آزمونهای پارامتری و آزمونهای ناپارامتری

اگر متغیرها مورد بررسی از توزیع نرمال پیروی کنند آزمونهای پارامتری استفاده می‌کنیم

مثل آزمون تی - نسبت - اختلاف میانگینها -

در غیر این صورت از آزمونهای ناپارامتری استفاده خواهیم کرد.

مثل کروسکال-والیس - فریدمن - اسپیرمن - من ویتنی - ویلکاکسون - مک نمار -

آزمون t زوجی برای متغیرهای کمی

اگر (X_1,Y_1) ، (X_2,Y_2) ، ... (X_n,Y_n) یک نمونه تصادفی از دو متغیر وابسته (X,Y) باشند برای بررسی اختلاف بین میانگین‌ها X و Y به صورت زیر عمل کنیم

$$\begin{cases} H_0: \mu_d = 0 \\ H_1: \mu_d \neq 0 \end{cases}$$

میانگین اختلاف (X,Y) صفر است

" " " نیست

$$d_i = X_i - Y_i$$

در این آزمون $\bar{d}$ و S_d^2 را از فرمولهای زیر به دست می‌آوریم

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \qquad S_d^2 = \frac{n\sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)}$$

سپس مقدار: $t^* = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$ را بدست آورده

H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر $|t^*| > t_{\alpha/2}(n-1)$

مثال: برای بررسی تأثیر یک دوره آموزشی ضمن خدمت نمرهٔ کارایی ۸ کارمند یک سازمان را قبل از دوره مشخص کرده و بعد از برگزاری دوره نمرات کارایی قبل و بعد از برگزاری دوره آموزشی به صورت زیر بوده است

نمره قبل x_i	7	5	11	17	14	10	3	6
نمره بعد y_i	10	12	17	17	12	8	5	7

آیا برگزاری دوره در کارایی کارمندان تغییر ایجاد کرده است در سطح خطای ۵٪

$$\begin{cases} H_0: \mu_d = 0 \\ H_1: \mu_d \neq 0 \end{cases}$$

x_i	7	5	11	17	14	10	3	6	
y_i	10	12	17	17	12	8	5	7	
d_i	-3	-7	-6	0	2	2	-2	-1	-15
d_i^2	9	49	36	0	4	4	4	1	110

$\sum d_i = -15$

$\sum d_i^2 = 110$

$$\bar{d} = \frac{-15}{8} = -1.875$$

$$S_d^2 = \frac{n\sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)} = \frac{8(110) - (-17)^2}{8(7)} = 11.7$$

$$S_d = 3.42 \qquad t^* = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{-1.875}{3.42/\sqrt{8}} = -1.55$$

$|t^*| = |-1.551| \not> t_{0.025,7} = 2.365$ چون

پس H_0 رد نمی‌شود

یعنی برگزاری دوره تغییر کارایی ایجاد نکرده

آزمون اختلاف نسبتها در دو جامعه وابسته (آزمون مک نمار) McNemar Test

آزمون مک نمار برای مقایسه نسبتها در دو جامعه وابسته بکار می رود داده ها معمولاً به صورت فراوانی در جدولی مانند جدول زیر ثبت می گردد

		بعد: دارد	بعد: ندارد	
قبل	دارد	A	B	A+B
	ندارد	C	D	C+D
		A+C	B+D	A+B+C+D

$$\begin{cases} H_0: P_{\text{قبل}} = P_{\text{بعد}} \\ H_1: P_{\text{قبل}} \neq P_{\text{بعد}} \end{cases}$$

برای انجام آزمون مقدار

$$Z^* = \frac{B-C}{\sqrt{B+C}}$$

را محاسبه کرده و H_0 را در سطح خطای α رد می کنیم اگر

$$|Z^*| > Z_{\alpha/2}$$

مثال ۱: برای سنجش اثربخشی یک دوره آموزشی، تعدادی از کارکنان یک سازمان به تصادف انتخاب و آزمونی قبل از برگزاری دوره به عمل آمده است و تعدادی قبول و مردود مشخص شده، پس از برگزاری دوره نیز آزمونی به عمل آمد، تعداد قبول و مردودی ثبت گردید، نتیجه در جدول زیر آمده است

