۱

معرفی مباحث پیش‌رفتهٔ نظریهٔ اعداد

۱.۱ پیش‌نوشتار

زمانی که خودم تازه وارد دوره طلا شده بودم، تصور کاملی از مسیر المپیاد (از این به بعد) و این که چه باید بخوانم نداشتم. به طور خاص در نظریه اعداد، از این جا به بعد مباحثی مثل چندجمله‌ای ها، معادله‌ی پل، آنالیز و ... هم مطرح می‌شوند. در این مقاله سعی کرده‌ام به معرفی مباحث پیشرفته‌ی نظریه‌اعداد در المپیاد بپردازم. از هر کدام نمونه سوال‌هایی به همراه جواب بیاورم و در مورد آن مبحث توضیح کوتاهی بدهم. هدف از این مقاله این است که شخص در ذهن خود تصویری کلی از مباحث جدید به دست آورد. نکته: این مقاله با توجه به هدفش، سبکی داردکه انسان را ناخودآگاه به سمت یاد گرفتن هرچه بیشتر لم‌ها و روش‌های مختلف سوق می‌دهد. توجه داشته باشید که در این مساله زیاده‌روی نکنید و از تقویت خلاقیت، جرئت علمی و توانایی فکری خود (به عنوان اصلی‌ترین وسایل یک المپیادی و مهم‌ترین اهداف المپیاد) غافل نشوید!

سید محمد حسین سیدصالحی
۱۵/۱۲/۱۳۹۳
seyyedsalehi@live.com

۲.۱ مسائل

۱. اگر p عددی اول و n عددی طبیعی باشد همه‌ی جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

$$p^n - ۱ = (p - ۱)!$$

۲. $a_۱, a_۲, , a_n$ اعدادی طبیعی‌اند و a عددی است که به حاصل ضرب a_i ها بخش‌پذیر است. ثابت کنید $(a + a_۱ - ۱)(a + a_۲ - ۱)\dots(a + a_n - ۱)$ بر $a^{n+۱} + a - ۱$ بخش‌پذیر نیست.

۳. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که

(آ) $n^۲ + ۱ \mid n!$

(ب) $n^۲ + ۱ \nmid n!$

۴. اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای حداقل درجه دو باشد، ثابت کنید بی‌نهایت m وجود دارد که $p(m!)$ عددی مرکب باشد.

۵. f و g دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی هستند با درجه‌های یکسان. می‌دانیم اگر برای یک x حقیقی داشته باشیم که $p(x)$ طبیعی است آنگاه $f(x)$ هم طبیعی خواهد بود. ثابت کنید اعداد طبیعی m و n وجود دارند که داشته $f = m \times g + n$

۶. k عددی طبیعی است و می دانیم که چند جمله ای $P(X)$ با ضرایب طبیعی برای Xهای بزرگ همواره توان k ام کامل است. ثابت کنید $Q(X)$ با ضرایب طبیعی وجود دارد که

$$P(X) = Q(x)^k$$

۷. ثابت کنید برای هر k، nای وجود دارد که $۳^k \mid ۵^n - ۲$

۸. همه b و aهای طبیعی را بیابید که $a \mid b^۲ + ۱$ و $a \mid b^۲ + ۱$

۹. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، عددی طبیعی با n رقم ناصفر وجود دارد که به مجموع ارقامش بخش پذیر است.

۱۰. u عددی طبیعی و ثابت است. نشان دهید معادله‌ی روبه‌رو متناهی جواب دارد: $n! = u^a - u^b$

۱۱. (آ) معادله‌ی $x^m \equiv a(modp)$ را به طور کامل حل کنید. (m و a اعدادی طبیعی‌اند و p عددی اول است.)
(ب) باقی‌مانده $۱^n + ۲^n + + (p-۱)^n$ را به پیمانه‌ی p بیابید.

۱۲. به ازای هر عدد اول p ، می دانیم X ای وجود دارد که $p \mid X^۲ - n$. ثابت کنید n مربع کامل است.

