بسم الله الرحمن الرحیم

نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

علی شکیبا
دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان
ali.shakiba@vru.ac.ir

فصل ۲: اتوماتای متناهی

تفاوت زبان‌های NFA و DFA

- آیا NFA ها از DFA ها قوی‌تر هستند؟
  - به عبارت دیگر؛ آیا زبانی وجود دارد که بتوان برای آن یک NFA ترسیم کرد؛ اما هیچ DFA ای برای آن وجود نداشته باشد؟

- آیا DFA ها از NFA ها قوی تر هستند؟
  - DFA ها را می‌توان حالت خاصی از NFA ها دانست؛
  - بنابراین؛ هر DFA خود یک NFA است.

تفاوت زبان‌های NFA و DFA (ادامه)

- آیا زبانی وجود دارد که بتوان برای آن یک NFA ترسیم کرد؛ اما هیچ DFA ای برای آن وجود نداشته باشد؟
  - خیر! DFA و NFA از لحاظ قدرت پذیرش زبان‌ها یکسان هستند.

- به ازای هر زبانی که یک NFA آن را پذیرش کند؛ DFA ای وجود دارد که آن زبان را پذیرش می‌کند.
  - بنابراین؛ زبان‌های پذیرش‌شده توسط NFA ها نیز در زمره‌ی زبان‌های منظم قرار می‌گیرند.

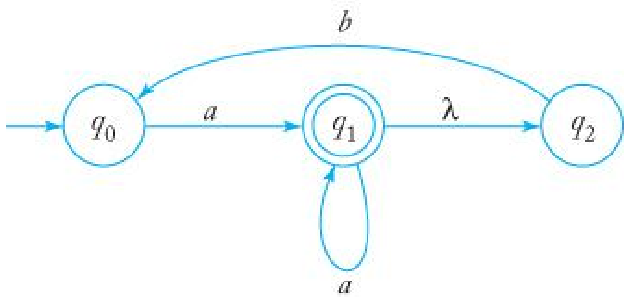
- در ادامه؛ الگوریتمی جهت تبدیل یک NFA به DFA معادل ارائه می‌کنیم.

چه وقت دو اتومات هم‌ارز هستند؟

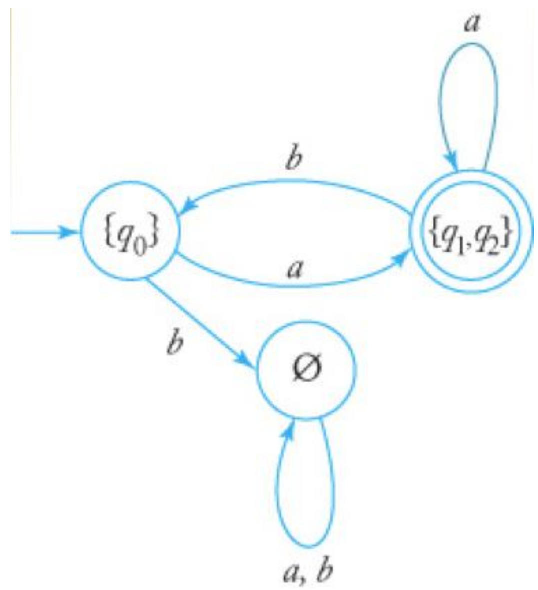
- دو اتومات M_1 و M_2 را هم‌ارز نامند هرگاه داشته باشیم:
$$L(M_1) = L(M_2).$$

- به عبارت دیگر؛ هر دو زبان یکسانی را بپذیرند.

مثال از تبدیل یک NFA به DFA معادل



NFA	DFA
$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$	$\delta(\{q_0\}, a) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_0, b) = \varnothing$	$\delta(\{q_0\}, b) = \varnothing$
$\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$	$\delta(\{q_1, q_2\}, a) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_2, b) = \{q_0\}$	$\delta(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_0\}$



چرا NFA را به DFA تبدیل می‌کنیم؟

- طراحی NFA به مراتب از DFA ساده‌تر است.

- اما، اجرای یک NFA از DFA کارآتر نیست.

  - یک NFA ممکن است لازم باشد بیش از یک مسیر را برای بررسی پذیرش یا عدم‌پذیرش یک رشته؛ طی کند؛ اما ...
  - در DFA به ازای هر رشته دقیقا یک مسیر نیاز به بررسی دارد.

