بخشی از مطالب انتشار یافته در وب سایت ریاضی دهم

دانش آموز عزیز کافیست روی لینک مورد نظر کلیک کنید

ریاضی دهم

دانلود حل تمرین کتاب هندسه 1 دهم رشته ریاضی چاپ جدید 95 - 96 - سه شنبه 16 شهریور 1395 - 5:24

دانلود حل تمرین کتاب ریاضی دهم رشته انسانی چاپ جدید 95 - 96 - سه شنبه 16 شهریور 1395 - 11:13

دانلود حل تمرین کتاب ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی چاپ جدید 95 - 96 - شنبه 13 شهریور 1395 - 10:39

دانلود کتابهای دهم متوسطه 95-96 - سه شنبه 01 تیر 1395 - 2:50

سرفصلهاي درس هندسه پایه دهم رشته ریاضی - چهارشنبه 02 تیر 1395 - 9:21

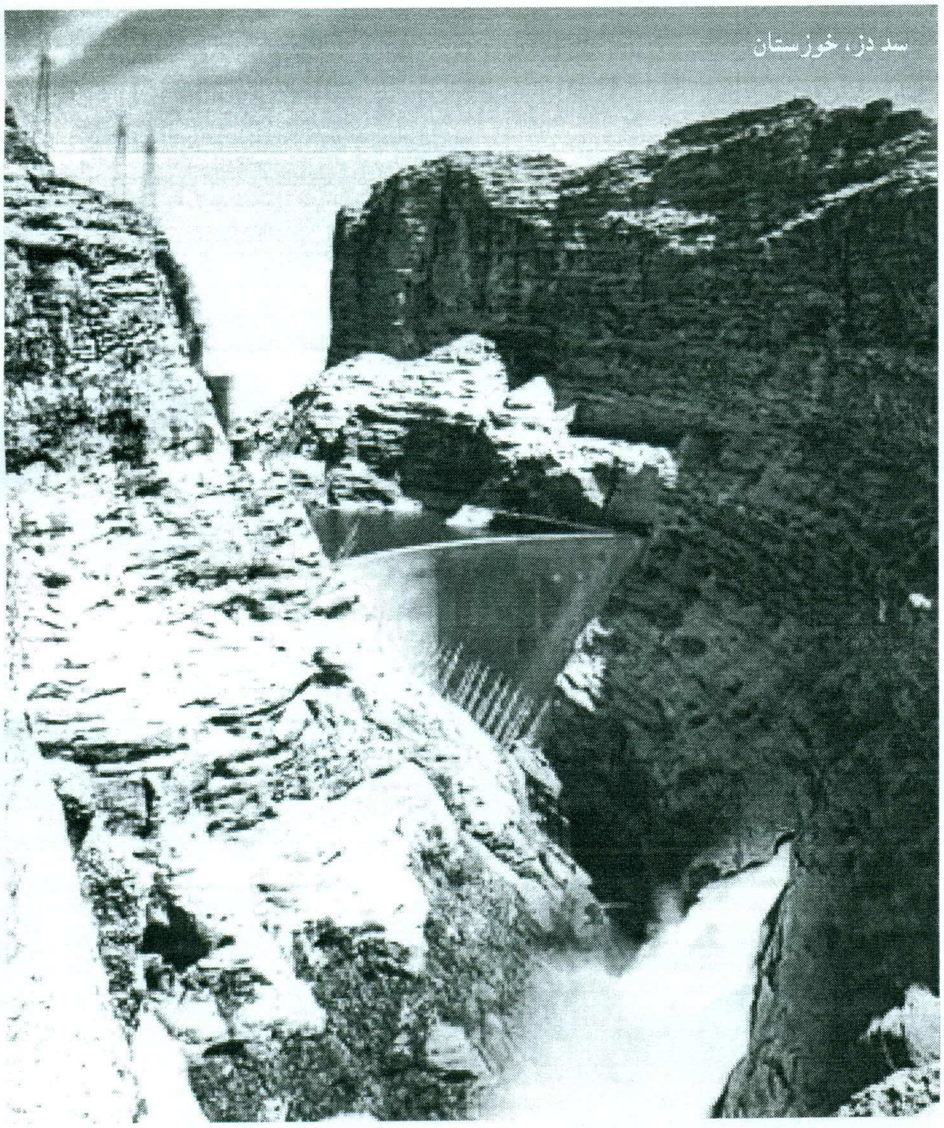
سرفصل هاي كتاب رياضي پايه دهم رشته علوم انساني و معارف - چهارشنبه 05 خرداد 1395 - 6:32

سرفصلهاي رياضي دهم رشته ي تجربي و رياضي - دوشنبه 03 خرداد 1395 - 10:28

کاربرگ معادلات درجه 2 مخصوص ریاضی دهم (همه رشته ها) - سه شنبه 24 فروردین 1395 - 11:26

فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها

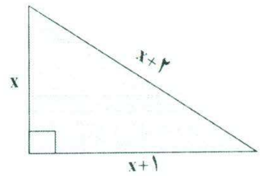


سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینهٔ ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

- معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
- سهمی
- تعیین علامت

درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن



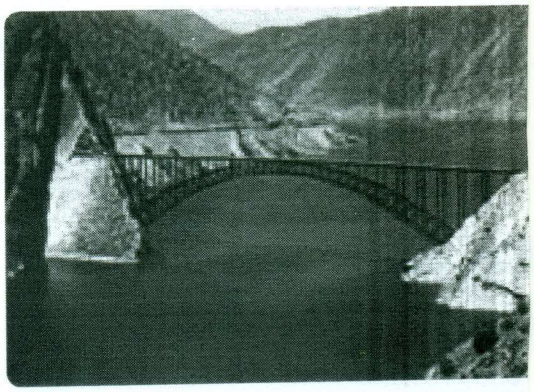
صبا بعد از حل یک مسئلهٔ هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئلهٔ او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟). از خواهر بزرگ‌تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویهٔ دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x، یعنی x+۱ و x+۲ در نظر گرفت و به کمک رابطهٔ فیثاغورس، رابطهٔ زیر را بین سه ضلع مثلث به‌دست آورد :

$$x^۲+(x+۱)^۲=(x+۲)^۲$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

اکنون او می‌خواست معادلهٔ به‌دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادلهٔ بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^۲-۲x-۳=۰$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم می نامیم.