۱۳. آیا اعداد طبیعی a و b و c وجود دارند که $a^۲ + b^۲ + c^۲$ بر $۲۰۱۳(ab + bc + ca)$ بخش‌پذیر باشد؟

۱۴. n عددی طبیعی است که مربع کامل نیست و x هم عددی طبیعی و می‌دانیم

$$x^۲ + (x + ۱)^۲ + ... + (x + n - ۱)^۲$$

مربع کامل است. ثابت کنید بی‌نهایت y طبیعی وجود دارد که

$$y^۲ + (y + ۱)^۲ + ... + (y + n - ۱)^۲$$

مربع کامل باشد.

۱۵. $a_۱ = ۳$ و $a_۲ = ۱۱$ و $a_n = ۴a_{n-۱} - a_{n-۲}$. ثابت کنید همه‌ی a_i ها نمایشی به فرم $a^۲ + ۲b^۲$ در اعداد طبیعی دارند.

۱۶. p یک عدد اول و فرد است. چند زیر مجموعه‌ی p عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۲p\}$ هستند که مجموع اعضایشان بر p بخش پذیر باشد؟

۱۷. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی یکتای A از اعداد طبیعی موجود است که هر عدد طبیعی نمایشی یکتا به فرم $a + ۲b$ داشته باشد که $a, b \in A$.

۱۸. همه a و b های طبیعی را بیابید که به ازای هر n داشته باشیم عدد n مثلثی است اگر و فقط اگر $an+b$ مثلثی باشد.

۱۹. همه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب طبیعی مثل $p(x)$ را بیابید که $P(۱), P(۲), P(۳), \ldots$ شامل همه‌ی توان‌های دو (۲^n ها) باشد.

۲۰. a و b اعدادی طبیعی‌اند و بزرگتر از ۱. نشان دهید عدد طبیعی n وجود دارد که $(a^n-۱)(b^n-۱)$ مربع کامل نباشد.

۲۱. f یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا و درجه حداقل دو می‌باشد و دنباله‌ی a_n از اعداد گویا وجود دارد که داریم $f(a_{n+۱})=a_n$. نشان دهید این دنباله متناوب است.

۲۲. $S_a=\{[na]\mid n\in\mathbb{N}\}$، آیا سه عدد حقیقی a و b و c وجود دارند که S_a و S_b و S_c، $\mathbb{N}$ را افراز کنند؟

۲۳. نشان دهید بی‌نهایت جفت از اعداد گویا به صورت $\left(\frac{p_۱}{q},\frac{p_۲}{q}\right)$ وجود دارند که

$$\left|\sqrt{۳}-\frac{p_۱}{q}\right|<q^{-\frac{۳}{۲}},\quad \left|\sqrt{۲}-\frac{p_۲}{q}\right|<q^{-\frac{۳}{۲}}$$

۳.۱ راه‌نمایی

۱. در نظر گرفتن دو طرف تساوی‌ها به پیمانه‌های گاهاً نامتعارف.

۲. همان ایدهٔ سوال قبل

۳. از این سوال تا سوال ۸ مربوط به بحث چندجمله‌ای‌ها در نظریهٔ اعداد است که کاربرد زیادی دارد و یکی از اصلی‌ترین مباحثی است که باید به آن مسلط بود. قسمت الف به لم پرکاربرد $P(x)|P(x+P(x))$ ارتباط دارد. در قسمت ب هم سعی کنید n را از روی یک عدد اول بسازید.

۴. به چند جمله ای دوگان $P(x)$ توجه کنید $Q(x)=x^kP(\frac{۱}{x})$ و $k=\deg P(x)$.