الگوریتم تبدیل یک NFA به DFA معادل

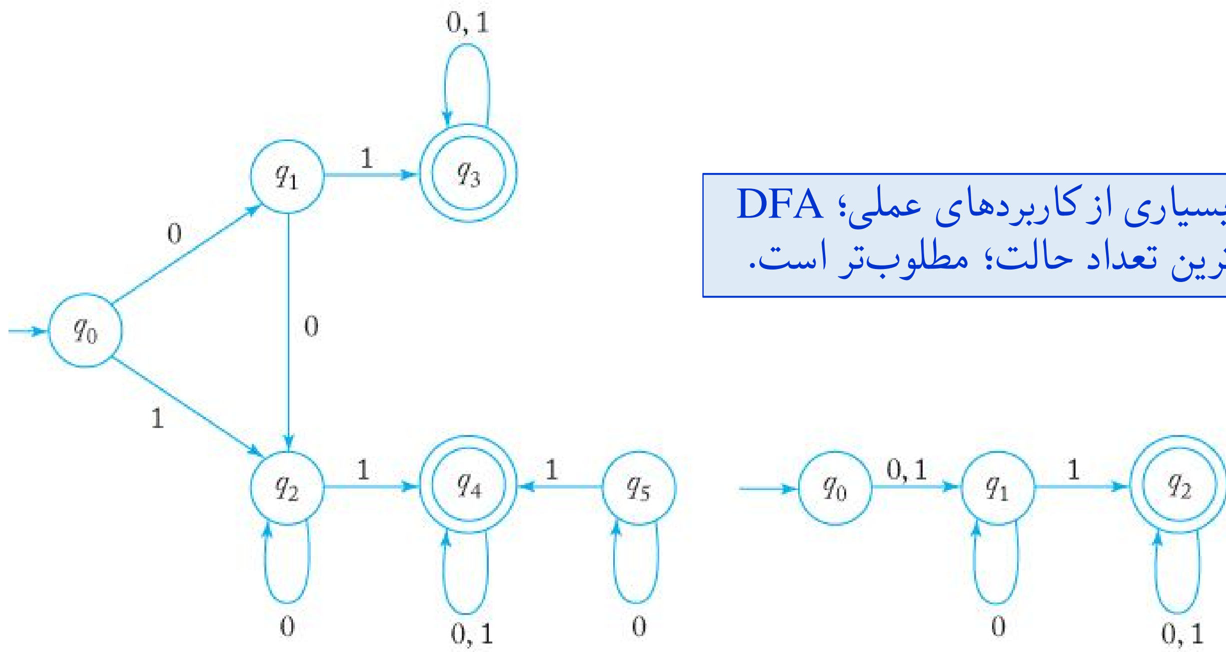
1. گراف انتقال G_D را با راس آغازین $\{q_0\}$ در نظر بگیرید.
2. مادامی که همه‌ی یال‌ها در نظر گرفته نشده‌اند؛ مراحل زیر را تکرار کنید:
   a) هر یک از رئوس $\{q_i, q_j, \ldots, q_\ell\}$ را که برای نماد $a \in \Sigma$ یالی از آن خارج نشده است را در نظر بگیرید.
   b) مقدار $A = \delta^*(q_i, a) \cup \delta^*(q_j, a) \cup \cdots \cup \delta^*(q_\ell, a)$ را محاسبه کنید. در صورتی که G_D فاقد راسی با برچسب A بود؛ آن را اضافه کنید.
   c) یالی با برچسب a از راس $\{q_i, q_j, \ldots, q_\ell\}$ به راس با برچسب A اضافه کنید.
3. اگر برچسب راس شامل حالتی نهایی مانند $q \in F$ بود؛ آن راس نیز یک راس نهایی است.
4. اگر NFA رشته‌ی λ را بپذیرد؛ آنگاه حالت $\{q_0\}$ نیز یک حالت نهایی است.

DFAهای هم‌ارز

- هر DFA یک زبان یکتا را تعیین می‌کند.
- برای هر زبان؛ می‌توان بیش از یک DFA طراحی کرد.
- دو DFA با تعداد حالت‌های مختلف می‌توانند دارای زبان یکسانی باشند.
  - به عبارت دیگر؛ این دو DFA هم‌ارز هستند.

DFAهای هم‌ارز (ادامه)

• این دو DFA هم‌ارز هستند:



(a)

(b)

برای بسیاری از کاربردهای عملی؛ DFA با کمترین تعداد حالت؛ مطلوب‌تر است.