هر معادله به شکل

$$ax^۲+bx+c=۰ \quad , \quad (a\neq ۰)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می نامیم.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^2-2x-3=0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱) با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-3)=0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$

می‌دانیم که تجزیهٔ یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱) فاکتورگیری:

$ax^2+bx=x(ax+b)$

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

۲) از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x+1=0$ یا $x-3=0 \Rightarrow x=-1$ یا $x=3$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$x=3$	$x=-1$
$x^2-2x-3=0$	$x^2-2x-3=0$
$(3)^2-2(3)-3\overset{?}{=}0$	$(-1)^2-2(-1)-3\overset{?}{=}0$
$9-6-3\overset{?}{=}0$	$1+2-3\overset{?}{=}0$
$0=0$ ✓	$0=0$ ✓

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ توضیح دهید. خیر طول ضلع هیچگاه منفی نمی شود

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^2-3x=10$

$x^2-3x-10=0$

$(x-5)(x+2)=0$

$x-5=0 \rightarrow x=5$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

① $\rightarrow 5^2-3(5)-10=25-15-10=0$ ✓

② $\rightarrow (-2)^2-3(-2)-10=4+6-10=0$ ✓

ب) $3t^2-t=0$

$t(3t-1)=0$

$t=0$

$3t-1=0 \quad t=\frac{1}{3}$

① $\rightarrow 3(0)^2-0=0$ ✓

② $\rightarrow 3(\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{9}-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{3}{9}-\frac{1}{3}=0$ ✓

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^2=25$ را درنظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید.

$x^2-25=0 \quad (x-5)(x+5)=0$

$\begin{cases} x-5=0 & x=5 \checkmark \\ x+5=0 & x=-5 \checkmark \end{cases}$

۲ از دو طرف معادلهٔ $x^2=25$، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x=\pm 5$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به‌دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید. در هر دو روش پاسخ‌ها یکسان می‌باشند

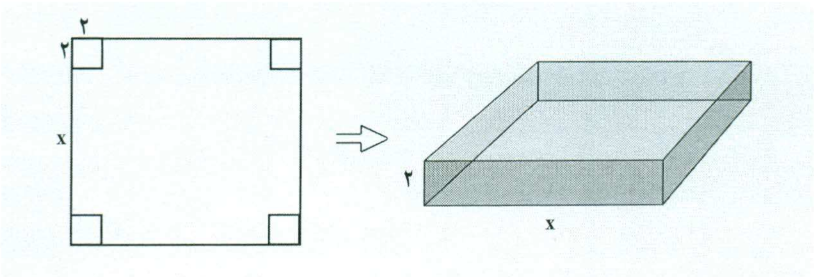
۳ اگر $x^2=a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت $x=\pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی(بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2=a$ عبارت‌اند از :

$x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحهٔ مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به‌دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (x)(x)(2) = 2x^2$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^۲ = ۲۰۰$. بنابراین $x^۲ = ۱۰۰$ و با محاسبهٔ ریشه های دوم این معادله، جواب‌های $x = ±۱۰$ به‌دست می‌آید.
و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x = ۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x + ۴ = ۱۰ + ۴ = ۱۴$ سانتی‌متر است.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲ = ۲۰$ ب) $t^۲ + ۷ = ۰$ پ) $(r-۲)^۲ = ۱۶$

الف) $x^۲ = ۴$ ، $x = ±۲$

ب) $t^۲ = -۷$ معادله جواب حقیقی ندارد

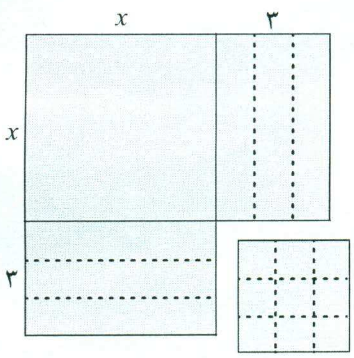
پ) $r - ۲ = ±۴$

$r-۲ = ۴ \rightarrow r = ۶$

$r-۲ = -۴ \rightarrow r = -۲$

حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

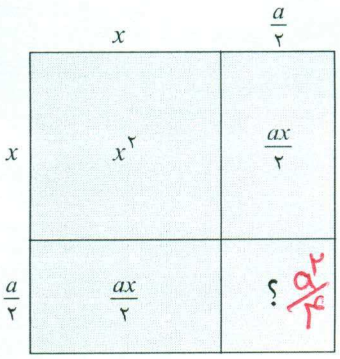


۱ دو جمله‌ای $x^۲ + ۶x$ را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^۲ + ۶x + ۹ = (x + ۳)^۲$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

قطعه حواشیه ۹ قسمت دارد ما نیز عدد ۹ را در سمت چپ قرار داریم وجذر آن ۳ را در جای خالی سمت راست



۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^۲ + ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} = (x + \frac{a}{۲})^۲$$

مثال

معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

معادلهٔ درجه دوم	$x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$
به دو طرف معادله، ۴− را اضافه کرده‌ایم	$x^۲ - ۶x = -۴$
به دو طرف معادله ۹ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود	$x^۲ - ۶x + ۹ = -۴ + ۹$
سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم	$(x-۳)^۲ = ۵$
از دوطرف معادله، ریشهٔ دوم می‌گیریم	$x - ۳ = ±\sqrt{۵}$
به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده‌ایم	$x = ۳ ± \sqrt{۵}$

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از $۳ + \sqrt{۵}$ و $۳ - \sqrt{۵}$.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2+2x=24$

$x^2+2x+1=24+1$

$(x+1)^2=25$

$x+1=\pm 5$

$\begin{cases} x+1=5 & x=4 \\ x+1=-5 & x=-6 \end{cases}$

ب) $t^2+3t=3$

$t^2+3t=+3$

$t^2+3t+\frac{9}{4}=+3+\frac{9}{4}$

$(t+\frac{3}{2})^2=\frac{21}{4}$

$t+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

$t=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$, $t=\frac{-\sqrt{21}-3}{2}$

پ) $n^2-4n+5=0$

$n^2-4n=-5$

$n^2-4n+4=-5+4$

$(n-2)^2=-1$

معادله ریشه حقیقی ندارد

ت) $2r^2+r-2=0$

$r^2+\frac{r}{2}-1=0$

$r^2+\frac{r}{2}=1$

$r^2+\frac{r}{2}+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{16}$

$(r+\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16}$

$r+\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$r=\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ و $r=\frac{-\sqrt{17}+1}{4}$

حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز : آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادلهٔ درجه دوم را حل کرد؟

معلم : بله. برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

$ax^2+bx+c=0$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ — دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ — به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ — به دو طرف معادله، $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ — دو طرف را ساده کرده‌ایم

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^2-4ac$ ؛ پس : $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : اگر $\Delta<0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشهٔ دوم گرفت.

