/\partial x=F'(x)G(t)\xrightarrow{①}F'(0)=F'(1)=0\ ③\quad \boxed{0/5}$$

$$K=-\lambda^2\Rightarrow F(x)=c_1\sin\lambda x+c_2\cos\lambda x\xrightarrow{③}c_1=0\ ,\ \sin\lambda=0\Rightarrow \lambda=n\pi\Rightarrow F(x)$$ بدست آمد $\boxed{1}$

$$G'+\lambda^2G=0\Rightarrow G(t)=c_2e^{-\lambda^2t}=c_2e^{-n^2\pi^2t}\ \boxed{0/5}\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-n^2\pi^2t}\cos(n\pi x)\quad \boxed{0/25}$$

$$\underbrace{u(x,0)}_{f(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\pi x)\quad \boxed{0/5}$$

با برقراری ② می بینیم A_n ضریب a_n در بسط کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ است زیرا:

$$T=2\Rightarrow a_0=\tfrac{1}{2}\ ,\ a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x\quad \boxed{1}$$

و در حالت پایدار $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\frac{1}{2}$ خواهد بود. $\boxed{0/25}$

---

۴)

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=y \qquad z(x,2)=x \qquad \frac{dx}{z}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{y}\quad \boxed{0/25}$$

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{y}\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}y^2-z\ ①\ \boxed{0/25} \qquad \frac{dx}{z}=\frac{dy}{1}\xrightarrow{①}\frac{dx}{\frac{1}{2}y^2-c_1}=\frac{dy}{1}\Rightarrow x=\frac{1}{6}y^3-c_1y+c_2\ ②\ \boxed{0/5}$$

پس $c_2=f(c_1)\xrightarrow{①,②}x-\frac{1}{6}y^3+c_1y=f(\frac{1}{2}y^2-z)\xrightarrow{①}x+\frac{1}{3}y^3-yz=f(\frac{1}{2}y^2-z)\ ③\ \boxed{0/5}$

$$z(x,2)=x\Rightarrow f(2-x)=-x+\frac{8}{3}\Rightarrow f(x)=x+\frac{2}{3}\ ④\ \boxed{0/25}\xrightarrow{③,④}z=\frac{x+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}}{y-1}\quad \boxed{0/25}$$

بسمه تعالی

گروه علوم پایه مهندسی	مدرس:	آزمون درس: ریاضی مهندسی	
تاریخ آزمون: ۱۳۸۹/۹/۲۹	ساعت آزمون: ۱۷	مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه	
پردیس دانشکده های فنی — نیمسال: اول	سال تحصیلی: ۹۰-۱۳۸۹	استفاده از کتاب یا جزوه درسی مجاز نیست	دانشگاه تهران

ردیف	نام و نام خانوادگی دانشجو: شماره دانشجویی:	نمره
۱	ابتدا سری فوریه تابع $f(x)$ را در بازه $-\pi \le x \le \pi$ بدست آورده ($T = 2\pi$) و به کمک آن سری عددی A را محاسبه کنید. $f(x)=\lvert\sin(x)\rvert \quad , \quad A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$	۲/۵
۲	ابتدا تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورده و به کمک آن انتگرال I را محاسبه کنید. $, \quad f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \lvert x\rvert<1 \\ 0 & \lvert x\rvert>1\end{cases} \quad I=\int_0^{\infty}\frac{(x\cos x-\sin x)^2}{x^6}dx$	۲/۵
۳	پس از تبدیل معادله زیر به فرم استاندارد، جواب عمومی آنرا بدست آورید. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$	۲/۵
۴	معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط مرزی داده شده حل نمایید. $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad -1<x<1 \quad , \quad t>0$ $u(-1,t)=u(1,t) \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\rvert_{x=-1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\rvert_{x=1} \quad , \quad u(x,0)=\lvert x\rvert$	۲/۵

با آرزوی موفقیت ، لطفا برگه سوال را ضمیمه پاسخنامه نمایید.

[illegible]

۱) تابع زوج است لذا $b_n = 0$ (۰/۲۵)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \text{ ، فرد } n \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{زوج} \end{cases} \quad (1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \underset{(۰/۲۵)}{0} \Rightarrow \begin{cases} a_{2n-1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \end{cases} \quad (۰/۲۵) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

لذا $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$ (۰/۲۵) به ازای $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ (۰/۵)

۲) $$F(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1-x^2) e^{-i\alpha x} dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos \alpha x \, dx - i\int_{-1}^{1} (1-x^2)\sin \alpha x \, dx = \frac{4(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{\alpha^3} \quad (۱/۵)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{15} \to \int_0^{\infty} \frac{(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{\alpha^6} d\alpha = \frac{\pi}{15} \quad (1)$$

۳) $D = 0 \Rightarrow R = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha = \frac{y}{x} , \ \beta = y$ (دلخواه) (۰/۷۵)

لذا $u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -\frac{\alpha^2}{\beta} u_\alpha \ , \ u_{xx} = \frac{\alpha^4}{\beta^2} u_{\alpha\alpha} + \frac{2\alpha^3}{\beta^2} u_\alpha$

$u_{xy} = -\frac{\alpha^3}{\beta^2} u_{\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2}{\beta} u_{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} u_\alpha \ , \ u_y = \frac{\alpha}{\beta} u_\alpha + u_\beta \ , \ u_{yy} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \dots + \frac{2\alpha}{\beta} u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$ (۱/۵)

جایگزاری $\Rightarrow \beta^2 u_{\beta\beta} = 0 \Rightarrow u_{\beta\beta} = 0 \Rightarrow u = \beta f(\alpha) + g(\alpha) = y f(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$ (۰/۵)

۴) $u(x,t) = F(x) G(t)$

$$\begin{cases} u(-1,t) = u(1,t) \Rightarrow F(1) = F(-1) \ (1) \\ u_x\big|_{x=-1} = u_x\big|_{x=1} \Rightarrow F'(1) = F'(-1) \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \ (3) \\ G' - 2kG = 0 \ (4) \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$k = -\lambda^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} F(x) = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x$ (۰/۲۵) $\overset{(1)}{\Rightarrow} 2B_1 \sin\lambda = 0$ (۰/۲۵) , $\overset{(2)}{\Rightarrow} 2A_1 \lambda \sin\lambda = 0$ (۰/۲۵)

اگر $\sin\lambda \neq 0$ آنگاه $A_1 = B_1 = 0$ که جواب بدیهی است لذا $\lambda = n\pi$ (۰/۲۵)

$(4) \overset{\lambda = n\pi}{\Rightarrow} G(t) = C_1 e^{-2n^2\pi^2 t}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(n\pi x)\} e^{-2n^2\pi^2 t}$ (۰/۲۵)

$(2) \ u(x,0) = |x| \overset{T=2}{\Rightarrow} A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) dx = \frac{1}{2} \ , \ A_n = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \ , \ B_n = 0$ (۰/۵)

لذا $u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) e^{-2n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$