بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

سیزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های پایان دوره

آزمون تحلیل داده ۲

(۱۲ شهریور ۱۳۹۶ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۳۰)

توضیحات مهم:

۱. این آزمون ۳ سؤال دارد و زمان آن ۲۷۰ دقیقه است.
۲. به همراه سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ٤ کاغذ رسم نمودار و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است. نام و نام خانوادگی خود را **تنها بر روی دفترچه‌ی پاسخ‌نامه** وارد کنید.
۳. در دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، پاسخ هر سؤال را در برگه‌ی مربوط به همان سؤال بنویسید.
٤. استفاده از ماشین حساب CASIO – 82 مجاز است.
٥. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^{3}\,s^{-2}\,kg^{-1}}$	$۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$
	سرعت نور	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	$۳/۰۰ \times ۱۰^{۸}$
h	ثابت پلانک	$\mathrm{J\,s}$	$۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$
	ثابت بولتزمن	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	$۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$
	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$	$۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}$
	جرم اتم هیدروژن	kg	$۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶}$
ly	سال نوری	m	$۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$
$\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶}$
$\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$
	قدر مطلق خورشید		۴/۷۲
$\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴}$
$\oplus$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸
$_{\circ}$	ثابت هابل	$\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$	۶۸

سؤال ۱: مدل‌سازی تبخیر خوشه‌های کروی (۳۹۵ نمره)

خوشه‌های کروی، مجموعه‌ای چگال از ستاره‌ها هستند که بررسی تحول آنها در چند قرن اخیر توجه منجمان زیادی را به خود جلب کرده است. مطالعه‌ی آثار گرانشی ستاره‌های یک خوشه بر یک‌دیگر پیچیده است؛ اما به‌دلیل فاصله‌ی نسبتاً زیاد بین ستاره‌های عضو خوشه، برخوردهای ضعیف، تنها عامل تأثیرگذار در تحول خوشه هستند. وقتی ستاره‌ای با فاصله‌ی زیاد از کنار ستاره‌ی دیگری عبور می‌کند، در اثر نیروی گرانش، سرعت ستاره را تغییر می‌دهد که به آن برخورد ضعیف می‌گویند. این گونه برخوردها باعث انتقال انرژی بین ستاره‌های خوشه شده و نحوه‌ی توزیع سرعت ستاره‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در نتیجه‌ی این‌گونه تبادل انرژی بین ذرات سیستم (ستاره‌ها)، توزیع سرعت ذرات از تابع ماکسول-بولتزمن پیروی خواهد کرد؛ بنابراین همیشه ذراتی وجود دارند که سرعت آن‌ها از سرعت فرار بیشتر است؛ این ذرات (ستاره‌ها) از خوشه فرار می‌کنند. پس از خروج این ذرات، در اثر برخوردهای ضعیف، دوباره سرعت ذرات باقی مانده توزیع شده و ذرات جدیدی در سرعت‌های بالاتر از سرعت فرار قرار گرفته و از خوشه خارج می‌شوند. این فرایند تکرار شده و کم‌کم باعث تبخیر خوشه‌ی کروی می‌شود. مدت زمان تبخیر برای اکثر خوشه‌ها بسیار طولانی بوده و به همین دلیل، اکثر خوشه‌هایی که تا به حال در راه شیری شکل گرفته‌اند فاصله‌ی زیادی تا تبخیر کامل دارند. با وجود این، می‌توان با بررسی خوشه‌هایی که در معرض تبخیر کامل هستند، تخمینی از سن راه شیری بدست آورد. در این سوال، قصد داریم با بررسی خوشه کروی جوان NGC 362، رابطه‌ای کلی برای تبخیر خوشه‌ها به دست آورده و پس از آن با توجه به اطلاعات دیگر خوشه‌ها سن راه شیری را تخمین بزنیم. در جدول ۱، در انتهای سؤال، توزیع سرعت ستاره‌های خوشه‌ی NGC 362 در اختیار شما قرار گرفته است. هم‌چنین شکل این خوشه نیز در پیوست آورده شده است.

توجه: روابط مورد نیاز در انتهای سوال داده شده است.

الف) با برازش منحنی مناسب بر داده‌های جدول ۱، دمای خوشه را به دست آورید. جرم متوسط ستاره‌های خوشه را ۰/۸ جرم خورشید در نظر بگیرید.

ب) نشان دهید سرعت فرار از خوشه برابر مقدار زیر است.

$$= \sqrt{\frac{۱۲}{\quad}}$$

ج) کسری از ستاره‌های خوشه که در حال فرار هستند را می‌نامیم. مقدار را برای این خوشه با دو رقم معنادار به دست آورید. درصورت نیاز، می‌توانید از انتگرال زیر استفاده کنید:

$$\int_{۰} {}^{۲}\exp(-{}^{۲}) = \frac{۱}{۴}(\sqrt{\ }\,\mathrm{erf}(\ ) - ۲\ {}^{-\ ۲})$$

$\mathrm{erf}(\ )$ تابع خطا نام دارد و مقدار آن به ازای های مختلف در پیوست آورده شده است.

د) زمان واهلش[1] ( ) زمان متوسطی است که طول می‌کشد تا سیستم پس از برخورد ضعیف، دوباره به وضعیت تعادل برسد؛ یعنی سرعت ذرات دوباره توزیع شود. رابطه‌ی در انتهای سؤال داده شده است. با توجه به نتیجه‌ی قسمت قبل، استدلال کنید که نرخ تبخیر خوشه باید به صورت زیر باشد

— = − ———

راهنمایی: تغییر تعداد ستاره‌های خوشه در طول یک زمانِ واهلش را در نظر بگیرید.

می‌توان نشان داد که اگر آهنگ از دست دادن انرژی خوشه (ناشی از فرار ستاره‌ها) متناسب با انرژی کل سیستم باشد، شعاع خوشه در معادله‌ی زیر صدق می‌کند

— = − ———

که ثابت و مقدار آن برابر ۰۴۹۶۵/۰ است.

<u>جواب قسمت‌های «ه»، «و» و «ز» را در جدول I پاسخ‌نامه وارد کنید.</u>

ه) با توجه به شکل پیوست و پارامترهای محاسبه شده در قسمت‌های قبل، شعاع خوشه، تعداد ستاره‌های آن و زمان واهلش را در لحظه‌ی شکل‌گیری خوشه به دست آورید. روش خود در محاسبه‌ی شعاع خوشه را به طور کامل شرح دهید. توجه کنید که خوشه‌های در حال تبخیر دارای یک هسته با چگالی بالا هستند که بقیه‌ی ستاره‌های خوشه به طور پراکنده در اطراف این هسته قرار گرفته‌اند.