معلم : آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta>0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : بله. کافی است از دو طرف معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ ریشهٔ دوم بگیریم :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

دانش‌آموز : اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

معلم : بله و این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{b}{2a})^2=0 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

دانش‌آموز : پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم : این ریشه از معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})=0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم.

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2} \to \Delta>0$

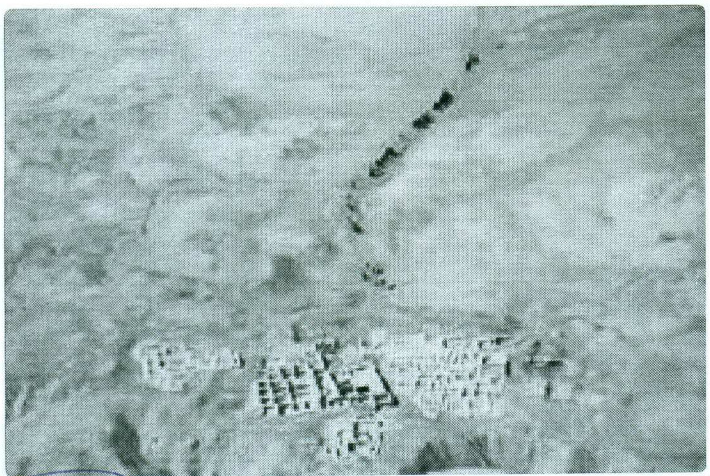
$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \to x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

کار در کلاس

۱) با توجّه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^2+bx+c=0 \to \boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- $\Delta>0$: معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta=0$: معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد : $x=-\frac{b}{2a}$
- $\Delta<0$: معادله ریشهٔ حقیقی ندارد



شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

۲) معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2-x+1=0$

ب) $-2x^2+x+3=0$

پ) $-x^2+4x-4=0$

الف) $x^2-x+1=0$ (a, b, c)

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$

معادله ریشهٔ حقیقی ندارد

ب) $-2x^2+x+3=0$ (a, b, c)

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(-2)(3)=1+24=25$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}$

$x=-1$ و $x=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

ج) $-x^2+4x-4=0$ (a, b, c)

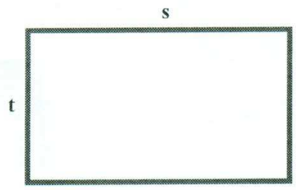
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4(-1)(-4)=16-16=0$

$\Delta=0 \to x=-\frac{b}{2a}$

$x=-\frac{4}{-2}=2$

مثال

از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است، پس $۲(s+t)=۵۰$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t=۲۵$ می رسیم؛ بنابراین $t=۲۵-s$.

از سوی دیگر $st=۱۴۴$. با جای‌گذاری t برحسب s در این معادله به شکل $s(۲۵-s)=۱۴۴$ می رسیم که بعد از ساده شدن، معادلهٔ درجه دوم $s^۲-۲۵s+۱۴۴=۰$ به‌دست می‌آید.

در این معادله $a=۱$, $b=-۲۵$, $c=۱۴۴$ ؛ بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۵)^۲-۴(۱)(۱۴۴)=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$$

پس $\Delta>۰$ و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} s_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵+۷}{۲}=\dfrac{۳۲}{۲}=۱۶ \\ s_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵-۷}{۲}=\dfrac{۱۸}{۲}=۹ \end{cases}$$

و چون $t=۲۵-s$، پس برای t نیز دو جواب به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} s_۱=۱۶ \Rightarrow t_۱=۲۵-۱۶=۹ \\ s_۲=۹ \Rightarrow t_۲=۲۵-۹=۱۶ \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی‌متر به‌دست می‌آید.

$x^۲-۱۱x+۱۰=۰$
$(x-۱)(x-۱۰)=۰$
$x-۱=۰ \quad x=۱$
$x-۱۰=۰ \quad x=۱۰$

$۵t^۲-۲۰=۰$
$۵(t^۲-۴)=۰$
$۵(t-۲)(t+۲)=۰$
$t-۲=۰ \quad t=۲$
$t+۲=۰ \quad t=-۲$

تمرین

۱ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲-۱۱x=-۱۰$ ۲) $۵t^۲=۲۰$

۳) $۵a^۲-۷a=۲a(a-۳)$ ۴) $۴k^۲-۱۲k+۸=۰$

$۵a^۲-۷a=۲a^۲-۶a$
$۳a^۲-a=۰ \to a(۳a-۱)=۰$
$a=۰$
$۳a-۱=۰ \quad a=\frac{۱}{۳}$

$۴(k^۲-۳k+۲)=۰$
$۴(k-۱)(k-۲)=۰$
$k-۱=۰ \quad k=۱$
$k-۲=۰ \quad k=۲$

۲ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲-۲=۲۶ \to n^۲=۲۸ \quad n=\pm\sqrt{۲۸}$ ۲) $x^۲+۱۲=۳ \to x^۲=-۹$ ریشهٔ حقیقی ندارد

۳) $(۳t-۲)^۲=۴$ ۴) $۳-۳k=۳k(۲k-۱)$

$۳t-۲=\pm۲ \to ۳t-۲=۲ \to ۳t=۴ \to t=\frac{۴}{۳}$
$۳t-۲=-۲ \quad ۳t=۰ \to t=۰$

$۳-۳k=۶k^۲-۳k$
$۳=۶k^۲$
$k^۲=\frac{۱}{۲}$
$k=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۳ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲-۶x=۷$ ۲) $s^۲-۳s+۳=۰$

۳) $r^۲+۴r+۴=۰$ ۴) $۲a^۲+۵a-۳=۰$

$(r+۲)^۲=۰$
$r+۲=۰$
$r=-۲$

$x^۲-۶x=۷$
$x^۲-۶x+۹=۷+۹$
$(x-۳)^۲=۱۶$
$x-۳=\pm۴$
$x-۳=۴ \quad x=۷$
$x-۳=-۴ \quad x=-۱$

$a^۲+\frac{۵}{۲}a=\frac{۳}{۲}$
$a^۲+\frac{۵}{۲}a+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}$
$(a+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶}$
$a+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}$
$a+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴} \to a=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$
$a+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴} \to a=-\frac{۱۲}{۴}=-۳$

$s^۲-۳s+\frac{۹}{۴}=\frac{۹}{۴}-۳$
$(s-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{-۳}{۴}$
معادله ریشهٔ حقیقی ندارد

