جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات
مرحله دوم
بیستمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۴۰	۵	۲۰

توضیحات مهم

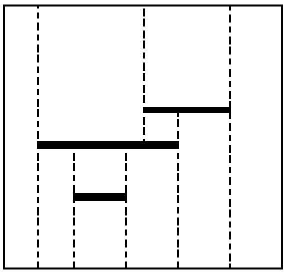
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۰ سوالات تستی، ۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- یک مربع بزرگ را در نظر بگیرید. در داخل آن ۱۳۸۹ پاره‌خط افقی رسم می‌کنیم به‌طوری‌که پاره‌خط‌ها هیچ تقاطع یا تماسی با یکدیگر یا با حاشیه‌ی مربع نداشته باشند. از دو سر هر پاره‌خط یک خط عمودی رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که از بالا و پایین به دو پاره‌خط دیگر یا اضلاع افقی مربع برسد. حداکثر تعداد مستطیل‌های مجزا از هم در شکل حاصل چند تاست؟ (مثلاً در شکل مقابل ۱۰ مستطیل مجزا وجود دارد).



الف) ۵۵۵۶ ب) ۲۷۸۰ ج) ۵۵۵۸ د) ۴۱۶۸ هـ) ۵۵۵۷

۲- ۲۰۱۰ عدد طبیعی دل‌خواه (نه لزوما متمایز) کوچک‌تر از 2^{1389} را جمع می‌زنیم و حاصل‌جمع را در مبنای دو نمایش می‌دهیم. حداکثر تعداد یک‌های حاصل‌جمع این اعداد در مبنای ۲ چندتا می‌تواند باشد؟

الف) ۱۳۸۹ ب) ۲۰۱۰ ج) ۱۳۹۹ د) ۱۳۹۶ هـ) ۱۳۹۷

۳- یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ داریم که شامل ۲۷ خانه‌ی واحد $(1 \times 1 \times 1)$ سفید رنگ است. می‌خواهیم کم‌ترین تعداد خانه‌ی واحد را سیاه کنیم، طوری که هیچ مکعب مستطیل $1 \times 2 \times 2$ (و دوران‌های آن) وجود نداشته باشد که همه‌ی خانه‌های آن سفید باشد. کم‌ترین تعداد خانه‌های سیاه لازم چند است؟

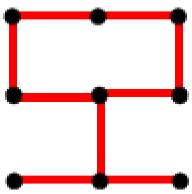
الف) ۱۲ ب) ۸ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۹

۴- در یک شبکه‌ی 3×3 نقطه‌ای، بین هر دو نقطه‌ی مجاور می‌توان یک پاره‌خط به طول ۱ رسم کرد (حداکثر ۱۲ پاره‌خط). یک زیرمجموعه از ۱۲ پاره‌خط را «اشباع‌شده» می‌نامیم اگر:

۱) با رسم پاره‌خط‌های این زیرمجموعه هیچ مربع واحدی (1×1) ایجاد نشود، و همچنین

۲) اگر هر پاره‌خطی که در این زیرمجموعه نیست را اضافه کنیم، حداقل یک مربع 1×1 به وجود آید.

تعداد زیرمجموعه‌های مختلف اشباع شده چند تاست؟ یکی از آن‌ها در شکل دیده می‌شود.



الف) ۵۰ ب) ۳۸ ج) ۳۴ د) ۴۲ هـ) ۴۶

۵- ۲۰ سکه‌ی طلا با شماره‌های ۱ تا ۲۰ داده شده که تعدادی از آن‌ها اصل و بقیه بدلی هستند ولی به لحاظ ظاهری کاملا مشابه‌اند. یک دستگاه در اختیار داریم که ۳ سکه را می‌گیرد و آن‌ها را در دو خروجی خود قرار می‌دهد، به‌طوری‌که سکه‌های اصل در یک خروجی و سکه‌های بدلی در خروجی دیگر قرار گیرند. دقت کنید که لزومی ندارد این دستگاه همیشه سکه‌های اصل را در یک خروجی مشخص قرار دهد.