۵. یک حل سادهٔ این مساله این است که ترکیبی خطی از f و g را در نظر بگیرید که که درجه‌اش از آن دو کمتر است، اما یک راه دیگر آن استفاده از تساوی زیر است

$$\frac{g(x_{n+۱})-g(x_n)}{f(x_{n+۱})-f(x_n)}=\frac{g(a)}{f(b)}$$

۶. لم هنسل. هم فهم خود این لم مهم است هم روش اثبات آن در حل مسایل مختلف استفاده می‌شود. تمرین‌های ۶، ۷ و ۸ فصل هفتم کتاب خانم میرزاخانی بیان صورت این لم است.
درضمن صورت خود این سوال را می‌توانید به عنوان لمی کاربردی ببینید و آن را با لم‌هایی که در مبحث کاربرد آنالیز در نظریهٔ اعداد گفته می‌شود مقایسه کنید.

۷. به کمک شهودی که از روش اثبات لم هنسل به دست آورده‌اید این سوال را حل کنید.

۸. روش vieta-jumping، البته این روش خیلی کاربردی نیست و تیپ سوالات خاصی را حل می‌کند. در سوالات مربوط به آن عبارات جبری با درجه های پایین، عموماً دو، ظاهر می‌شوند و فرض‌ها عموماً نسبت به متغیرها تقارن دارند.

۹. برای دیدن لم‌های مربوط به مجموع ارقام می‌توانید به فصل مربوطه در کتاب Problems from the book نگاه کنید.
این مبحث هم خیلی کاربردی نیست، و نکات مهم آن این چند لم هستند که عموماً اثبات‌های بسیار ساده‌ای دارند

(آ) $S(m) + S(n) \geq S(m+n)$

(ب) $S(n) = n - \sum_k \lfloor \frac{n}{۱۰^k} \rfloor$

(ج) $S(n) \equiv n \pmod{۹}$

(د) $S(n) \leq ۹(\lfloor \log n \rfloor + ۱)$

(ه) هر مضرب از یک عدد به فرم $۱۰^n - ۱$ که کوچک‌تر $(۱۰^n - ۱)^۲$ باشد، مجموع ارقامی برابر $۹n$ دارد.

(و) در سوالات عموماً برای کران بالا از نامساوی ۴ و برای کران پایین از حالت خاص نامساوی ۱، $\frac{۱}{t}S(nt) < S(n)$ (با انتخاب t مناسب) استفاده می‌کنند.

۱۰.

$$\frac{n - S_p(n)}{p - ۱} = v_p[n!]$$

v_p: تعداد pها در تجزیهٔ یک عدد S_p: مجموع ارقام n در مبنای p

۱۱. این سوال بیشتر برای یادآوری شهودتان به ریشه اولیه است. تقریبا مهم ترین نکته ی آن توجه به اختار نظریه گروه ها در $\mathbb{Z}_p$ و بررسی زیرگروه های ضربی آن است و بررسی این نکته که اگر اعضای این گروه را به یک توان ثابت برسانیم چه اتفاقی می افتد.

۱۲. هر چند تقابل هم خیلی در حل سوالات کاربرد ندارد و وقتزیاد گذاشتن روی آن احتمالا به دردتان نخواهد خورد اما تسلط به آن شهودتان را در درک مفهوم باقی مانده های توانی و حل معادلات و نمایش اعداد ارتقا خواهد داد.

۱۳. مثالی از حرف بالاست.

$$(a+b+c)^۲ = (۳t+۲)(ab+ac+bc)$$

۱۴. تقابل، نمایش اعداد و معادله ی پل شاید سه مبحثی باشند که که صحبت آن ها در مورد آن ها صدق می کند. خیلی غرق در حل مساله با آن ها نشوید (به عنوان یک توصیه ی عمومی) اما نکات اصلی شان و به خصوص روندهای اثباتشان را به خاطر داشته باشید. در این سوال نیز به این توجه کنید که اگر معادلهٔ $x^۲ - dy^۲ = m$ یک جواب اولیه داشته باشد آن گاه بیشمار جواب خواهد داشت. این نکته به راحتی در روندی که در حل معادله ی پل داشتیه ایم دیده می شود.