آیا در سطح خطای ۵٪ برگزاری دوره
تغییراتی در p داده است

		بعد از دوره: قبول	بعد از دوره: مردود	
قبل از دوره	قبول	A: 10	B: 15	A+B
	مردود	C: 7	D: 4	C+D
		A+C	B+C	

P: نسبت قبول

$$\begin{cases} H_0: P_{\text{قبل}} = P_{\text{بعد}} \\ H_1: P_{\text{قبل}} \neq P_{\text{بعد}} \end{cases}$$

نسبت قبولی قبل و بعد از دوره تغییری نکرده است
" " " " کرده است

$$z^* = \frac{B-C}{\sqrt{B+C}}$$

$A+B$: تعداد قبولی قبل
$A+C$: " قبولی بعد

$$\text{بعد} - \text{قبل} = A+B-(A+C) = B-C$$

$$z^* = \frac{15-7}{\sqrt{15+7}} = \frac{8}{\sqrt{22}} = 1.71$$

چون

$|z^*| \not> z_{0.025} = 1.96$ پس H_0 رد نمی‌شود

یعنی تغییری ایجاد نشده است.

مثال ۲: یک کاندیدای مجلس میتینگی برگزار کرد. به تعدادی از اعضا در میتینگ قبل و بعد از جلسه مورد پرسش قرار گرفتند تا نظر خود را نسبت به این کاندیدا اعلام کنند. و اطلاعات مشاهده شده به صورت زیر گزارش شد.

		بعد از میتینگ	
		موافق	مخالف
قبل از میتینگ	موافق	50 A	70 B
	مخالف	20 C	14 D

آیا در سطح خطای ۵٪ برگزاری این میتینگ باعث افزایش محبوبیت این کاندیدا شده است؟

$$\begin{cases} H_0: P_{قبل} \geq P_{بعد} \\ H_1: P_{قبل} < P_{بعد} \end{cases}$$

افزایش محبوبیت

H_0 را رد می‌کنیم اگر $z^* < -z_\alpha$

$$z^* = \frac{70-20}{\sqrt{70+20}} = 5.27$$

$z_{0.05} = 1.64$

چون $z^* = 5.27 \not< -1.64$ پس H_0 رد نمی‌شود یعنی

محبوبیت فرد کاندید کاهش پیدا کرده یا ثابت مانده ولی افزایش نیافته است

آزمون کروسکال-والیس

این آزمون معادل طرح کاملاً تصادفی است.

تیمار

1		2	...	k
Y_{11}	R_{11}	Y_{21}		Y_{k1}
Y_{12}	R_{12}	Y_{22}		Y_{k2}
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
		Y_{2n_2}		
Y_{1n_1}		R_2		Y_{kn_k}
R_1				R_k

$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

وقتی داده‌ها توزیع نرمال نداشته باشند و می‌خواهیم k جامعه مستقل را مقایسه کنیم از این آزمون استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} H_0: & k \text{ تیمار یکسانند} \\ H_1: & \text{حداقل دو تیمار تفاوت دارند.} \end{cases}$$

برای انجام آزمون N مشاهده را از 1 تا N رتبه می‌دهیم. (به داده‌های تکراری میانگین رتبه تعلق می‌گیرد)

سپس محاسبه

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر

$$H > \chi^2_{\alpha, k-1}$$

مثال ۱: نمره‌های ۵، ۴، ۳ نفر از دانشجویان که به ترتیب با روش‌های تدریس

۱، ۲، ۳ آموزش داده شده‌اند، نمرات آزمون پایانی به صورت زیر بوده است

روش تدریس

1		2		3	
15	8	6	2	18	10.5
14	6.5	5	1	17	9
10	3.5	10	3.5	19	12
12	5	14	6.5		
18	10.5				
$R_1 = 33.5$		$R_2 = 13$		$R_3 = 31.5$	

$N = 5+4+3 = 12$

آیا در سطح خطای ۵٪ کارایی سه روش تدریس یکسان می‌باشد

$$\begin{cases} H_0: & \text{سه روش یکسانند} \\ H_1: & \text{لااقل دو روش تفاوت دارد} \end{cases}$$

$$H = \frac{12}{12(13)}\left[\frac{(33.5)^2}{5} + \frac{13^2}{4} + \frac{31.5^2}{3}\right] - 3(12+1) = 6.96$$