حداقل با چند بار استفاده از دستگاه می‌توان همواره همه‌ی سکه‌ها را برحسب نوع‌شان به دو دسته تقسیم کرد؟ توجه کنید که لازم نیست نوع هر دسته را بدانیم.

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۸ هـ) ۱۰

۶- علی یک سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کند تا نتیجه‌ی دو پرتاب متوالی، مثل هم بیاید (هر دو رو یا هر دو پشت). چقدر احتمال دارد که علی بیش از ٤ بار سکه را پرتاب کند؟

الف) $\frac{۱}{۸}$ ب) $\frac{۱}{۳۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۱}{۱۶}$ هـ) $\frac{۱}{۴}$

۷- حداکثر چند مربع ۳×۳ را که تمام گوشه‌های آن‌ها مختصات صحیح دارد می‌توان در صفحه‌ی مختصات رسم کرد به‌طوری‌که هر جفت از آن‌ها حداقل در یک مربع ۱×۱ مشترک باشد؟ دقت کنید هیچ دو مربعی نمی‌توانند بر یکدیگر منطبق باشند.

الف) ۳ ب) ٤ ج) ۹ د) ۱۵ هـ) ١٦

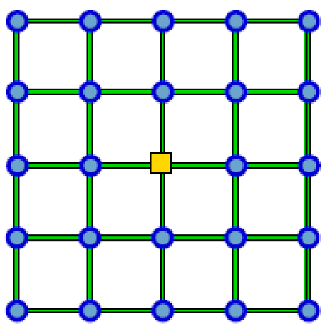
۸- n سکه دور یک دایره با فواصل مساوی چیده شده‌اند و در ابتدای کار همه‌ی آنها به رو هستند. به ازای هر $r \in \{۱,۲,۳,...,n\}$، دقیقاً یک‌بار i سکه‌ی متوالی دل‌خواه را انتخاب می‌کنیم و همـــــه‌ی آن‌ها را برمی‌گردانیم. مقدار n برابر کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا بتوان این n مرحله را طوری انجام داد که بعد از پایان کار، همه‌ی سکه‌ها در وضعیت اولیه (به‌رو) باشند؟

الف) ۲۰۰۹ ب) ۱۳۹۱ ج) ۲۰۱۰ د) ۱۳۸۹ هـ) ۱۳۹۰

۹- ۳ کلید دو وضعیته روی دیوار یک اتاق نصب هستند. هر کلید در هر لحظه در یکی از دو وضعیت ۱ یا ۲ قرار دارد. این وضعیت داخلی است و ما آن را نمی‌دانیم؛ اما می‌توانیم با یک بار فشردن هر کلید، آن را تغییر وضعیت دهیم.
از سقف این اتاق نیز یک لامپ آویزان شده است که در ابتدا خاموش است. می‌دانیم لامپ تنها زمانی روشن می‌شود که وضعیت داخلی هر سه کلید یکسان باشد (همه در وضعیت ۱ یا همه در وضعیت ۲).
حداقل مقدار k چند باید باشد تا بتوانیم در هر حالتی با حداکثر k بار فشردن کلید لامپ را روشن کنیم؟ (k را تعداد کل فشردن دو کلید در نظر بگیرید).

الف) ۲ ب) ۳ ج) ٤ د) ۵ هـ) لزوماً نمی‌توان لامپ را روشن کرد

۱۰- شکل زیر یک شهر را با ٢٤ خانه (دایره‌ها) و یک اداره‌ی پست (در مرکز) نشان می‌دهد. این شهر ٤۰ خیابان به طول ۱ دارد که هر خیابان دو محل (خانه یا اداره‌ی پست) را به یکدیگر متصل می‌کند. ۳ پست‌چی وظیفه دارند نامه‌های مردم را از اداره‌ی پست به درب خانه‌شان برسانند.