و) با استفاده از مقادیر اولیه‌ی فوق، شعاع خوشه، تعداد ستاره‌های آن و زمان واهلش را در هر یک از زمان‌های داده شده حساب کنید.

راهنمایی: برای محاسبه‌ی مشتق می‌توانید از رابطه‌ی تقریبی زیر استفاده کنید.

$$( ) \cong (_{0}) + {}'(_{0})(- _{0})$$

هم‌چنین توجه کنید که زمان واهلش خوشه نیز در طول زمان تغییر می‌کند.

ز) با به‌کارگیری قضیه‌ی ویریال، دمای معادل خوشه را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

ح) نمودارهای دما بر حسب زمان و تعداد ستاره‌ها بر حسب زمان را برای خوشه رسم کنید.

[1] Relaxation Time

حال قصد داریم با استفاده از داده‌های به دست آمده برای خوشه‌ی NGC 362، رابطه‌ای کلی برای تبخیر خوشه‌های کروی به دست آوریم. اگر معادله‌های مربوط به تحول سیستم را به طور تحلیلی حل کنیم، به رابطه‌های زیر برای تعداد ستاره‌ها و شعاع خوشه می‌رسیم.

$$( ) = \ _{۰} (۱ - \frac{}{}) ^{۰/۰۹۵}$$

$$\frac{( )}{_{۰}} = (\frac{( )}{_{۰}})$$

در رابطه‌ی دوم مقدار ثابت است.

ط) با برازش منحنی مناسب بر داده‌های قسمت قبل، مقدار و را به همراه خطا به دست آورید.

ی) پارامتر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$= \ ^{۰}$$

که ^{۰} زمان واهلش اولیه‌ی خوشه است. را به همراه خطا حساب کنید.

ک) نکته‌ی جالب توجه این است که به دست آمده در قسمت قبل، برای تعداد بسیار زیادی از خوشه‌های کروی مقدار ثابتی است. درنتیجه می‌توان با محاسبه‌ی زمان واهلش اولیه، زمان تبخیر این خوشه‌های کروی را حساب کرد. منجمان به تازگی سه خوشه‌ی کروی کشف کرده‌اند که در مراحل انتهایی تحول خود هستند و تقریباً به طور کامل تبخیر شده‌اند. با استفاده از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای، این دانشمندان توانسته‌اند شعاع هر خوشه را در زمان‌های اولیه‌ی شکل‌گیری آن تعیین کنند. مقادیر شعاع در زمان شکل‌گیری خوشه و هم‌چنین قدر مطلق و توزیع سرعت هر خوشه در یک زمان نامعلوم ($_{۲}$) در انتهای سؤال به شما داده شده است. با بهره‌گیری از روابط قسمت‌های قبلی، سن هر یک از خوشه‌ها را به همراه خطا به دست آورده و در جدول II پاسخ‌نامه وارد کنید. سپس با میانگین‌گیری مناسب، سن راه شیری را به همراه خطا در جدول III پاسخ‌نامه گزارش کنید. در این قسمت نیازی به برازش نیست. هم‌چنین می‌توانید ستاره‌های هر خوشه را خورشیدگون در نظر بگیرید. از خطای داده‌گیری از روی نمودارها صرف نظر کنید.

روابط مورد نیاز:

تابع توزیع ماکسول-بولتزمن:

$$( ) \quad = ۴ \quad ^{۲}(\frac{\quad}{۲})^{\frac{۳}{۲}} \quad -\frac{\quad ^{۲}}{۲}$$

( ) احتمال مشاهده‌ی ستاره‌ای با سرعت بین و + است. این توزیع دارای ویژگی‌های زیر است

$$= \sqrt{\frac{^{۲}}{\quad}}$$

$$= \sqrt{\frac{^{۳}}{\quad}}$$

سرعتی است که در آن ( ) بیشینه می‌شود و $= \sqrt{\quad ^{۲}}$ ریشه‌ی میانگین مجذور سرعت‌هاست.

زمان واهلش بر حسب تعداد ستاره‌ها و شعاع خوشه:

$$= ۲/۴\frac{}{\ln}^{۰/۵}(\frac{}{۱\,\mathrm{pc}})^{۱/۵}\ \mathrm{Myr}$$

انرژی خودگرانشی کره:

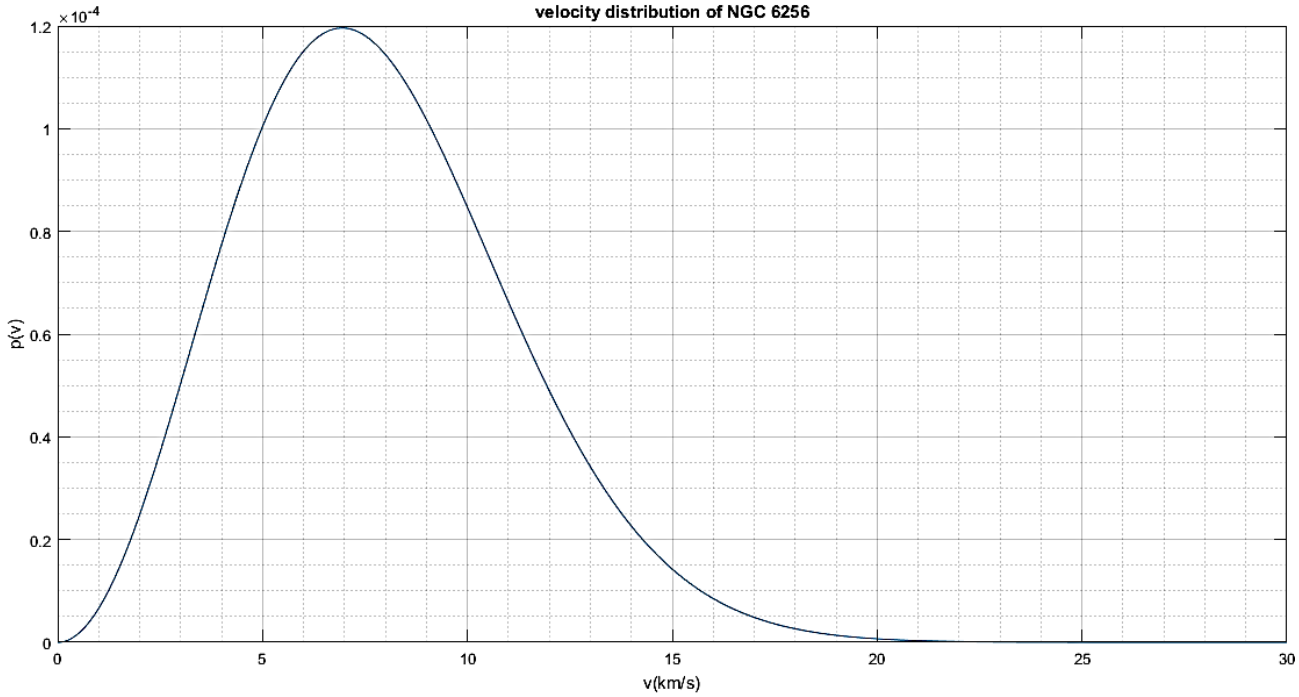
$$\Omega = -\frac{۳}{۵}\frac{\quad ^{۲}}{\quad}$$

