

تیمین سری ۳

① با استفاده از اطلاعات داده شده، عبارات زیر را بدست آورید.

$$\vec{A} = 3xyz^2 \hat{i} + 2xy^2z \hat{j} - x^2yz \hat{k}, \quad \vec{B} = x^2 \hat{i} + yz \hat{j} - xy \hat{k}, \quad \phi = 2x^2yz^3$$

a)  $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \phi$

b)  $\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi$

c)  $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$

d)  $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A})$

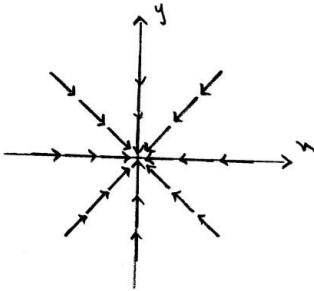
e)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$

f)  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

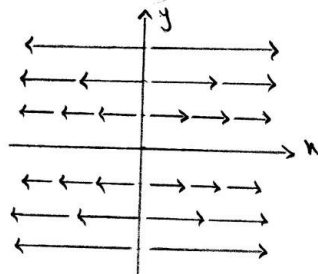
② الف) ضرایب ثابت  $a, b, c$  را طوری بیابید که مشتق جیبی  $\phi = ax^2y^2 + byz + cz^2x^2$  در نقطه  $(1, 2, -1)$  دارای بیشترین اندازه شود ((۲۴)) و در جهت موازی با محور  $z$  باشد.

ب) در هر یک از میدان‌های برداری زیر، علامت دیورانس میدان را تعیین کنید.

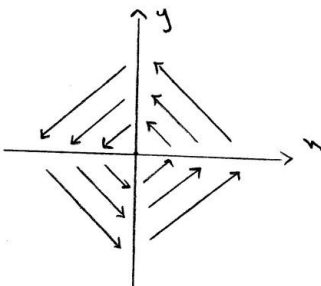
a)



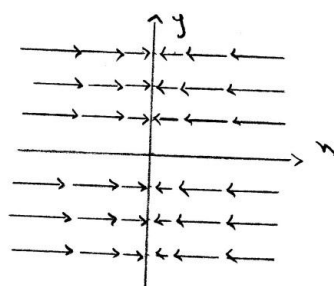
b)



c)



d)



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} r^n) = n(n+1)r^{n-2}; \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

③ ثابت کنید

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{a} xyz e^{-(x+y+z)/a}$$

④ با استفاده از پتانسیل روی برو:

الف) میدان الکتریکی  $\vec{E}$  را بدست آورید.

ب) چگالی جیبی توزیع بار تولیدکننده میدان را بدست آورید.

$$[\text{راهنمایی: } \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}]$$

⑤ دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  را به صورت پادسامتگرد حول بردار  $\hat{n}$  و یکدیگر  $\hat{n}$  و تحت زاویه  $\varphi$

به دستگاه جدید  $(x', y', z')$  دوران می‌دهیم.

در دستگاه جدید بردار شعاعی به صورت زیر است:

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \varphi + \vec{r} \times \hat{n} \sin \varphi + \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{r}) (1 - \cos \varphi)$$

الف) درستی رابطه بالا را از دیدگاه هندسی نشان دهید.

ب) نشان دهید اگر  $\hat{n} = \hat{e}_z$  باشد، ماتریس تبدیل دستگاه مختصات برابر ماتریس دوران حول محور  $z$  است.

ج) نشان دهید  $r' = r$ .

⑥ تابع  $f(x, y, z)$  را در نظر بگیرید. نشان دهید که  $\vec{\nabla} f$  تحت دوران مانند یک بردار تبدیل می‌شود.  
 [ راهشای:  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$  ]