یک روز صبح ۳ پست‌چی که به اداره‌ی پست می‌روند متوجه می‌شوند برای هر خانه دقیقا یک نامه آمده است. این پست‌چی‌ها می‌خواهند طوری برنامه‌ریزی کنند که رساندن همه‌ی نامه‌ها به مقصد در سریع‌ترین زمان ممکن به پایان برسد. می‌دانیم هر

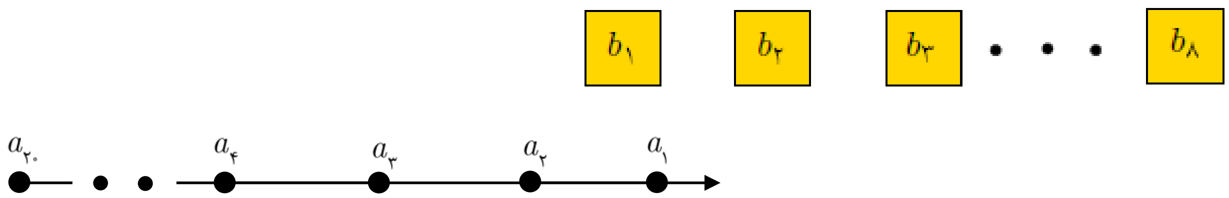
پست‌چی هر خیابان مستقیم (به طول ۱) را در یک دقیقه طی می‌کند و هر پست‌چی در لحظه می‌تواند حداکثر یک نامه در دست داشته باشد.

حداقل چند دقیقه پس از شروع کار، همه‌ی نامه‌ها به مقصد می‌رسد؟

الف) ۳۹ ب) ۲۰ ج) ٤٠ د) ۲۸ هـ) ۳٦

۱۱- ۲۰ دانشجو به فاصله‌ی ۱ متر از هم به ترتیب در یک صف ایستاده‌اند. هر دانشجو یک کارت دارد که بر روی آن یک عدد صحیح نوشته شده است. در امتداد این صف ۸ میز با شماره‌های ۱ تا ۸ و با فاصله‌های یـــک متر از هم قرار گرفته است. پشت هر میز یک استاد نشسته است و کارتی دارد که بر روی آن عدد ۱۳۸۹ نوشته شده است. (در شکل زیر a_i ها متناظر دانشجویان و b_j ها میز استادان است.)

در ابتدا، دانشجوی اول صف درست در مقابل میز شماره‌ی ۱ قرار دارد. کار در ۱۵ مرحله انجام می‌شود و در هر مرحله دو سوت زده می‌شود. با سوت اول هر مرحله، هر دانشجو که مقابل میز یک استاد قرار دارد کارتش را به آن استاد نشان می‌دهد و در صورتی که عدد کارت دانشجو کم‌تر از عدد کارت استاد باشد، آن‌ها کارت‌هایشان را با هم عوض می‌کنند. با سوت دوم هر مرحله، همه‌ی دانشجویان یک متر به جلو می‌روند.



اگر عدد کارت دانشجویان به ترتیب $\langle ۱۳,۲,۴,۱,۸,۳,۹,۱۲,۲۰,۵,۷,۱۴,۹,۸,۱۴,۶,۸,۱۵,۱۰,۱۲\rangle$ باشد $(a_۱=۱۲)$، پس از پایان ۱۵ مرحله استاد دوم چه کارتی را در اختیار خواهد داشت؟

الف) ۸ ب) ۳ ج) ٦ د) ۱٤ هـ) ٥

۱۲- در راهروی نقاشی‌های ارزشمند یک موزه، n تابلوی نقاشی با شماره‌های ۱ تا n در یک ردیف کنار هم به دیوار آویخته شده‌اند. یک سارق می‌خواهد از این موزه دزدی کند. او می‌داند ارزش تابلوی i ام برابر v_i است. به دلیل نزدیک بودن تابلوها به هم، اگر سارق تابلوی شماره i را از دیوار بکند، دو تابلوی مجاور آن با شماره‌های $i-۱$ و $i+۱$ (در صورت وجود) پاره و بی‌ارزش می‌گردند.