$4x^2-13x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4(4)(3)=169-48=121$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13\pm\sqrt{121}}{8}$

$x=\frac{13+11}{8}=3$ و $x=\frac{13-11}{8}=\frac{1}{4}$

$-r^2+r-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4(-1)(-3)$

$\Delta=1-12=-11<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد

$\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}=0$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow$

$\Delta=(-\frac{1}{2})^2-4(\frac{1}{3})(-\frac{3}{2})$

$\Delta=\frac{1}{4}+2$

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$\Delta=\frac{9}{4}>0$

$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$t=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}}{2(\frac{1}{3})}$ ، $t=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$ و $t=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$

۱) $4x^2-13x+3=0$ ۲) $r-r^2=3$

۳) $a^2+2\sqrt{3}a=9$ ۴) $\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}-\frac{3}{2}=0$

$a^2+2\sqrt{3}a-9=0$

$\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-4(1)(-9)$
$=12+36=48$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ (16×3)

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{3}\pm4\sqrt{3}}{2}$

$x=\sqrt{3}$ و $x=-3\sqrt{3}$

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2=250$ $\to x^2=125 \to x=\pm\sqrt{125}$ ، $x=\pm5\sqrt{5}$ ۲) $9-6z+z^2=0$ $(z-3)^2=0$ ، $z-3=0$ ، $z=3$

۳) $4a^2+3a=1$ ۴) $b^2+\sqrt{2}b-4=0$

$4a^2+3a-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=9-4(4)(-1)=9+16=25$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm5}{8}$

$x=\frac{1}{4}$ و $x=-1$

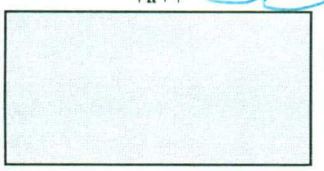
$b^2+\sqrt{2}b=4 \to b^2+\sqrt{2}b+\frac{1}{2}=4+\frac{1}{2}$

$(b+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{9}{2} \to b+\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$b=\sqrt{2}$ و $b=-2\sqrt{2}$

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

پاسخ در پایین صفحه



۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$a(4a+3)=45$

$4a^2+3a-45=0$

$\Delta=b^2-4ac=9-4(4)(-45)=9+720=729$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{729}}{8}$ (27)

$x=3$ و $a=-\frac{30}{8}=-\frac{15}{4}$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

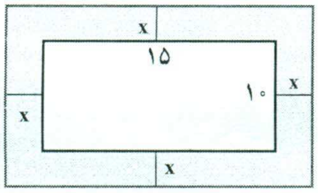
$x+4=y$

$(x+4)(x+8)=60 \to x^2+12x+32=60$

$x^2+12x-28=0$

$(x+14)(x-2)=0$ ، $x=-14$ ✗ ، $x=2$ ✓

یکی دو سال و دیگری ۶ سال دارد

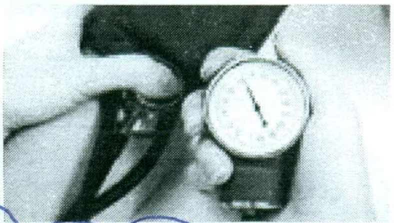


۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

صفحه بعد

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

صفحه بعد



۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[۱]، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ $P=0/006s^2-0/02s+120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

صفحه بعد

$(2k+1)^2+(2k+3)^2=290$

$4k^2+4k+1+4k^2+12k+9=290$

$8k^2+16k-280=0$

$8(k^2+2k-35)=0$

$8(k+7)(k-5)=0$

$k=-7$ و $k=5$

‎-۱۳ فرد اول ، ‎-۱۱ فرد بعدی

۱۱ فرد اول ، ۱۳ فرد بعدی

۱ــ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۹-

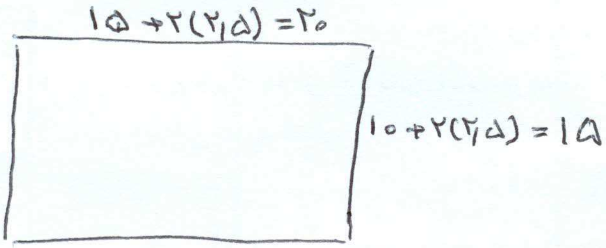
$$S=(10+2x)(15+2x)$$

$$300=150+20x+30x+4x^2$$

$$\underset{a}{4x^2}+\underset{b}{50x}\underset{c}{-150}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2500-4(4)(-150)=2500+2400=4900$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-50\pm\sqrt{4900}}{8}=\frac{-50\pm 70}{8}\ \begin{cases} x=\frac{20}{8}=2.5\ \checkmark \\ x=\frac{-120}{8}=-15\ \times \end{cases}$$



ابعاد قاب ۲۰×۱۵ می‌باشد.

۱۰-

$$\frac{n(n-1)}{2}=45 \qquad n^2-n=90 \qquad n^2-n-90=0$$

$$(n-10)(n+9)=0$$

$$\begin{cases} n-10=0 & n=10\ \checkmark \\ n+9=0 & n=-9\ \times \end{cases}$$

تعداد تیم‌ها ده تیم می‌باشد

هر تیم می‌تواند با سایر تیم‌ها به جز خودش بازی کند پس n تیم می‌توانند $n-1$ بازی انجام دهند و چون بازی‌ها به صورت رفت و برگشت هر دو در نظر گرفته شده‌اند پس بر ۲ هم تقسیم می‌کنیم

۱۱-

$$p=0.006s^2-0.02s+120$$

$$125=0.006s^2-0.02s+120$$

$$\underset{a}{0.006s^2}\underset{b}{-0.02s}\underset{c}{-5}=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(0.02)^2-4(0.006)(-5)$$

$$\Delta=0.0004+0.12=0.1204$$

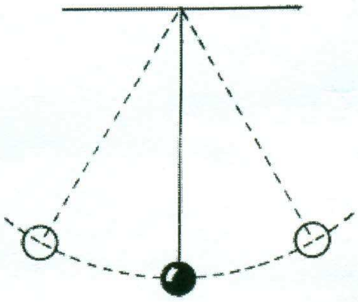
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0.02\pm\sqrt{0.1204}}{0.012}\simeq\frac{0.02\pm 0.35}{0.012}$$

$$x=\frac{0.37}{0.012}=30.83\ \checkmark \quad \text{و} \quad x=\frac{-0.33}{0.012}=-27.5\ \times$$

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقهٔ پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.

مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ محاسبه شود که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a\neq 0$ است.