جدول ۱ - توزیع سرعت ستاره‌های خوشه‌ی NGC 362

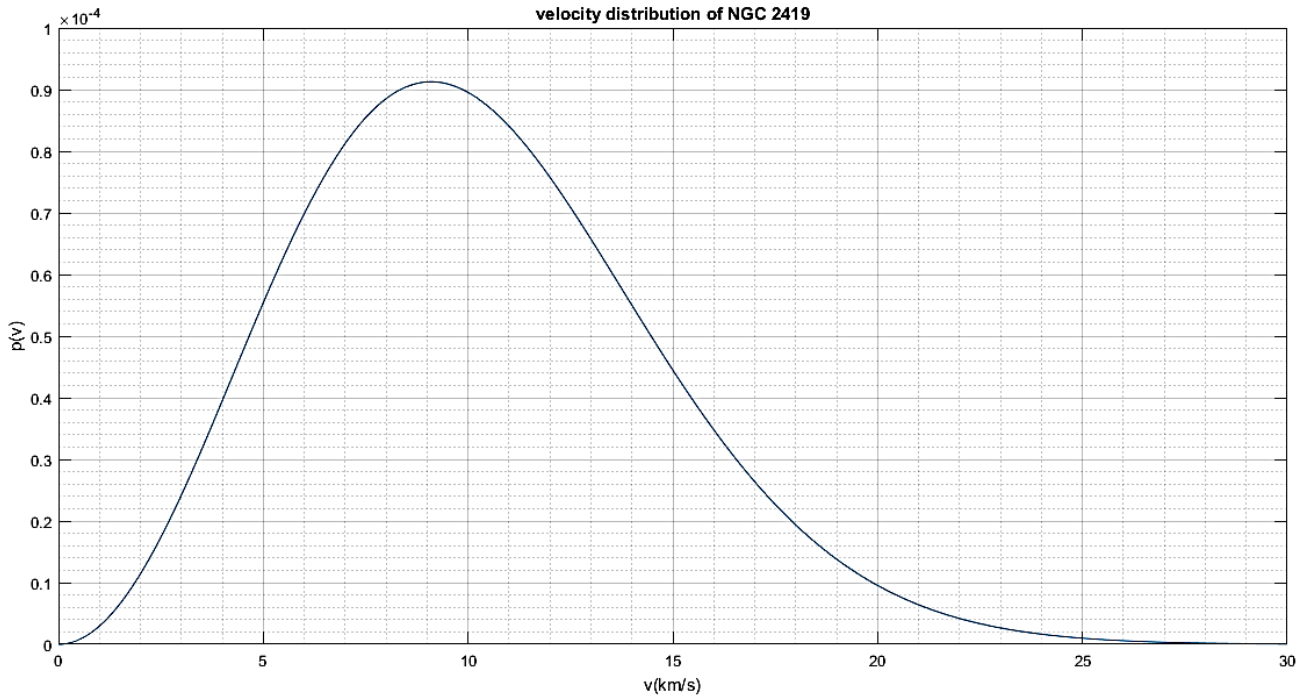
#	($^{-1}$)	( )
1	1.77E+03	8.12E-06
2	2.98E+03	3.64E-05
3	4.60E+03	5.76E-05
4	5.14E+03	8.13E-05
5	6.09E+03	9.27E-05
6	8.79E+03	1.02E-04
7	1.05E+04	9.15E-05
8	1.23E+04	6.96E-05
9	1.39E+04	4.85E-05
10	1.49E+04	2.84E-05
11	1.90E+04	7.69E-06
12	2.08E+04	3.86E-06
13	2.33E+04	8.29E-07
14	2.47E+04	3.23E-07
15	2.69E+04	8.76E-08