هدف سارق سرقت تعدادی از تابلوهای موزه است که مجموع ارزش تابلوهای سرقتی (سود وی) بیشینه شود. $P(i)$ را برابر بیشینه‌ی سود سارق تعریف می‌کنیم در حالتی که فقط تابلوهای شماره‌ی ۱ تا i قابل سرقت هستند. در این صورت کدام رابطه‌ی زیر برقرار است؟ (فرض کنید $P(۰)=۰$ و $P(-۱)=۰$ قرار داده شده است. منظور از $max\ a,b$، مقدار بیشینه‌ی a و b است)

الف) $P(i)=\max(v_i+P(i-۱),P(i-۲))$

ب) $P(i)=v_i+\max(P(i-۱),P(i-۲))$

ج) $P(i)=P(i-۱)+\max(v_i,P(i-۲))$

د) $P(i)=P(i-۲)+\max(v_i,P(i-۱))$

هـ) $P(i)=\max(v_i+P(i-۲),P(i-۱))$

۱۳- n راننده با ماشین‌های هم‌اندازه به طول L می‌خواهند طوری در یک طرف خیابانی به طول ۱۳۸۹ پارک کنند که یک ماشین تازه وارد، هیچ جای پارکی به طول حداقل M در همان طرف خیابان نداشته باشد. منظور از جای پارک فاصله‌ی بین دو ماشین متوالی، و یا فاصله‌ی بین ابتدا یا انتهای خیابان با نزدیک‌ترین ماشین است. در کدام یک از گزینه‌های زیر n راننده به هدف خود نمی‌رسند؟ (در هر گزینه (n, L, M) داده شده است)

الف) (۱۹۹, ۱, ٦) ب) (۹۹, ۳, ۱۲) ج) (۹, ۵۰ , ۱۰۵)

د) (٤, ۱۰۰ , ۲٤۸) هـ) (۲۹۹, ۱, ۳)

۱۴- ۲۰ سکه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ و وزن‌های متفاوت در اختیار داریم، ولی وزن هیچ یک از سکه‌ها را نمی‌دانیم. به صفی از سکه‌ها که از چپ به راست چیده شده‌اند «مرتب» می‌گوییم اگر هر سکه از سکه‌ی سمت راستش سبک‌تر باشد. دستگاه مرتب‌سازی در اختیار داریم که در هر بار استفاده ۱۰ سکه را می‌گیرد و صف مرتب آن‌ها را در خروجی تحویل می‌دهد. حداقل مقدار k چند باید باشد که در هر حالتی با حداکثر k بار استفاده از دستگاه بتوانیم صف مرتب همه‌ی سکه‌ها را ایجاد کنیم؟

الف) ۸ ب) ٦ ج) ۹ د) ۵ هـ) ۷

۱۵- در یک لیگ فوتبال ۸ تیم حضور دارند. هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند، هر برد برای برنده ۳ امتیاز و هر مساوی برای هر دو تیم ۱ امتیاز دارد ولی باخت امتیازی ندارد. در پایان مسابقات تیم‌ها در جدول رده‌بندی براساس مجموع امتیازشان مرتب می‌شوند، و اگر چند تیم امتیاز برابر کسب کنند براساس ترتیب دل‌خواهی در رده‌های متوالی جدول قرار می‌گیرند. می‌دانیم هر تیم حداقل ۱ برد، حداقل ۱ باخت و حداقل ۱ مساوی دارد. حداکثر اختلاف امتیاز تیم اول و سوم جدول رده‌بندی چند امتیاز می‌تواند باشد؟

الف) ۹ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ هـ) ۱۱

۱۶- یک الگوریتم بر روی متغیرهای n، b، s و r عملیات زیر را انجام می‌دهد:

۱) مقدار n را به عنوان ورودی بگیر.

۲) مقدار b و s را برابر ۰ قرار بده.

۳) باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۲ را در r بریز.