قضیه ۲-۲: اگر $L \subseteq \Sigma^*$ زبان پذیرش‌شده توسط NFA مانند

$$M_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N),$$

باشد؛ آنگاه DFA مانند

$$M_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D),$$

وجود دارد که

$$L(M_D) = L.$$

حالت‌های ادغام‌پذیر در برابر ادغام‌ناپذیر

- حالت‌های $p,q \in Q$
- ادغام‌پذیرند؛ اگر برای هر رشته‌ی $w \in \Sigma^*$ داشته باشیم:

$$\delta^*(q,w) \in F \Rightarrow \delta^*(p,w) \in F$$
$$\delta^*(q,w) \notin F \Rightarrow \delta^*(p,w) \notin F$$

الزامی نیست حالت‌های نهایی؛ یکسان باشند.

  - اگر مسیری با برچسب w از p به یک حالت نهایی وجود داشته باشد؛ آنگاه از q نیز مسیری با برچسب w به یک حالت نهایی وجود داشته باشد.
  - اگر هیچ مسیری با برچسب w از p به حالتی نهایی وجود نداشته باشد؛ آنگاه هیچ مسیری از q با برچسب w به حالتی نهایی وجود نداشته باشد.
- در غیر اینصورت؛ بر اساس رشته‌ی w ادغام‌ناپذیرند.

کاهش تعداد حالت‌های یک DFA

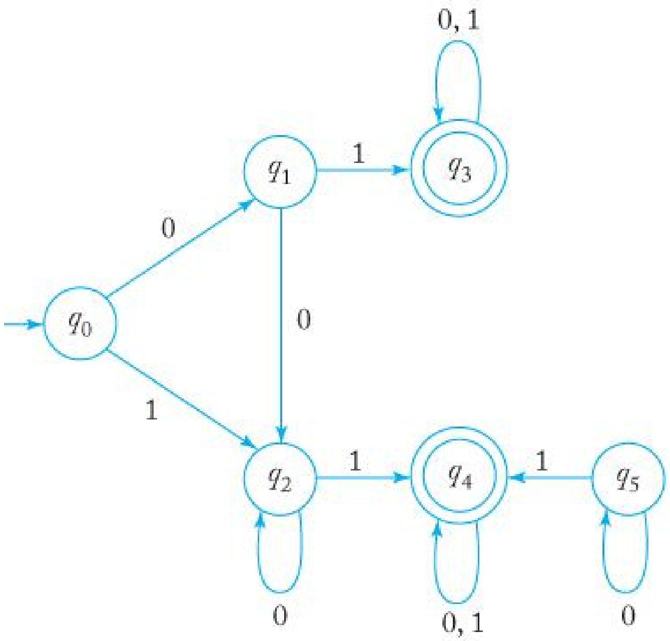
- چگونه می‌توان یک DFA را با کاهش تعداد حالت‌ها؛ ساده‌تر نمود؟
  - لازم است DFA ساده‌شده با DFA اصلی؛ هم‌ارز باشد.

- ایده:
  - ادغام حالت‌های ادغام‌پذیر

- راهکار:

1. حذف تمام حالت‌هایی که با شروع از حالت q_0 مسیری به آن‌ها وجود ندارد.
2. حالت‌ها را به رده‌های هم‌ارزی بر اساس ادغام‌پذیری افراز کرده و به جای هر رده؛ یک حالت را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱



(a)

- حذف حالت خارج از دسترس q_5
- حالت‌های نهایی q_3 و q_4 در یک رده‌ی هم‌ارزی هستند:

$$q_0\, q_1\, q_2 \mid q_3\, q_4$$

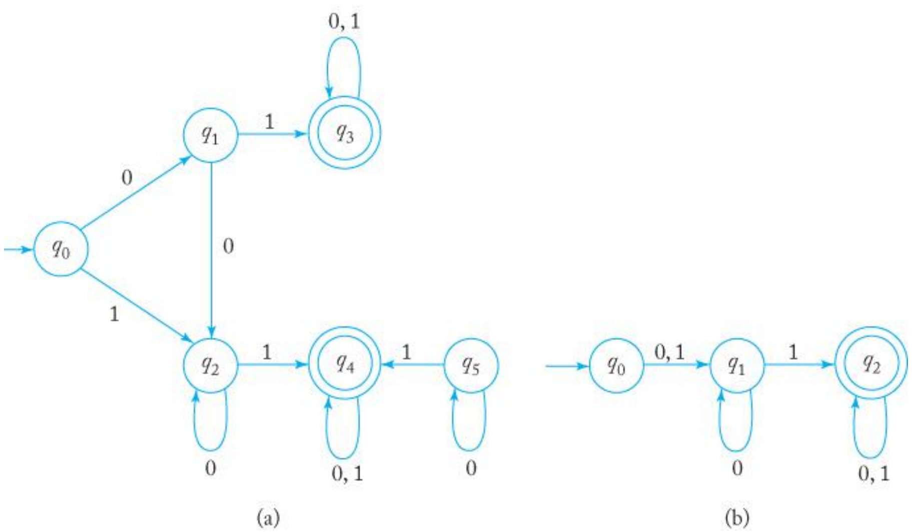
- از هر یک از حالت‌های q_1 یا q_2، ورودی 1 یا ورودی 01 منجر به یک حالت نهایی می‌شوند؛ بنابراین در یک رده‌ی هم‌ارزی قرار می‌گیرند.
- مجموعه‌ی حالت‌ها را دیگر نمی‌توان بیشتر از این افراز نمود:

$$q_0 \mid q_1\, q_2 \mid q_3\, q_4$$

مثال ۱

- حذف حالت خارج از دسترس q_5
- حالت‌های نهایی q_3 و q_4 در یک رده‌ی هم‌ارزی هستند:

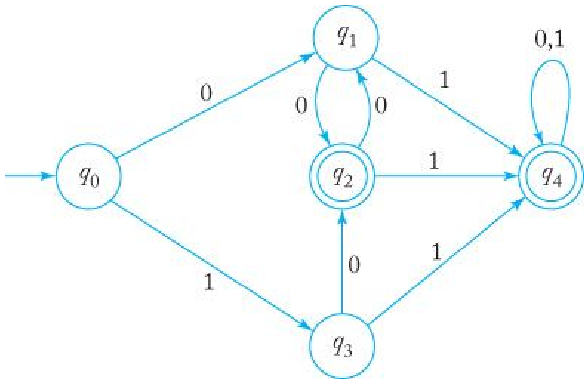
$q_0\, q_1\, q_2 \mid q_3\, q_4$



- از هر یک از حالت‌های q_1 یا q_2، ورودی 1 یا ورودی 01 منجر به یک حالت نهایی می‌شوند؛ بنابراین در یک رده‌ی هم‌ارزی قرار می‌گیرند.
- مجموعه‌ی حالت‌ها را دیگر نمی‌توان بیشتر از این افراز نمود:

$q_0 \mid q_1\, q_2 \mid q_3\, q_4$

مثال ۲



- حالت‌های q_2 و q_4 نهایی هستند:
- از حالت q_1 و q_3 هر دو رشته‌ی 0 و 1 به حالت‌های نهایی می‌رسند:
- $\delta(q_4, 0) = q_4$ در صورتی‌که $\delta(q_2, 0) = q_1$:
- افراز دیگری ممکن نیست.

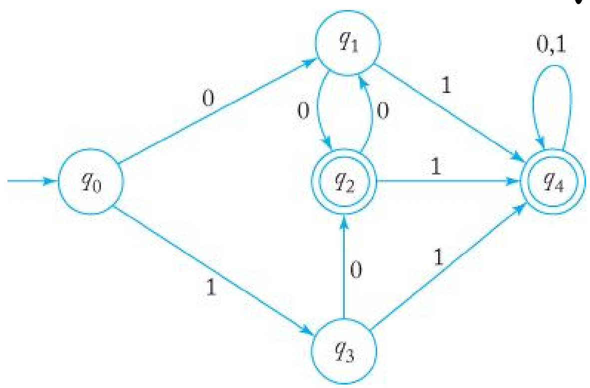
0 1 3 | 2 4

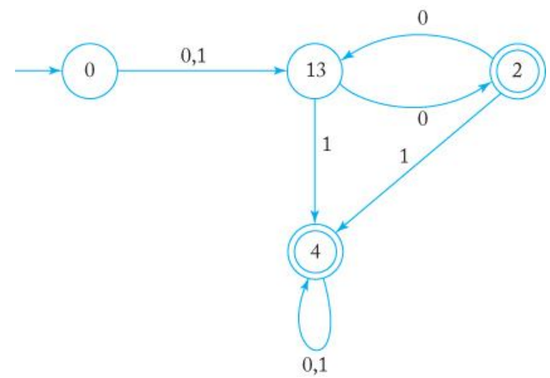
0 | 1 3 | 2 4

0 | 1 3 | 2 | 4

JFLAP demo

مثال ۲





- حالت‌های q_2 و q_4 نهایی هستند:

0 1 3 | 2 4

- از حالت q_1 و q_3 هر دو رشته‌ی 0 و 1 به حالت‌های نهایی می‌رسند:

0 | 1 3 | 2 4

- $\delta(q_4, 0) = q_4$ در صورتی‌که $\delta(q_2, 0) = q_1$:

0 | 1 3 | 2 | 4

- افراز دیگری ممکن نیست.