جدول ۲ - مشخصات ۳ خوشه‌ی مورد بررسی

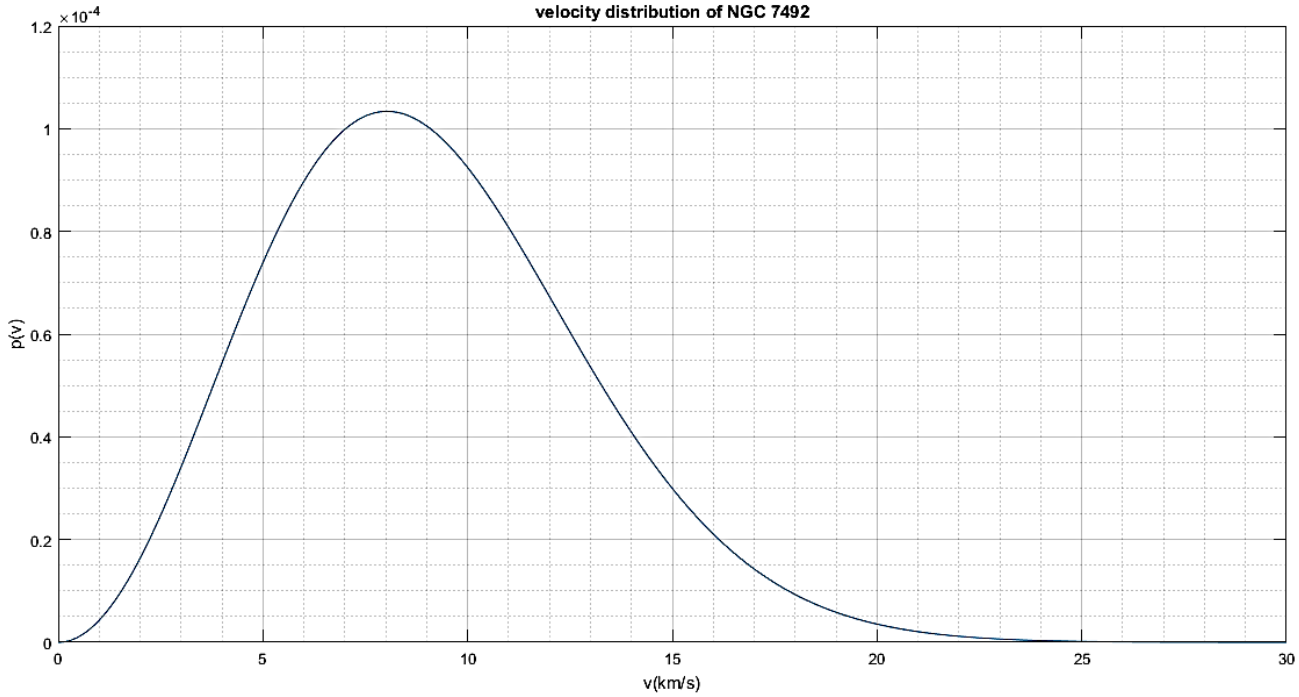
نام خوشه	**شعاع خوشه در زمان شکل‌گیری بر حسب**	**قدر مطلق خوشه در زمان نامعلوم ( )**
NGC 6256	5.7	−8.00
NGC 2149	5.1	−8.35
NGC 7492	5.4	−8.16



شکل ۱ - توزیع سرعت خوشه‌ی NGC 6256 در زمان نامعلوم (۲)



شکل ۲ - توزیع سرعت خوشه‌ی NGC 2419 در زمان نامعلوم (۲)



شکل ۳ - توزیع سرعت خوشه‌ی NGC 7492 در زمان نامعلوم (۲)

سؤال ۲: عکس‌برداری (۱۲۰ نمره)

جهانگردی با یک صفحه‌ی عکاسی از پشت تلسکوپی از ستاره نسر واقع[۱] تصویربرداری کرده است. فاصله کانونی تلسکوپ $۱/۵\ \mathrm{m} =$ و مدت زمان نوردهی $۱۰\ \mathrm{s} =$ است.

صفحه‌ی عکاسی مورد استفاده از تعدادی پیکسل تشکیل شده است که هر پیکسل آن دارای سه بخش برای تصویربرداری از باندهای R، G و B، (یعنی به ترتیب در باند قرمز، سبز و آبی) می‌باشد. تصویر تهیّه شده در هر یک از این سه باند در انتهای سؤال آمده است. توجه داشته باشید که مثلاً برای تولید عکس قرمز، Count خوانده‌شده در بخش قرمز پیکسل را به عنوان Count مربوط به آن پیکسل در تصویر قرمز در نظر می‌گیرند. (منظور از Count همان عددی است که در هر پیکسل از صفحه‌ی عکاسی ثبت می‌شود و واحد خاصی ندارد.)

هر پیکسل مربعی به ضلع $۳/۶\ \mu\mathrm{m}$ است. فرض کنید مرکز تصویر بر مرکز ستاره منطبق است.

به‌دلیل اعوجاجات جوی، تصویر اجرام نقطه‌ای به‌جای نقطه به صورت دایره دیده می‌شود که به قطر زاویه‌ای این دایره، پارامتر دید گفته می‌شود. در این تصویر، به‌دلیل کم بودن تعداد پیکسل‌هایی که ستاره اشغال می‌کند، می‌توان شکل ستاره را در صفحه‌ی تصویر، مربعی در نظر گرفت.

الف) با توجه به این که پارامتر دید در لحظه‌ی عکس‌برداری $۳''$ بوده است، شعاع ستاره روی تصویر را بر حسب پیکسل به دست آورید.

متأسفانه جهانگرد در حین ویرایش این عکس از کشور خارج شده و گم شده است! ما اطلاع نداریم که عکسِ پیدا شده بر روی کامپیوتر محل کار وی همان نسخه‌ی خام است یا آثار زمینه‌ی آسمان از آن حذف شده است. می‌دانیم که Count ستاره توزیع پواسونی دارد ولی Count زمینه‌ی آسمان، از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند. می‌خواهیم با استفاده از خواص تابع توزیع پواسونی، تعیین کنیم که آثار زمینه‌ی آسمان از این تصویر حذف‌شده‌است یا خیر.

ب) نمودار توزیع فراوانیِ[۲] Count پیکسل‌ها را برای هر یک از سه تصویر رسم کرده و میانگین و انحراف‌معیار Count هر تصویر را به دست آورید. برای رسم هر نمودار، کمترین داده را آغاز بازه‌ی اول و طول هر بازه را برابر با ۱۵ در نظر بگیرید. **با تقسیم کردن یک کاغذ نمودار به ۳ قسمت مساوی، همه‌ی نمودارها را در آن رسم کنید.**

---

[۱] Vega

[۲] Histogram

ج) با توجه به این که در توزیع پواسونی $= \sqrt{\ }$ ، برای هر یک از سه تصویر بررسی کنید که توزیع Count پیکسل‌ها تا شعاع ستاره پواسونی است یا خیر. آیا آثار زمینه‌ی آسمان از این تصویر حذف شده است؟

قدر ستاره برحسب Count مجموع خالص ستاره، برای هریک از باندها در این تصویر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$= -۲/۵\log\frac{\text{Count}}{\quad} +$$

ثابتی است که مقدار آن برای فیلترهای R، G و B به ترتیب برابر با ۸/۰۴، ۸/۳۱ و ۸/۸۵ می‌باشد.