٤) اگر مقدار r با مقدار b متفاوت بود مقدار s را یک واحد افزایش بده.

۵) مقدار r را در b بریز.

٦) مقدار خارج قسمت تقسیم n بر ۲ را پیدا کن. این مقدار را در n بریز.

۷) اگر مقدار n بیش‌تر از ۰ بود به مرحله‌ی ۳ برو.

۸) مقدار s را در خروجی چاپ کن.

اگر این الگوریتم را یک بار برای ورودی $n = ۱$ ، یک بار برای ورودی $n = ۲$,…, و یک بار برای ورودی $n = ۱۲۸$ اجرا کنیم، بیش‌ترین مقداری که در حین این ۱۲۸ اجرای مستقل در خروجی چاپ می‌شود چند است؟

الف) ۹ ب) ٦ ج) ۸ د) ۷ هـ) ۵

۱۷- الگوریتم زیر مقدار متغیرهای $a_۱, a_۲, a_۳$ و $a_۴$ را از ورودی می‌گیرد، از متغیرهای m و s استفاده می‌کند و مقدار s را در خروجی چاپ می‌کند:

۱) مقدار s را برابر ۰ قرار بده.

۲) مقدار m را برابر مقدار $a_۱$ قرار بده.

۳) کار زیر را یک بار برای $i = ۲$ ، یک بار برای $i = ۳$ و یک بار برای $i = ۴$ انجام بده:

اگر مقدار a_i از مقدار m بیش‌تر است: مقدار a_i را در m بریز و همچنین به مقدار s یک واحد اضافه کن.

٤) مقدار s را در خروجی چاپ کن.

مثلاً برای ورودی $\langle ۱,۳,۲,۴\rangle = \langle a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\rangle$ مقدار ۲ در خروجی نوشته می‌شود چرا که شرط سطر سوم تنها برای $i = ۲$ و $i = ۴$ برقرار می‌شود.

می‌دانیم اعداد ۱ تا ٤ را می‌توان به $۲۴ = ۱\times۲\times۳\times۴ = !۴$ حالت مختلف در متغیرهای $a_۱$ تا $a_۴$ قرار داد.

فرض کنید برای تمام این ۲٤ حالت، برنامه‌ی بالا را اجرا می‌کنیم تا ۲٤ عدد در خروجی نوشته شود. حاصل جمع این ۲٤ عدد چند است؟

الف) ۳۲ ب) ۲٦ ج) ٤٨ د) ۳٦ هـ) ۳۰

۱۸- ٦ لامپ با شماره‌های ۱ تا ٦ در یک ردیف قرار دارند. عمل $P(k)$ (که $۱ \leq k \leq ۶$) وضعیت تمام لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها مضرب k است عوض می‌کند (از روشن به خاموش و از خاموش به روشن). مثـــــلاً $P(۲)$ لامپ‌های شماره‌ی ۲، ٤ و ٦ را تغییر وضعیت می‌دهد و $P(۵)$ فقط وضعیت لامپ شماره ۵ را عوض می‌کند.

مریم وظیفه دارد که وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند و سپس عمل‌های $P(۱), P(۲), \ldots$ تا $P(۶)$ را به همین ترتیب انجام بدهد. با این کار او ۷ صحنه از لامپ‌ها خواهد داشت: وضعیت اولیه، وضعیت بعد از انجام $P(۱)$، وضعیت بعد از $p(۲), \ldots$ و وضعیت بعد از $P(۶)$.