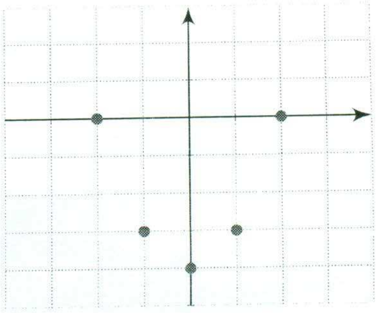


فعالیت

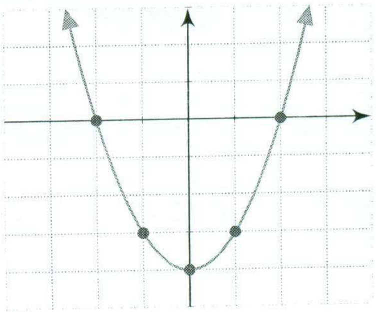
معادلهٔ $y=x^2-4$ را درنظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

x	$y=x^2-4$	(x,y)
-2	$y=(-2)^2-4=4-4=0$	$(-2,0)$
-1	$y=(-1)^2-4=1-4=-3$	$(-1,-3)$
0	$y=(0)^2-4=0-4=-4$	$(0,-4)$
1	$y=1^2-4=1-4=-3$	$(1,-3)$
2	$y=2^2-4=4-4=0$	$(2,0)$



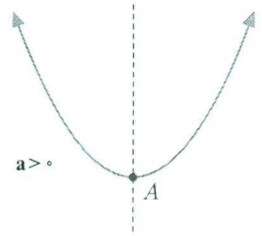
نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).



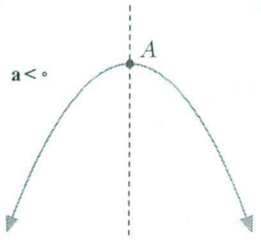
ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ $(0,-4)$ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ $x=0$

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ ۵ نقطه آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ بله با ۳ نقطه

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور xها در چه نقاطی است؟ در $(2,0)$ و $(-2,0)$



نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است :



محور تقارن

نقطهٔ A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

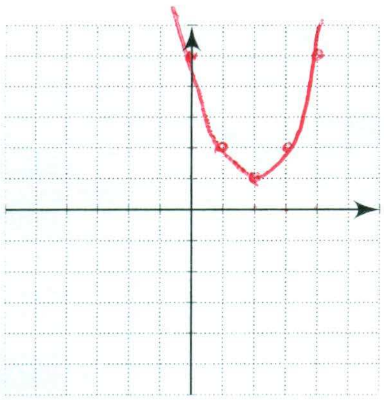
الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$

ب) ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
۰	$y = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$	(۰,۵)
۱	$y = 1^2 - 4(1) + 5 = 2$	(۱,۲)
۲	$y = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$	(۲,۱)
۳	$y = 3^2 - 4(3) + 5 = 2$	(۳,۲)
۴	$y = 4^2 - 4(4) + 5 = 5$	(۴,۵)



پ) پنج نقطهٔ حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت) آیا می‌توانید پایین ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y = (x-2)^2 + 1$ به‌دست آورید؟ بله ترتیب عدد درون پرانتز و عدد سمت راست و بیرون پرانتز

(۲,۱)

هر سهمی به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادلهٔ $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

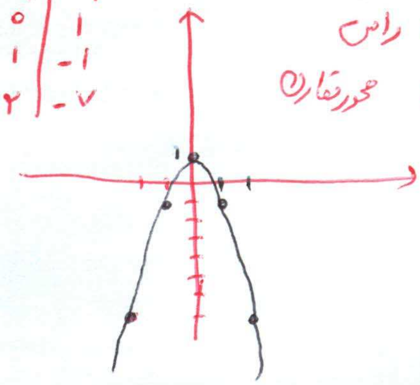
الف) $y = (x+1)^2 - 2$ ب) $y = -2x^2 + 1$

$y = -2(x-0)^2 + 1$

راس $(0,1)$

محور تقارن $x = 0$

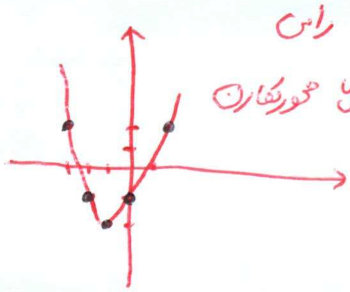
x	y
-2	-7
-1	-1
0	1
1	-1
2	-7



راس $(-1,-2)$

محور تقارن $y=-1$

x	y
-3	2
-2	-1
-1	-2
0	-1
1	2



فعالیت

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$y = ax^2 + bx + c$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c \rightarrow$

$\rightarrow y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a} \rightarrow y = a(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{-h})^2 + \underbrace{\frac{4ac-b^2}{4a}}_{k}$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.[1]

$(h,k) = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ محور تقارن $x = h = -\frac{b}{2a}$

مثال

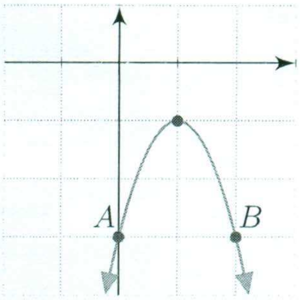
سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -2$، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x,y)
۰	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	$(0,-3)$
۱	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	$(1,-1)$
۲	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	$(2,-3)$

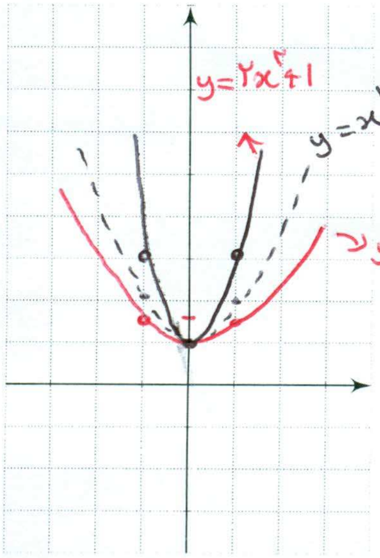


بنابراین نمودار این سهمی به‌صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x=1$ قرینه‌اند.

۱ــ عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آورید.

فعالیت



معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y=\frac{x^2}{2}+1$ و $y=2x^2+1$ است.