۱۵. سعی کنید دقیقاً روندی که که در مبحث نمایش اعداد به فرم $a^۲ + b^۲$ داشته اید را این جا تکرار کنید.(همان روشی که اعداد nای را بررسی می کرد که xای وجود داشت که $n|x^۲ + ۱$) البته ممکن است این کار به حل مساله کمک نکند اما دیدن این تعمیم مفید است.

۱۶. این سوال و بعدی مربوط به تابع مولد است، اهمیت آن در آزمون ها خیلی زیاد نیست اما به نظرم از پل و نمایش اعداد مهم تر است. هم چنین اگر یکبار به مهارت های اصلی آن یعنی "بیان مساله به زبان تابع مولد" و "کار با سری ها" مسلط شوید احتمالا دیگر آن را فراموش نخواهید کرد.در کتاب Problems from the book نیز فصل هایی در توضیح این موضوع وجود دارند. برای دیدن حل این سوال هم می توانید به منبع آن یعنی المپیاد جهانی در سال ۱۹۹۵ مراجعه کنید.

۱۷. اعدادی که در نمایش مبنای ۴ آن ها فقط صفر و یک وجود دارد.

۱۸. سوالات ۱۸ تا ۲۱ مربوط به کاربرد آنالیز در نظریه اعداد است. چند سالی است که اقبال به آن زیاد شده و اهمیتش بالا رفته. مباحث و لم های عمیق زیادی در آن وجود دارد که هنوز در مسایل المپیادی کاربردی ندارند. می توانید فصل آن را در کتاب Problems from the book بخوانید البته در آن هم مطالب اضافی زیاد است. در کل مهم ترین ضهود هایی که باید از آن داشته باشید را سعی کرده ام در لم های بعدی بگویم. الف) $f(x)$ یک چند جمله ای حقیقی است و c یک عدد حقیقی مثبت ثابت کنید اعداد حقیقی $l_۱$ و $l_۲$ موجودند که (ضریب پیشرو f را مثبت بگیرید)

$$f(cx+l_۱) \le c^۲ f(x) \le f(cx+l_۲)$$

ب) اگر درجهٔ f برابر k باشد

$$\exists l_۱, l_۲ : (x+l_۱)^k \le f(x) \le (x+l_۲)^k$$

ج) اگر f و g دو چندجمله‌ای هم درجه و با ضرایب پیشرو a و b باشند

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

عموما روش کلی در حل تعداد زیادی از سوالات این مبحث این است که در ابتدا دنباله ای در سوال ظاهر می شود که نسبت اعضای متوالی آن به عدد ثابتی میل می کند(یعنی $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-۱}} \to \alpha$) و بعد با توجه به فرض مساله که شرط بسیار قوی‌تری به فرم ($\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-۱}) =$ ثابت) یا مشابه آن برقرار است و در آخر از این لم بدیهی استفاده می شود که هر دنباله از اعداد صحیح که حد داشته باشد، از جایی به بعد با حدش برابر است. البته در خیلی از سوالات نیازی به این کارها نیست و همان لم ب حکم را به سرعت نتیجه می‌دهد.

۱۹. مساله را به دو حالت تقسیم کنید که ab مربع کامل است یا نه. حل کامل را می توانید در IMO Shortlist 2009 ببینید.

۲۰. رجوع کنید به فصل ۱۷ از کتاب Problems from the book

۲۱. دو سوال آخر در مورد مبحث معروف $\{n\alpha\}$ها است که فصلی از کتاب هم به آن اختصاص دارد که البته مطالب آن از سطح کاربرد المپیادی بسیار بالاتر است. اولین نکته‌ای که باید از این مبحث در ذهن خود داشته باشید لم زیر است

$$۱ - \frac{۱}{\alpha} \le \left\{\frac{n}{\alpha}\right\} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = \lfloor m\alpha \rfloor$$

۲۲. روش اثبات لم ۲ از فصل ۱۸ کتاب خانم میرزاخانی را ببینید. این سبک لانه کبوتری زدن دومین نکته مهم در مسایل مربوط به $\{n\alpha\}$هاست.