امتیاز هر صحنه برابر تعداد لامپ‌های روشن در آن صحنه است. مریم می‌خواهد طوری وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند که مجموع امتیازهای این ۷ صحنه بیشینه شود. این مقدار بیشینه چند است؟

الف) ۲۹ ب) ۲٤ ج) ۳٦ د) ۲۱ هـ) ۱۷

۱۹- جدول A به صورت زیر داده شده است:

۱۱	۳	۴	۱	۲
۶	۱	۶	۴	۵
۲	۱۰	۳	۲	۱
۸	۲	۳	۹	۶
۵	۸	۲	۵	۱

می‌خواهیم در یک جدول ۵×۵ دیگر به اسم B، مقادیر ۱ تا ۲۵ را، هر کدام دقیقاً یک بار، به گونه‌ای قرار دهیم که مقدار S کمینه شود. مقدار S به صورت زیر به دست می‌آید:

جدول A و B را روی هم قرار می‌دهیم. در هر خانه دو مقدارِ روی هم قرار گرفته از جدول A و B را در یک‌دیگر ضرب می‌کنیم تا ۲۵ عدد جدید به دست آید. مجموع ۵ عدد جدید هر سطر را جلوی آن سطر را می‌نویسیم. S برابر کوچکترین عدد از میان اعداد جلوی سطرها است.

به عنوان مثال اگر مقادیر خانه‌های B معادل جدول ۵×۵ تعیین شود، اعداد قرار گرفته در مقابل هر سطر برابر جدول ۱×۵ زیر می‌گردد و مقدار S برابر ۱۷۳ خواهد بود:

۲۰	۵	۴	۱۹	۱
۷	۶	۲	۱۲	۱۳
۲۱	۱۴	۸	۳	۹
۲۲	۱۵	۱۰	۱۱	۱۸
۲۳	۲۴	۱۶	۱۷	۲۵

۲۷۲
۱۷۳
۲۲۱
۴۴۳
۴۴۹

مقدار کمینه‌ی S به ازای تمام حالت‌های مختلف جدول B چقدر است؟

الف) ۳۵ ب) ٤۱ ج) ۲۹ د) ٤٦ هـ) ٥٤

۲۰- ۲٤ طراح در جلسات طرح سوال یک آزمون شرکت کرده‌اند و هر یک از آن‌ها تعدادی (بیش از صفر) سوال طرح کرده است. در پایان کار سه شرط زیر می‌بایست برقرار باشد:

- (شرط اطمینان) هر سؤالِ طرح شده، باید دقیقاً توسط سه نفر دیگر (غیر از طراح آن سؤال) «بازبینی» بشود.
- (شرط عدم تبانی) هیچ طراحی نمی‌تواند بیش از یک سوال از یک طراح دیگر را بازبینی کند.
- (شرط عدالت) به‌ازای هر دو طراح A و B، اگر A یکی از سؤالات B را بازبینی می‌کند B نیز باید دقیقاً یک سؤال از A را بازبینی بکند.

حداکثر تعداد سؤالات طرح شده چقدر می‌تواند باشد به‌طوری‌که تمام شرایط فوق نیز برقرار شود؟

الف) ۱۹۲ ب) ١٦٨ ج) ۲٤ د) ۹۲ هـ) ۹٦

بخش تشریحی

۱- استخدام (۲۰ نمره)

در یک شهر کوچک دو شرکت تازه تاسیس برای جذب کارمند آگهی استخدام داده‌اند. آن‌ها می‌دانند دقیقاً n نفر متقاضی کار در این شهر وجود دارد که همه‌ی آن‌ها ناگزیرند در یکی از این دو شرکت به کار مشغول شوند. هر یک از دو شرکت در آگهی استخدام خود، یک لیست با n خانه درج کرده‌اند که مشخص می‌کند اگر آن شرکت i کارمند $(1 \leq i \leq n)$ داشته باشد، به هر یک از آن‌ها چه حقوقی تعلق خواهد گرفت (حقوق همه‌ی کارمندان در یک شرکت مساوی و فقط به تعداد کارمندان آن وابسته است). توجه کنید که اعداد نوشته شده در هر یک از این دو جدول مثبت ولی دل‌خواه هستند و لزوماً هیچ ترتیب خاصی ندارند.

ثابت کنید که n کارمند همواره می‌توانند طوری در این دو شرکت استخدام شوند که هیچ‌یک از کارمندان تمایلی به تغییر شرکت نداشته باشد. زمانی یک کارمند مایل به تغییر شرکت خود خواهد بود که در صورت این تغییر، میزان حقوقش افزایش یابد.