الف) مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(0,1)$ است.

x	$y=\frac{x^2}{2}+1$	(x,y)
0	$y=\frac{0^2}{2}+1=1$	$(0,1)$
-1	$y=\frac{(-1)^2}{2}+1=\frac{3}{2}$	$(-1,\frac{3}{2})$
1	$y=\frac{1^2}{2}+1=\frac{3}{2}$	$(1,\frac{3}{2})$

x	$y=2x^2+1$	(x,y)
0	$y=2(0)^2+1=1$	$(0,1)$
-1	$y=2(-1)^2+1=3$	$(-1,3)$
+1	$y=2(1)^2+1=3$	$(1,3)$

ب) معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.
$y=x^2+1$ ، $y=-4x^2+1$

پ) ضرایب x^2 در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟
اگر ضریب x^2 عددی بین صفر و یک باشد دهانهٔ سهمی بازتر و اگر عددی بزرگتر از یک یا کمتر از یک باشد دهانه سهمی تنگ‌تر می‌شود.

تمرین

۱) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-(x+1)^2-3$

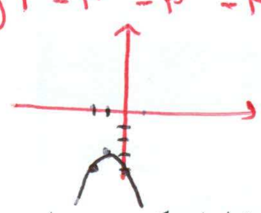
ب) $y=3x^2-2$

پ) $y=x-x^2$

ت) $y=\frac{x^2}{2}+x-4$

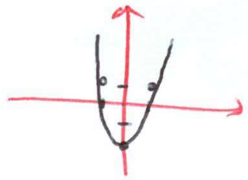
الف)

x	-2	-1	0
y	-4	-3	-4



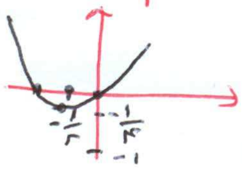
ب)

x	-1	0	1
y	1	-2	1



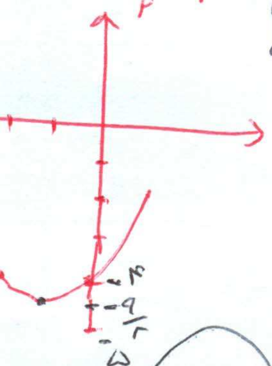
پ) $y=-x^2-x$
$x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{-2}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0
y	0	$\frac{1}{4}$	0

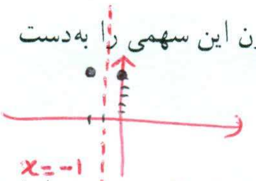


ت) $y=\frac{x^2}{2}+x-4$
$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(\frac{1}{2})}=-1$

x	-2	-1	0
y	-4	$-\frac{9}{2}$	-4



۲) اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.
خط تقارن عمود منصف خط واصل نقاطی از سهمی است که ارتفاع آن‌ها یکسان است.

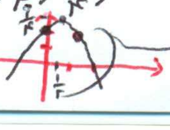


۳) نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به‌طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

$y=ax^2+bx+c$
$(0,2)$ $\quad y=a(0)^2+b(0)+c \to \boxed{c=2}$
$(-1,0)$ $\quad 0=a(-1)^2+b(-1)+2 \quad \boxed{a-b=-2}$
$(2,0)$ $\quad 0=a(2)^2+b(2)+2 \quad \boxed{4a+2b=-2}$

$\begin{cases} a-b=-2 \\ 4a+2b=-2 \end{cases} \to \begin{cases} -4a+4b=8 \\ 4a+2b=-2 \end{cases}$
$6b=6 \to b=1$ و $a=-1$
$y=-x^2+x+2$
$(\frac{+1}{2}, \frac{4(-1)(2)-1}{4(-1)})=(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	$\frac{9}{4}$	2



۴) دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha<\beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+2$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر

① $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+2$ ، $\frac{-b}{2a}$

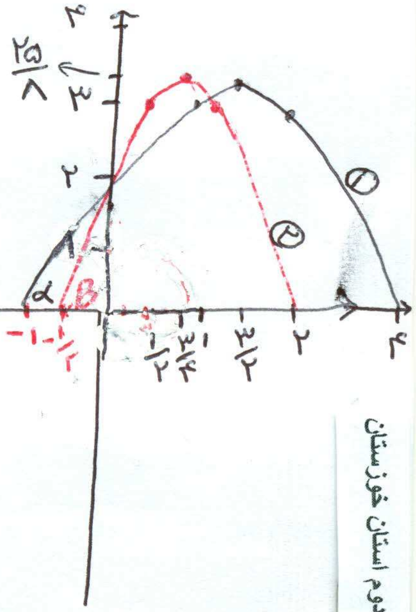
x	۱	$\frac{3}{2}$	۲
y	۳	$\frac{25}{8}$	۳

$y=-\frac{\frac{9}{4}}{2}+\frac{9}{4}+2=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+2=\frac{25}{8}$

② $y=-2x^2+3x+2$ ، $\frac{-b}{2a}$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱
y	۳	$\frac{25}{8}$	۳

$y=-2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})+2=-\frac{18}{16}+\frac{9\times4}{4\times4}+\frac{2\times16}{1}=\frac{-18+36+32}{16}=\frac{25}{8}$



طی شده از رابطهٔ $y=-2x^2+3x+2$ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها درچه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟ وزنه A

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آنها را مشخص کنید. هر دو وزنه ارتفاع یکسانی از سطح زمین پیدا کرده اند بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین $\frac{25}{8}$ می باشد

محل برخورد وزنه A با محور xها

$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+2$

$0=-\frac{1}{2}(x^2-3x-4)$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$

محل برخورد وزنه B با محور xها

$y=\underset{a}{-2}x^2+\underset{b}{3}x+\underset{c}{2}$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=9-4(-2)(2)=9+16=25$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm5}{-4}$

$x=2$, $x=-\frac{1}{2}$

بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین یکسان است امّا وزنه A نسبت به وزنه B مسافت بیشتری را طی می کند

مسافت وزنه A : $4-(-1)=5\,m$

مسافت وزنه B : $2-(-\frac{1}{2})=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5\,m$

درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطهٔ $P(x) = ۵x - ۲۰۰$ به‌دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = ۵x - ۲۰۰$	−۱۵۰	−۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰

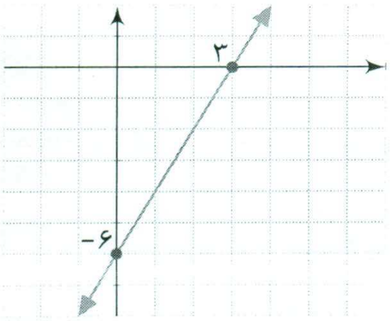
همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت P(x) برای xهای مختلف از جدول زیر به‌دست می‌آید.