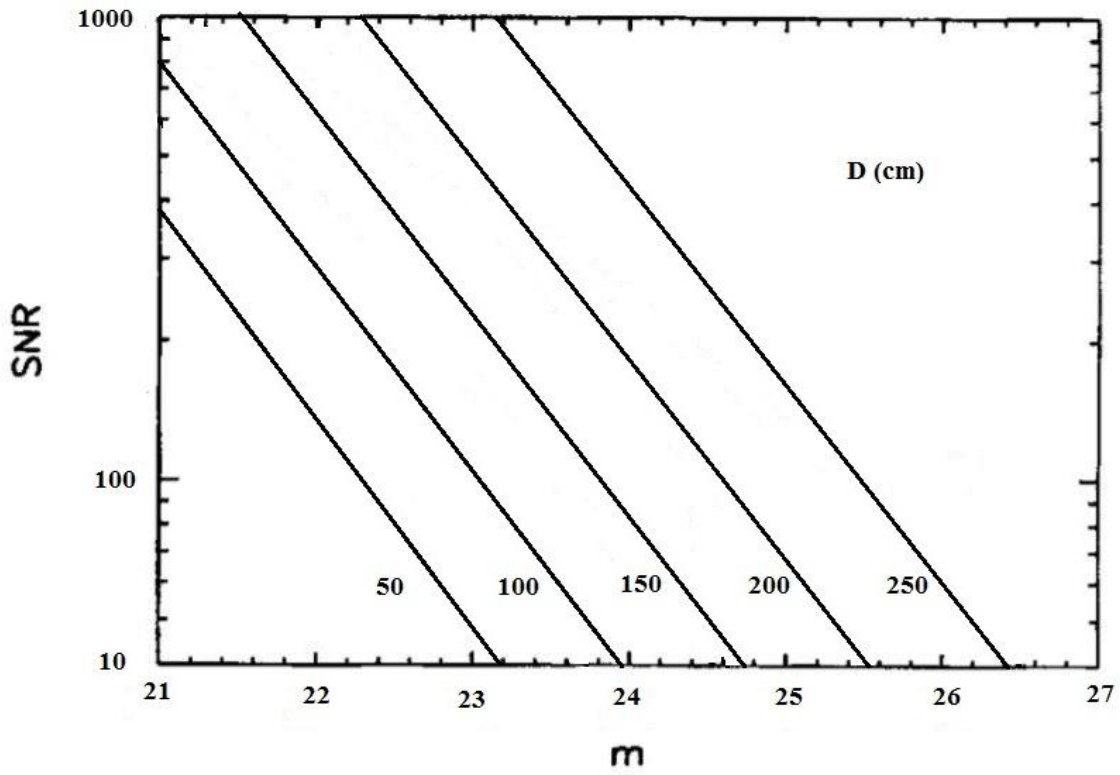
منظور از Count مجموع خالص ستاره، مجموع عددهایی است که به‌خاطر برخورد فوتون‌های ستاره **درون شعاع ستاره** در صفحه‌ی عکاسی ثبت می‌شود و آثار زمینه‌ی آسمان از آن **حذف شده است**. درصورتی که در قسمت قبل متوجه شده‌اید آثار زمینه از تصویر حذف نشده، با توجه به این که قدر سطحی آسمان $۲۳\frac{\text{mag}}{\text{″}^۲}$ (قدر بر ثانیه‌ی قوسی مربع) می‌باشد این تصحیح را انجام دهید. بدیهی است در صورتی که تصحیح انجام شده باشد نیازی به دوباره انجام دادن این کار نیست.

د) با توجه به شعاع به دست آمده در قسمت الف، قدر ستاره را در باندهای مختلف محاسبه کنید.

ه) در جدول ۳ داده‌های تلسکوپ هابل برای قدر ستاره در این باندها آمده است. میزان جذب در هر یک از باندها را بر حسب قدر محاسبه کنید.

و) با ترکیب تصاویر این سه باند، تصویر ستاره را در ناحیه‌ی **مرئی** در جدول IV پاسخ‌نامه وارد کنید. پهنای باند همه‌ی فیلترها یکسان است و ترکیب آن‌ها ناحیه‌ی مرئی را کاملا می‌پوشاند.

ز) با توجه به Count خالص ستاره در تصویر مرئی، نسبت سیگنال به نویز را به دست آورید و با استفاده از نمودار زیر بگویید قطر تلسکوپی که جهانگرد با آن این تصویر را تهیه کرده حداقل چه قدر است؟



شکل ۴ - نمودار سیگنال به نویز بر حسب قدر زمینه آسمان برای تلسکوپ ها با قطرهای مختلف

جدول ۳ - قدر ظاهری ستاره با توجه به داده‌های تلسکوپ هابل

فیلتر	قدر
R	0.07
G	0.04
B	0.03

جدول ۴ - تصویر ستاره در باند قرمز (R)

252	269	283	279	269	249
267	287	289	288	283	264
282	290	314	307	287	270
283	301	323	310	290	280
276	285	300	291	285	274
256	274	283	280	270	261

جدول ۵ - تصویر ستاره در باند سبز (G)

320	335	347	342	333	318
330	362	368	365	351	322
345	369	375	371	361	338
349	370	399	375	368	345
342	360	370	370	355	339
320	340	348	344	336	321

جدول ۶ - تصویر ستاره در باند آبی (B)

463	485	500	491	482	447
480	511	512	511	505	479
495	515	540	528	509	487
504	525	548	538	514	493
487	507	517	516	506	487
464	487	501	492	485	468

سؤال ۳: بررسی کهکشان سینامون (۳۶۵ نمره)

یکی از عوامل بسیار مؤثر در تحول هر کهکشان، تابع پتانسیل مربوط به آن است. پدیده‌هایی چون توزیع سرعت ذرات، برخورد ستاره‌های کهکشان با یک‌دیگر، ساختار بازوهای کهکشان و اصطکاک دینامیکی ذرات در داخل کهکشان همگی تحت تأثیر تابع پتانسیل هستند. به دلیل محدودیت‌های رصدی، تعیین تابع پتانسیل عموما مسئله‌ای بسیار پیچیده بوده که تنها با تعیین تابعیت چگالی کهکشان و حل معادله‌ی پواسون برای سیستم امکان‌پذیر است. بر خلاف روند معمول، در این سؤال قصد داریم با بررسی منحنی سرعت یک کهکشان تازه کشف شده به اسم سینامون، تابعیت پتانسیل را برای این کهکشان به دست آوریم. منجمین با بررسی شکل ظاهری این کهکشان، به این نتیجه رسیده‌اند که صفحه‌ی آن نسبت به صفحه‌ی آسمان انحراف دارد؛ اما مقدار زاویه‌ی انحراف نامعلوم است. با مطالعه‌ی کهکشان‌هایی که از لحاظ ساختاری مشابه سینامون هستند دانشمندان توانسته‌اند شکل این کهکشان، بدون زاویه‌ی انحراف، را شبیه‌سازی کنند. شکل ۵، قسمتی از شبیه‌سازی بازوی کهکشان را نشان می‌دهد. همچنین شکل ۶، نمای مشاهده شده (ظاهری) از همان بازو در آسمان است. در هر دو شکل، محور حاصل برخورد صفحه‌ی کهکشان و صفحه‌ی آسمان است. یک دستگاه مختصات قطبی به مبدأ $(0,0)$ روی هر کدام از شکل‌ها در نظر بگیرید. اگر زاویه از محور به صورت پادساعتگرد سنجیده شود، زاویه‌ی قطبی هر نقطه از بازو در صفحه‌ی کهکشان را با و زاویه‌ی قطبی تصویر همان نقطه در صفحه‌ی آسمان را با نمایش می‌دهیم.