۲- جای‌گشت (**۲۰ نمره**)

به دنباله‌ی π به طول n از اعداد $\{1,...,n\}$ یک «جای‌گشت» می‌گوییم اگر و تنها اگر هر کدام از این اعداد دقیقاً یک‌بار در دنباله ظاهر شود. عددی که در مکان i ام جای‌گشت ظاهر می‌شود را با $\pi(i)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال $\pi: \langle 1,3,4,2 \rangle$ یک جای‌گشت به طول ٤ می‌باشد. پدر علی به او جای‌گشتی از اعداد ۱ تا 2^k داده است $(k \geq 1)$. علی می‌خواهد کاری کند که به ازای هر $1 \leq i \leq n = 2^k$ ، داشته باشیم $\pi(i) = i$. او برای این کار از الگوریتم زیر استفاده می‌کند:

۱) i را برابر ۱ قرار بده.

۲) عدد $\pi(i)$ را با $\pi(\pi(i))$ جابه‌جا کن.

۳) به i یک واحد اضافه کن.

٤) اگر $i \leq 2^k$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.

۵) پایان.

مثلاً، پس از اجرای الگوریتم فوق برای مثال بالا $(\pi: \langle 1,3,4,2 \rangle)$ ، به جای‌گشت $\pi': \langle 1,2,3,4 \rangle$ می‌رسیم.

الف) ثابت کنید با k بار اجرای الگوریتم فوق، تمام اعداد سرجای خود قرار می‌گیرند.

ب) برای هر عدد k، جای‌گشتی مثال بزنید که نتوان با $k-1$ بار اجرای الگوریتم فوق تمام اعداد را در جای خود قرار داد.

۳- بزرگ‌راه‌ها (**۲۰ نمره**)

بین n شهر در یک کشور $(n > 2)$, $n-1$ بزرگ‌راه به گونه‌ای احداث شده‌اند که از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان سفر کرد. هر بزرگ‌راه دقیقاً دو شهر را به یک‌دیگر وصل می‌کند که این زوج شهرها را «مجاور» هم می‌نامیم. قرار است به هر بزرگ‌راه یک عدد به عنوان عوارض اختصاص یابد به گونه‌ای که هر خودرویی که از آن بزرگ‌راه می‌گذرد مجبور باشد آن

مقدار عوارض را به هر یک از دو شهر در دو سر آن بزرگ‌راه بپردازد. درآمد هر شهر برابر مجموع عوارض اختصاص یافته به بزرگ‌راه‌هایی است که یک سرشان به آن شهر متصل است.

یک تیم کارشناسی به ازای هر بزرگ‌راه دو عدد مختلف پیش‌نهاد کرده است و ما می‌توانیم یکی از این دو عدد را به عنوان عوارض آن بزرگ‌راه تعیین کنیم. ولی به دلیل افزایش رقابت بین شهرها، عوارض تعیین شده برای بزرگ‌راه‌ها باید طوری باشد که درآمد هر شهر با هیچ یک از شهرهای مجاورش یک‌سان نباشد.

الف) ثابت کنید اگر تمامی عددهای پیش‌نهادی حقیقی و بزرگ‌تر از صفر باشند، هم‌واره می‌توان عوارض بزرگ‌راه‌ها را طوری تعیین کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند.

ب) فرض کنید امکان پیشنهاد عدد صفر هم باشد (یعنی امکان دریافت نکردن عوارض در بعضی از بزرگ‌راه‌ها). مثالی ارائه کنید که در آن نتوان عوارض هر بزرگ‌راه را از بین اعداد پیشنهادی به گونه‌ای انتخاب کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند. دقت کنید که در مثال خود باید برای هر بزرگ‌راه دو عدد متفاوت پیش‌نهاد کنید که دست‌کم یکی از آن دو عدد بزرگ‌تر از صفر باشد.