JFLAP demo

الگوریتم علامت‌گذاری

1. حذف همه‌ی حالت‌های غیرقابل دسترس
2. تمام زوج حالت‌های $(p,q) \in Q \times Q$ را در نظر بگیرید. اگر $p \in F$ اما $q \notin F$ باشد؛ آنگاه زوج (p,q) ادغام‌ناپذیر هستند.
3. مرحله‌ی زیر را تا جایی تکرار کنید که هیچ زوجی بدون تصمیم نباشند:

- به ازای تمام زوج‌های $(p,q) \in Q \times Q$ و تمام نمادهای $a \in \Sigma$؛ مقدار $\delta(p,a) = p_a$ و $\delta(q,a) = q_a$ را محاسبه کنید. اگر (p_a,q_a) ادغام‌ناپذیر باشند؛ آنگاه (p,q) نیز ادغام‌ناپذیرند.

خروجی این الگوریتم: کلاس‌های هم‌ارزی بر مبنای رابطه‌ی ادغام‌پذیری

قضیه ۲-۳: الگوریتم علامت‌گذاری؛ تمام زوج حالت‌های ادغام‌ناپذیر را در هر DFA دلخواه، مشخص می‌کند.

اثبات:

اثبات به استقرا انجام می‌شود.

الگوریتم کاهش

1. با استفاده از الگوریتم علامت‌گذاری؛ هر یک از کلاس‌های هم‌ارزی را معادل با یک حالت برای DFA کمینه در نظر می‌گیریم.
2. به ازای هر انتقال $\delta(q_r,a) = q_p$ در DFA ورودی؛ قرار می‌دهیم:

$$\hat{\delta}([q_r], a) = [q_p],$$

که $[q_i]$ عبارت است از تمام حالت‌های قابل‌ادغام با q_i.

3. حالت متناظر با کلاس هم‌ارزی حالت q_0 را حالت آغازین DFA کمینه قرار می‌دهیم.
4. هر یک از حالات متناظر با کلاس هم‌ارزی هر $q_f \in F$ را به عنوان حالت نهایی DFA کمینه قرار می‌دهیم.

قضیه ۲-۴: به کارگیری الگوریتم کاهش روی DFA ای مانند M منجر به تولید DFA ای مانند M' می‌شود به طوری که $L(M) = L(M')$ و هیچ DFA دیگری با تعداد حالت‌های کمتر از M' برای زبان $L(M)$ وجود ندارد.

اثبات:

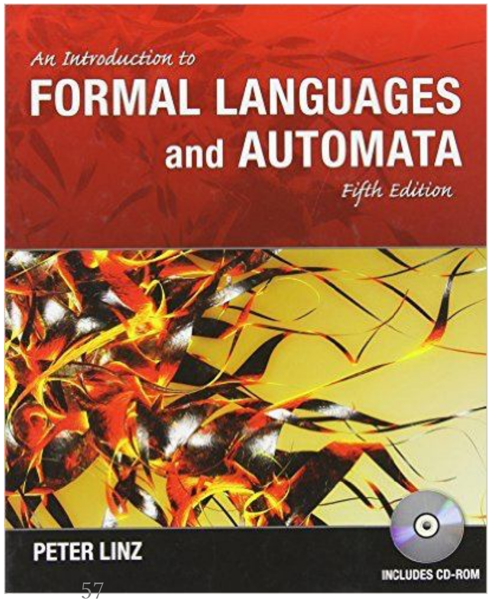
شامل دو قسمت است:

(1) هم‌ارزی DFA تولید شده با DFA اصلی.

(2) کمینه بودن DFA حاصل از الگوریتم کاهش.

در این جلسه آموختیم ...

- فصل ۲



در جلسه‌ی آینده خواهیم آموخت ...

- فصل ۳