x	$x < ۴۰$	۴۰	$x > ۴۰$
P(x)	−	۰	+

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

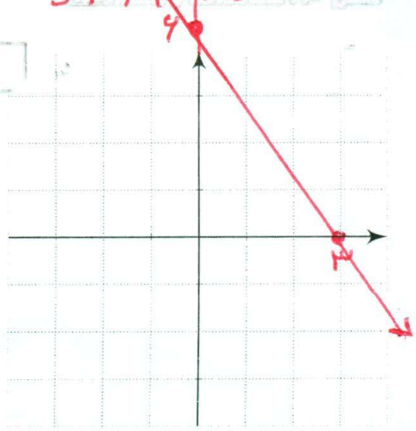
فعالیت



۱ نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y=۲x-۶$	−	۰	+

x	۰	۳
y	۶	۰



۲ نمودار خط $y=-2x+6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

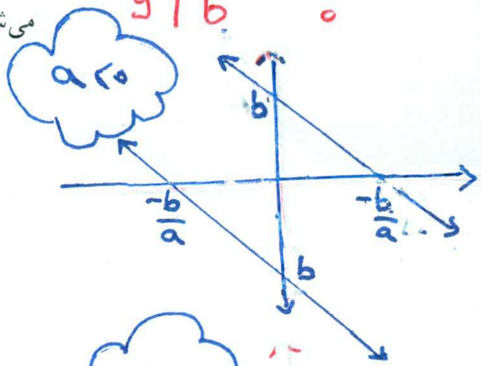
x	$x<3$	$x=3$	$x>3$
$y=-2x+6$	+	۰	−

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟ هنگامی که ضریب x منفی است علامت قبل از ریشه مثبت و هنگامی که ضریب x مثبت است علامت قبل از ریشه منفی می‌شود

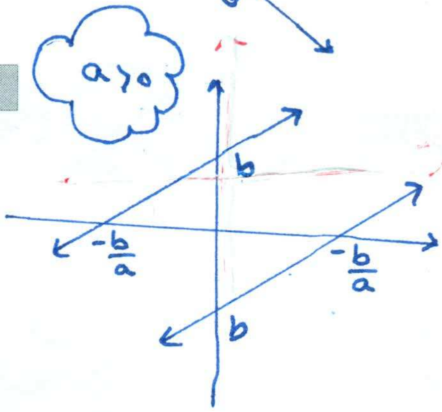
۴ نشان دهید که علامت عبارت $y=ax+b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	۰	$-\frac{b}{a}$
y	b	۰

$0=ax+b$
$ax=-b$
$x=-\frac{b}{a}$



x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$y=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a



مثال

عبارت $y=5x-2$ را تعیین علامت می‌کنیم.
ریشهٔ عبارت $5x-2$ از معادلهٔ $5x-2=0$ به دست می‌آید که برابر $x=\frac{2}{5}$ است.
با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a=5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است :

x	$x<\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x>\frac{2}{5}$
$y=5x-2$	−	۰	+

مقدار y را برای $x=3$ و $x=-1$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x=-1 \quad y=5(-1)-2=-7$

$x=3 \quad y=5(3)-2=13$

مثال

علامت عبارت $A = (2x - 1)(3 - x)$ را برای xهای مختلف تعیین می‌کنیم.

جدول تعیین علامت برای هرکدام از عبارت‌های $x - 3$ و $2x - 1$ به‌صورت زیراست :

x	$x < 3$	3	$x > 3$
$3 - x$	+	۰	−

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$2x - 1$	−	۰	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به‌صورت زیر می‌نویسیم :

x	$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x - 1$	−	۰	+		+
$3 - x$	+		+	۰	−

بنابراین در سه ناحیهٔ بالا که با رنگ‌های مختلف نشان داده شده، علامت هرکدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$، عبارت $2x - 1$، مثبت است؛ ولی $x - 3$ منفی می‌باشد، پس علامت عبارت حاصل‌ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیهٔ دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x - 1)(3 - x)$ به‌صورت زیر است[1].

x		$\frac{1}{2}$		3	
$2x - 1$	−	۰	+		+
$3 - x$	+		+	۰	−
A	−	۰	+	۰	−

$2x - 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$

$2x - 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$

x		$\frac{3}{2}$	
$2x - 3$	−	۰	+
$2x - 3$	−	۰	+
B	+	۰	+

هرگاه معادله دارای توان زوج باشد همواره مثبت می‌باشد $B = (ax + b)^{2n}$

دقت کنید که روی ستون‌ها نیز قاعدهٔ ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x = 4$ و $x = 0$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$A = (2(0) - 1)(3 - 0) = -3$

$A = (2(4) - 1)(3 - 4) = 7 \times -1 = -7$

کار در کلاس

هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = (3x + 1)(x - 2)$ ب) $B = (2x - 3)^2$

پ) $C = x^3 (7 - x)$ ت) $D = \frac{x - 1}{5 - 2x}$[2]

$3x + 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{3}$

$x - 2 = 0 \quad x = 2$

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$3x + 1$	−	۰	+		+
$x - 2$	−		−	۰	+
A	+	۰	−	۰	+

$x - 1 = 0 \quad x = 1$

$5 - 2x = 0 \quad x = \frac{5}{2}$

x		1		$\frac{5}{2}$	
$x - 1$	−	۰	+		+
$5 - 2x$	−		−	۰	+
D	+	۰	−	ت ن	+

$7 - x = 0 \quad x = 7$ $\quad x^3 = 0 \quad x = 0$

x		0		7	
x^3	−	۰	+		+
$7 - x$	−		−	۰	+
C	+	۰	−	۰	+

۱ــ از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف‌نظر می‌کنیم.

۲ــ تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجهٔ مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{0}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می‌گوییم. $(a \in \mathbb{R})$

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادلهٔ $P(x)=0$ به شیوهٔ مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می نویسیم.

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

که در آن، $\Delta=b^2-4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به‌دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادلهٔ $P(x)=0$، دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1<x_2$) داشته و به شکل $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		x_1		x_2	
$x-x_1$	−	۰	+		+
$x-x_2$	−		−	۰	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+		−		+
$P(x)$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

۲ اگر معادلهٔ $P(x)=0$ ریشهٔ مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		x_1	
$(x-x_1)^2$	+	۰	+
$P(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اکنون فرض کنید $\Delta<0$ باشد، در این صورت معادلهٔ $P(x)=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

$P(x)$ همواره مثبت $\Rightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$

$P(x)$ همواره منفی $\Rightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$

مثال

عبارت $A = ۲x^۲ - x - ۳$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $A = ۰$ را در صورت وجود، به‌دست می‌آوریم.