۴- کشور عجیب (**۲۰ نمره**)

در کشور «عجیب» تعدادی شهر وجود دارد که بعضی از آن‌ها با جاده‌ی دو طرفه به هم وصل شده‌اند. می‌دانیم در این کشور از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان با عبور از تعدادی جاده مسافرت کرد. در این کشور عجیب تنها یک اتومبیل وجود دارد. یک جهان‌گرد با خرید آن اتومبیل وارد یکی از شهرها شده است. او قصد دارد از همه‌ی شهرهای این کشور بازدید کند. در این کشور عجیب هر شهر تنها از یک میدان تشکیل شده است که تمام جاده‌های منتهی بدان شهر، به این میدان می‌رسند. در وسط میدان هر شهر یک پلیس ایستاده است و در هر لحظه تنها یک جاده را برای خروج از شهر باز می‌گذارد اما اجازه‌ی ورود به شهر را از هر جاده‌ای می‌دهد.

فرض کنید پلیس هر شهر بلافاصله پس از خروج اتومبیل از آن شهر، خروجی باز را می‌بندد و جاده‌ی بعد از آن را (در جهت ساعت‌گرد دور میدان) برای خروج باز می‌کند. ثابت کنید جهان‌گرد با شروع از هر شهر دل‌خواه و با هر وضعیت اولیه‌ی خروجی‌های باز، می‌تواند از همه شهرها دیدن کند. توجه کنید جاده‌ها تنها در میدان شهرها با یک‌دیگر تقاطع دارند.

۵- دنباله (**۲۰ نمره**)

دنباله‌ی $A=\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. در ابتدای کار، به ازای هر $1\le i\le n$ می‌دانیم که $a_i=i$.
هم‌چنین یک متغیر b تعریف می‌کنیم و مقدار اولیه‌ی آن را برابر ۰ می‌گذاریم.

فرض کنید $f(z)$ برابر تعداد اعدادی از دنباله‌ی A است که مقدارشان برابر z است. مثلا اگر $n=8$ در ابتدای کار داریم: $A=\langle 1,2,3,4,5,6,7,8\rangle$ و هم‌چنین $f(8)=1$ و $f(9)=0$. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که در هر بار اجرا، دو عدد طبیعی x و y را از ورودی می‌گیرد و پردازش می‌کند $(1\le x,y\le n)$:

۱) مقدار x و y را از ورودی دریافت کن.

۲) اگر $a_x=a_y$ ، به مرحله‌ی ۹ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.

۳) اگر $f(a_x) \le f(a_y)$ ، به مرحله‌ی ٤ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۷ برو.

٤) B را به اندازه‌ی $f(a_x)$ واحد اضافه کن.

۵) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_x است را به a_u تبدیل کن.

٦) به مرحله‌ی ۹ برو.

۷) B را به اندازه‌ی $f(a_y)$ واحد اضافه کن.

۸) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_y است را به a_x تبدیل کن.

۹) پایان.

برای مثال اگر $n=8$ و الگوریتم را دو بار، ابتدا به ازای $(x,y)=(2,3)$ و سپس به ازای $(x,y)=(2,7)$ اجرا کنیم، پس از اجرای الگوریتم خواهیم داشت: $A=\langle 1,3,3,4,5,6,3,8\rangle$. هم‌چنین، مقدار B بعد از این دو اجرا برابر ۲ خواهد بود.

الف) فرض کنید $n=16$ و می‌خواهیم الگوریتم را ۱۵ بار اجرا کنیم. مقدار x و y را برای هر اجرا طوری تعیین کنید که پس از پایان کار، مقدار B برابر ۳۲ باشد.

ب) فرض کنید $n=2^k$ و می‌خواهیم الگوریتم را $n-1$ بار اجرا کنیم $(k\ge 1)$. ثابت کنید نمی‌توان مقادیر x و y را در این دفعات اجرا طوری تعیین کرد که پس از پایان کار مقدار B بیش‌تر از $k\times 2^k$ شود.