الف) با استفاده از شکل ۵، مقدار را برای نقاط مشخص شده تعیین کنید و در جدول V پاسخ‌نامه وارد کنید.

ب) با استفاده از شکل ۶، مقدار را برای نقاط مشخص شده تعیین کنید و در جدول V پاسخ‌نامه وارد کنید.

ج) نشان دهید رابطه‌ی بین ، و زاویه‌ی انحراف کهکشان ( ) به صورت زیر است.

$$\tan \quad = \cos \quad \tan$$

د) با برازش خط مناسب، مقدار را به همراه خطا گزارش کنید. از خطای اندازه‌گیری خط‌کش و نقاله صرف نظر کنید.

در جدول ۷، اطلاعات تعدادی از ستاره‌های بازوی کهکشان که در مدارهای تقریباً دایره‌ای به دور مرکز کهکشان می‌گردند به شما داده‌شده است. توجه کنید که $(')$ داده شده در این جدول، فاصله‌ی **مشاهده شده** از مرکز کهکشان بر حسب **دقیقه‌ی قوسی** است. با توجه به این داده‌ها و قسمت‌های قبل، به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

هـ) سرعت شعاعی هر ستاره ( ) را به همراه خطا برحسب متر بر ثانیه محاسبه کنید و در جدول VI پاسخ‌نامه وارد کنید.

مشاهدات نشان می‌دهند که در مرکز کهکشان سینامون، سیاه‌چاله‌ای وجود ندارد.

و) همان طور که می‌دانید عوامل زیادی در سرعت شعاعی مشاهده شده از کهکشان‌ها دخیل هستند. اگر تنها عامل موثر بر سرعت شعاعی ستارگان کهکشان، حرکت مداری آن‌ها باشد، استدلال کنید با نزدیک شدن به مرکز کهکشان، قرمزگرایی ستارگان باید به صفر میل کند.

ز) با توجه به نتیجه‌ی قسمت قبل و داده‌های جدول ۷، فاصله‌ی کهکشان را بر حسب pc بیابید. ثابت هابل $_{۰} = ۶۸/۰\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ است.

ح) فاصله‌ی شعاعی واقعی (بدون زاویه‌ی انحراف) هر ستاره از مرکز کهکشان را به همراه خطا محاسبه کنید و در جدول VI پاسخ‌نامه وارد کنید. اعدادتان را برحسب pc بیان کنید.

راهنمایی: به انحراف داشتن صفحه‌ی کهکشان از صفحه‌ی آسمان توجه نمایید.

ط) با استفاده از سرعت‌های شعاعی محاسبه شده در قسمت «هـ»، سرعت مداری ( ) هر ستاره را به همراه خطای آن بر حسب متر بر ثانیه به دست آورید و در جدول VI پاسخ‌نامه وارد کنید. در این قسمت از خطای زاویه‌ی انحراف کهکشان صرف نظر کنید. حرکت ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان را در جهت افزایش در نظر بگیرید.

ی) اندازه‌ی میدان گرانشی کهکشان، ( ) ، در نقاط داده شده را به همراه خطا برحسب واحدهای SI محاسبه کنید و در جدول VII پاسخ‌نامه وارد کنید.

ک) نمودار میدان گرانشی، ( ) ، بر حسب فاصله‌ی شعاعی واقعی از مرکز کهکشان را رسم کنید. میله‌های خطا نیز باید رسم شوند. فاصله برحسب پارسک و اندازه‌ی میدان گرانشی برحسب واحدهای SI باشد.

ل) پتانسیل گرانشی کهکشان[۱]، ( ) ، را برای هر نقطه برحسب واحدهای SI تعیین کنید و در جدول VII پاسخ‌نامه وارد کنید. مبدأ پتانسیل را مرکز سینامون در نظر بگیرید. نیازی به گزارش خطای پتانسیل نیست.

<u>توجه: برای محاسبه انتگرال عددی از روش ذوزنقه استفاده کنید. به روش‌های دیگر نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.</u>

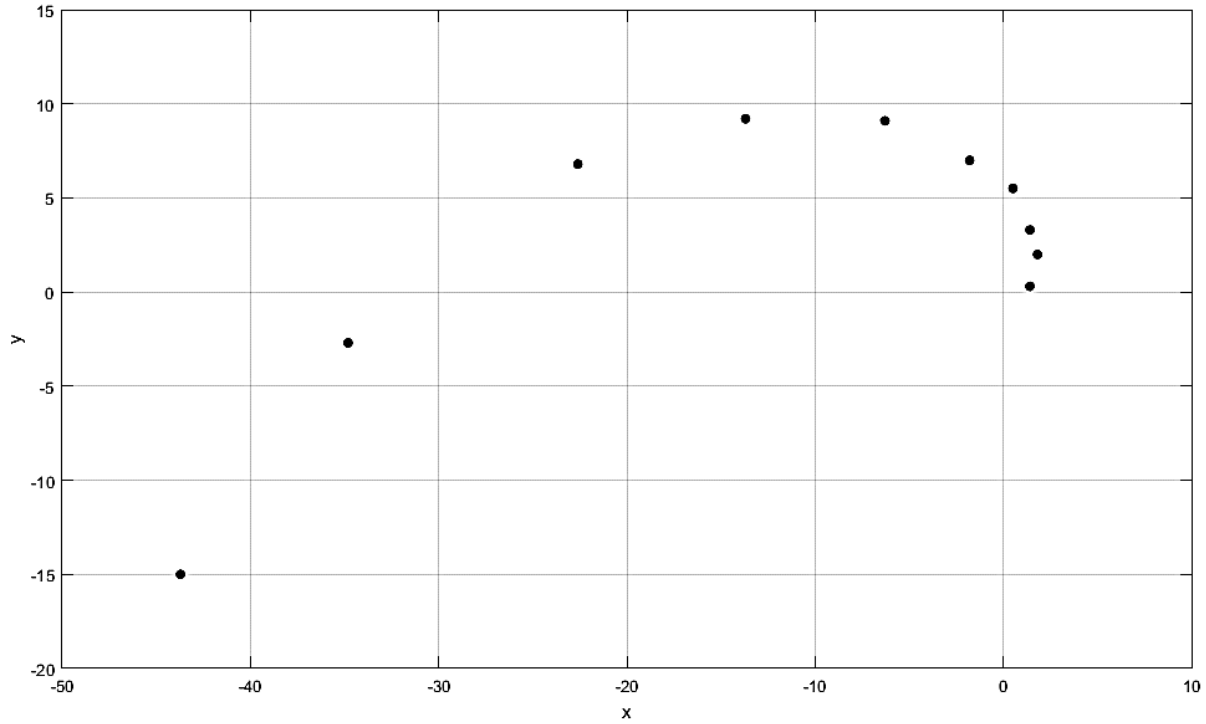
م) با بررسی پارامترهای مختلف سینامون و کهکشان‌های مشابه آن، دانشمندان متوجه شده‌اند که این دسته از کهکشان‌ها، از تابع پتانسیلی به فرم زیر پیروی می‌کنند