چون $H = 6.96 > \chi^2_{0.05,2} = 5.991$ پس H_0 رد می‌شود

یعنی لااقل دو روش تدریس تفاوت دارند

مثال (۲): برای مقایسه عملکرد سه معلم تعدادی از دانش آموزان را به طور تصادفی انتخاب و کیفیت درس آنها را در جدول زیر ثبت کرده‌ایم

معلم

1		2		3	
ضعیف	4	متوسط	9	متوسط	9
ضعیف	4	قوی	13.5	خیلی قوی	16
خیلی ضعیف	1	ضعیف	4	ضعیف	4
متوسط	9	قوی	13.5	متوسط	9
ضعیف	4	قوی	13.5	متوسط	9
		قوی	13.5		
	$R_1 = 22$		$R_2 = 67$		$R_3 = 47$

H_0: عملکرد سه معلم یکسان است

H_1: لااقل عملکرد دو معلم تفاوت دارد

$N = 16$

آیا در سطح خطای ۵٪ بین عملکرد سه معلم تفاوت وجود دارد؟

$$H = \frac{12}{16(16+1)}\left[\frac{22^2}{5} + \frac{67^2}{6} + \frac{47^2}{5}\right] - 3(16+1) = 5.77$$

چون $H = 5.77 \not> \chi^2_{0.05,2} = 5.991$ پس H_0 رد نمی‌شود

یعنی عملکرد سه معلم یکسان است

توجه: اگر H_0 رد شود باید تمام مقایسات دوتایی را انجام داد تا یقین شود کدام تیمارها تفاوت دارند. این کار توسط آزمون‌های تعقیبی (مانند آزمون دوتایی از آزمون‌های ناپارامتری من-ویتنی) [illegible]

کروسکال

1		2		3	
15	8	6	2	18	10.5
14	6.5	5	1	17	9
10	3.5	10	3.5	19	12
12	5	14	6.5		
18	10.5				

$R_1 = 33.5$ $\quad R_2 = 13$ $\quad R_3 = 31.5$

1		2	
15	8	6	2
14	6.5	5	1
10	3.5	10	3.5
12	5	14	6.5
18	9		

$R_1 = 32$ $\quad R_2 = 13$

$$U_1 = n_1 n_2 + \left(\frac{n_1(n_1+1)}{2}\right) - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \left(\frac{n_2(n_2+1)}{2}\right) - R_2$$

$$U_1 = 5(4) + \left[\frac{5(6)}{2}\right] - 33.5 = 1.5$$

$$U_2 = 5(4) + \left(\frac{4(5)}{2}\right] - 13 = 17$$

با مراجعه به جدول مخصوص من ویتنی و با داشتن مقادیر U_1 ، U_2 ، n_1 ، n_2

تصمیم‌گیری می‌شود که آیا 1 با 2 تفاوت دارند

با استفاده از تقریب نرمال به صورت زیر عمل می‌شود.

$$\mu = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$\sigma^2 = n_1 n_2 \left(\frac{N+1}{12}\right)$$

$$z^* = \frac{U_1 - \mu}{\sigma}$$

$$|z^*| > z_{\alpha/2}$$

H_0 را رد می‌کنیم در

با استفاده از تقریب نرمال به صورت زیر عمل می‌شود.

$$\mu = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad z^* = \frac{U_1 - \mu}{\sigma}$$

$$\sigma^2 = n_1 n_2 \left(\frac{N+1}{12}\right)$$

$$|z^*| > z_{\alpha/2}$$ H_0 را رد می‌کنیم اگر

$n_1 = 5 \qquad n_2 = 4 \qquad U_1 = 1.5$

$$\mu = \frac{5(4)}{2} = 10 \qquad \sigma^2 = 5(4)\left(\frac{9+1}{12}\right) = 16.67 \qquad \sigma = 4.08$$

$$z^* = \frac{1.5 - 10}{4.08} = -2.08$$

چون $|z^*| = |-2.08| > \underset{z_{0.025}}{1.96}$ پس H_0 رد می‌شود یعنی 1 با 2 تفاوت دارد