$$( ) = \ln\left(1 + \frac{^{۲}}{^{۲}_{۰}}\right)$$

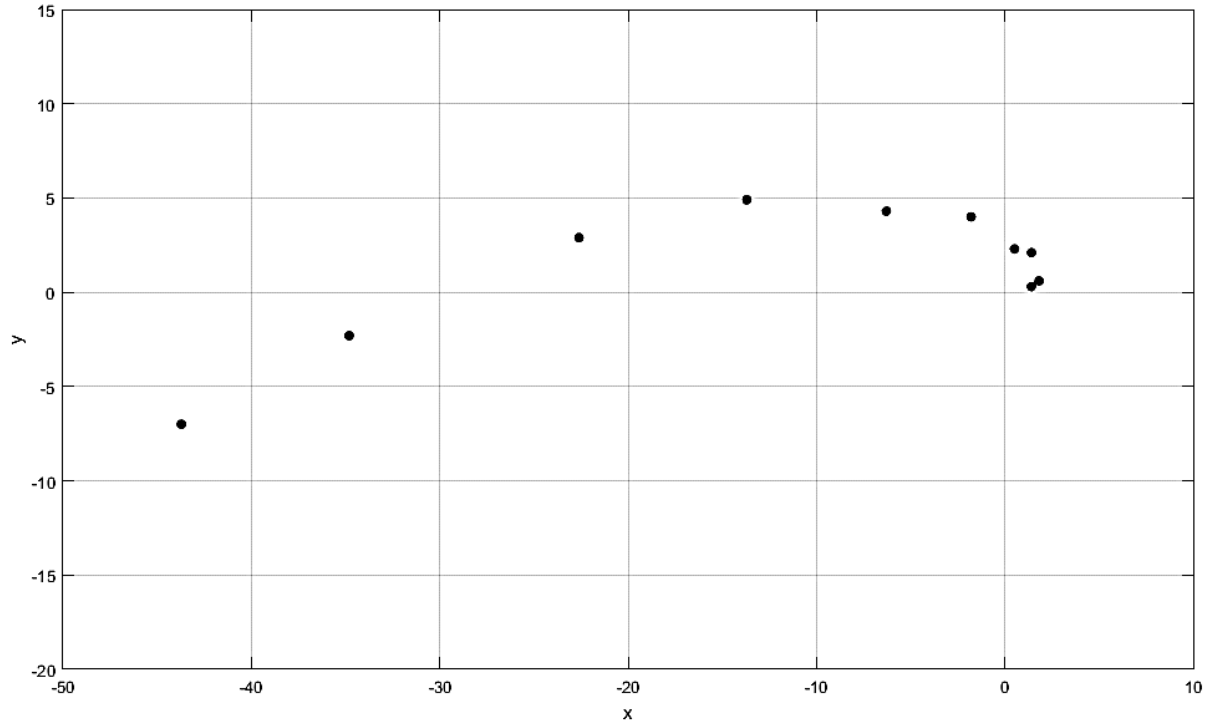
نکته‌ی مهم این است که برای همه‌ی کهکشان‌های این دسته مقدار ثابتی است و تنها با محاسبه‌ی $_{۰}$ به وسیله‌ی بررسی هندسه‌ی بازوهای کهکشان می‌توان دینامیک این گونه از کهکشان‌ها را تحلیل کرد.

برای کهکشان سینامون، مقدار $_{۰} = ۸/۱\,\mathrm{kpc}$ است. با برازش منحنی مناسب را به همراه خطا به دست آورید. هنگام برازش از خطای پتانسیل و شعاع مداری صرف نظر کنید.

[۱] طبق تعریف، پتانسیل گرانشی برابر با انرژی پتانسیل گرانشی واحد جرم است.



شکل ۵ - تصویر شبیه‌سازی شده‌ی بازوی کهکشان سینامون بدون زاویه‌ی انحراف



شکل ۶ - تصویر واقعی بازوی کهکشان سینامون در صفحه‌ی آسمان

جدول ۷ - اطلاعات ستاره‌های رصد شده از کهکشان سینامون

#	(′)	(°)	قرمزگرایی:	خطای قرمزگرایی:
1	0.9	2	3.95E-04	1.2E-05
2	1.8	4	3.48E-04	1.0E-05
3	3.4	7	2.65E-04	8.0E-06
4	3.9	22	2.60E-04	7.8E-06
5	3.3	76	4.07E-04	1.8E-06
6	6.8	134	6.24E-04	5.2E-06
7	16.5	161	9.15E-04	2.7E-05
8	28.6	177	1.14E-03	3.4E-05
9	32.8	187	1.13E-03	3.4E-05
10	35.5	196	1.03E-03	3.1E-05
11	33.2	208	8.69E-04	2.6E-05
12	24.9	254	5.24E-04	4.7E-06
13	46.1	326	7.81E-05	3.3E-05
14	79.4	346	-1.96E-04	6.9E-05
15	96.5	355	-3.12E-04	5.4E-05

روابط مورد نیاز

$$= \quad - \ ^{-}$$

$$^{۲} = \frac{۱}{-} \Sigma \ ^{۲} \qquad\qquad ^{۲} = \frac{}{-۱} \ ^{۲}$$

میانگین‌گیری وزن‌دار از داده‌های دارای خطا

$$^{-} = \frac{\Sigma_{=۱} (\frac{۱}{\Delta})^{۲}}{\Sigma_{=۱} (\frac{۱}{\Delta})^{۲}} \qquad\qquad \Delta \ = \frac{۱}{\sqrt{\Sigma_{=۱} (\frac{۱}{\Delta})^{۲}}}$$

روابط برازش خطّ راست

$$= \quad +$$

$$= \quad -(\quad + \quad)$$

$$= \frac{\Sigma_{=۱} \ (\quad - \ ^{-})}{\Sigma_{=۱} (\quad - \ ^{-})^{۲}} \qquad\qquad = ^{-} \ - \quad ^{-}$$

$$(\Delta \ )^{۲} = \frac{۱}{\Sigma_{=۱} (\quad - \ ^{-})^{۲}} \frac{\Sigma_{=۱} \ ^{۲}}{- ۲} = \frac{^{۲}}{- ۲} (\frac{۱}{۲} - ۱)$$

$$(\Delta \ )^{۲} = (\frac{۱}{-} + \frac{^{-۲}}{\Sigma_{=۱} (\quad - \ ^{-})^{۲}}) \frac{\Sigma_{=۱} \ ^{۲}}{- ۲} \quad = ^{-} \ ^{۲} (\Delta \ )^{۲}$$

$$=$$

$$= \quad -$$

$$= \frac{\Sigma_{=۱}}{\Sigma_{=۱} \ ^{۲}}$$

$$(\Delta \ )^{۲} = \frac{۱}{\Sigma_{=۱} \ ^{۲}} \frac{\Sigma_{=۱} \ ^{۲}}{- ۱}$$

جدول سؤال ۱: مقادیر تابع خطا، ( ) ، برای های مختلف

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

x	Hundredths digit of x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	0.01128	0.02256	0.03384	0.04511	0.05637	0.06762	0.07886	0.09008	0.10128
0.1	0.11246	0.12362	0.13476	0.14587	0.15695	0.16800	0.17901	0.18999	0.20094	0.21184
0.2	0.22270	0.23352	0.24430	0.25502	0.26570	0.27633	0.28690	0.29742	0.30788	0.31828
0.3	0.32863	0.33891	0.34913	0.35928	0.36936	0.37938	0.38933	0.39921	0.40901	0.41874
0.4	0.42839	0.43797	0.44747	0.45689	0.46623	0.47548	0.48466	0.49375	0.50275	0.51167
0.5	0.52050	0.52924	0.53790	0.54646	0.55494	0.56332	0.57162	0.57982	0.58792	0.59594
0.6	0.60386	0.61168	0.61941	0.62705	0.63459	0.64203	0.64938	0.65663	0.66378	0.67084
0.7	0.67780	0.68467	0.69143	0.69810	0.70468	0.71116	0.71754	0.72382	0.73001	0.73610
0.8	0.74210	0.74800	0.75381	0.75952	0.76514	0.77067	0.77610	0.78144	0.78669	0.79184
0.9	0.79691	0.80188	0.80677	0.81156	0.81627	0.82089	0.82542	0.82987	0.83423	0.83851
1.0	0.84270	0.84681	0.85084	0.85478	0.85865	0.86244	0.86614	0.86977	0.87333	0.87680
1.1	0.88021	0.88353	0.88679	0.88997	0.89308	0.89612	0.89910	0.90200	0.90484	0.90761
1.2	0.91031	0.91296	0.91553	0.91805	0.92051	0.92290	0.92524	0.92751	0.92973	0.93190
1.3	0.93401	0.93606	0.93807	0.94002	0.94191	0.94376	0.94556	0.94731	0.94902	0.95067
1.4	0.95229	0.95385	0.95538	0.95686	0.95830	0.95970	0.96105	0.96237	0.96365	0.96490
1.5	0.96611	0.96728	0.96841	0.96952	0.97059	0.97162	0.97263	0.97360	0.97455	0.97546
1.6	0.97635	0.97721	0.97804	0.97884	0.97962	0.98038	0.98110	0.98181	0.98249	0.98315
1.7	0.98379	0.98441	0.98500	0.98558	0.98613	0.98667	0.98719	0.98769	0.98817	0.98864
1.8	0.98909	0.98952	0.98994	0.99035	0.99074	0.99111	0.99147	0.99182	0.99216	0.99248
1.9	0.99279	0.99309	0.99338	0.99366	0.99392	0.99418	0.99443	0.99466	0.99489	0.99511
2.0	0.99532	0.99552	0.99572	0.99591	0.99609	0.99626	0.99642	0.99658	0.99673	0.99688
2.1	0.99702	0.99715	0.99728	0.99741	0.99753	0.99764	0.99775	0.99785	0.99795	0.99805
2.2	0.99814	0.99822	0.99831	0.99839	0.99846	0.99854	0.99861	0.99867	0.99874	0.99880
2.3	0.99886	0.99891	0.99897	0.99902	0.99906	0.99911	0.99915	0.99920	0.99924	0.99928
2.4	0.99931	0.99935	0.99938	0.99941	0.99944	0.99947	0.99950	0.99952	0.99955	0.99957
2.5	0.99959	0.99961	0.99963	0.99965	0.99967	0.99969	0.99971	0.99972	0.99974	0.99975
2.6	0.99976	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99982	0.99983	0.99984	0.99985	0.99986
2.7	0.99987	0.99987	0.99988	0.99989	0.99989	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992
2.8	0.99992	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995	0.99996
2.9	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998
3.0	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999
3.1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.2	0.99999	0.99999	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

به کمک این جدول می‌توان برای های با دقت صدم، مقدار ( )erf را محاسبه کرد. در ستون سمت چپ، مقادیر یکان و دهم نوشته شده‌اند. ردیف بالا، مقدار صدم را مشخص می‌کند.

به عنوان مثال، مقدار ۰٫۹۴۹۰۲ = (۱٫۳۸ =)erf از تقاطع ردیف چهاردهم (۱+۱۳) با ستون نهم (۱+۸) به دست می‌آید.

شکل سؤال ۱: خوشه‌ی کروی NGC 362