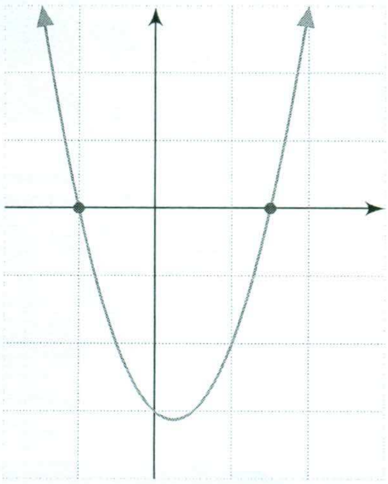
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۱ + ۲۴ = ۲۵$$

پس معادلهٔ $A = ۰$ دو ریشهٔ متمایز به‌صورت زیر دارد:

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱+۵}{۴} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱-۵}{۴} = -۱$$

با توجه به اینکه $a = ۲$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-۱		$\frac{۳}{۲}$	
P(x)	+	۰	−	۰	+



نمودار سهمی $y = ۲x^۲ - x - ۳$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{۳}{۲}$ و $x < -۱$، نمودار بالای محور xهاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-۱ < x < \frac{۳}{۲}$، نمودار پایین محور xهاست؛ پس علامت y منفی است.

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-۳)^۲}{x^۲ + x - ۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -۲ \text{ یا } x = ۱ \end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۳	
x	−		−	۰	+		+		+
$(x-۳)^۲$	+		+		+		+	۰	+
$x^۲+x-۲$	+	۰	−		−	۰	+		+
P(x)	−	تعریف نشده	+	۰	−	تعریف نشده	+	۰	+

x		-1		2	
$-x+2$	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
y	$-$	0	$+$	0	$-$
	$y<0$		$y>0$		$y<0$

کار در کلاس

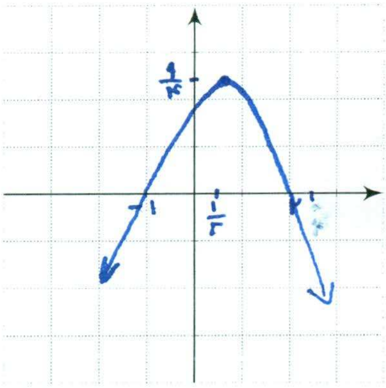
۱) چندجمله‌ای $y=-x^2+x+2$ را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$y=-(x^2-x-2)$

$-(x-2)(x+1)=0 \begin{cases} x-2=0 & x=2 \\ x+1=0 & x=-1 \end{cases}$

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

-1	$\frac{1}{2}$	2
0	$\frac{9}{4}$	0



۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(x^2-9)(3x-1)$

ب) $B=\dfrac{-x^2+6x-9}{x^2+x+3}$

$-x^2+6x-9=-(x^2-6x+9)=-(x-3)^2$ همواره منفی

$x-3=0 \quad \boxed{x=3}$

$\underset{a}{x^2}+\underset{b}{x}+\underset{c}{3}=0 \quad \Delta=1-4(1)(3)=-11<0$

ریشه حقیقی ندارد ولی $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ همواره مثبت

x		3	
$-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$
x^2+x+3	$+$		$+$
B	$-$	0	$-$

$x^2-9=0 \quad x^2=9 \quad \boxed{x=\pm 3}$

$\boxed{x=\frac{1}{3}}$

x		-3		$\frac{1}{3}$		3	
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
A	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت زیرند :

می‌خوانیم	نامعادله
A کوچک‌تر از B است.	$A<B$
A کوچک‌تر یا مساوی B است.	$A\leq B$
A بزرگ‌تر از B است.	$A>B$
A بزرگ‌تر یا مساوی B است.	$A\geq B$

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم :

۱ــ خاصیت جمع :

برای عبارت‌های جبری A، B و C ، اگر $A<B$ سپس $A+C<B+C$.

۲ــ خاصیت ضرب

الف) اگر $C>0$ و $A>B$ سپس $AC>BC$.

ب) اگر $C<0$ و $A>B$ سپس $AC<BC$.

مثال

نامعادلهٔ $۵x - ۱ \geq ۳x - ۷$ را حل می‌کنیم.

$۵x - ۱ \geq ۳x - ۷$

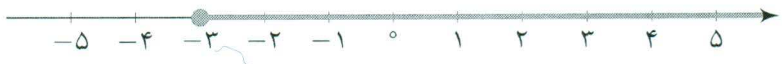
به دو طرف نامعادله، $-۳x$ را اضافه می‌کنیم. $۵x - ۱ - ۳x \geq ۳x - ۷ - ۳x$

$۲x - ۱ \geq -۷$

دو طرف نامعادله را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. $۲x \geq -۶$

$x \geq -۳$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in R \mid x \geq -۳\}$ که با نماد بازه به شکل $[-۳, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

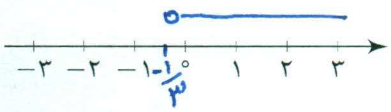


فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

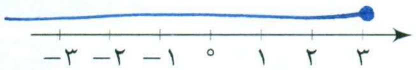
$-۲ < ۳x - ۱ \;,\; ۳x - ۱ \leq ۸$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.



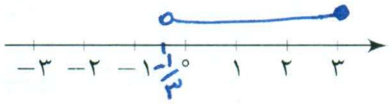
$-۲ < ۳x - ۱ \Rightarrow -۲+۱ < ۳x - ۱ + ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳} \times -۱ < ۳x \times \frac{۱}{۳}$

$-\frac{۱}{۳} < x$



$۳x - ۱ \leq ۸ \Rightarrow ۳x - ۱ + ۱ \leq ۸ + ۱ \rightarrow ۳x \leq ۹ \rightarrow x \leq ۳$

به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانه به‌صورت $-۲ < ۳x - ۱ \leq ۸$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله $+۱$ را اضافه می‌کنیم. $-۲ < ۳x - ۱ \leq ۸$

دو نامعادله را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم. $-۱ < ۳x \leq ۹$

$-\frac{۱}{۳} < x \leq ۳$

جواب به‌دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

نامعادلهٔ دوگانهٔ فوق را به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳x - ۱ > -۲ \\ ۳x - ۱ \leq ۸ \end{cases}$$

$۱۵ \le C \le ۲۵ \longrightarrow ۱۵ \le \frac{۵}{۹}F - ۳۲ \le ۲۵ \longrightarrow ۱۵+۳۲ \le \frac{۵}{۹}F \le ۲۵+۳۲$

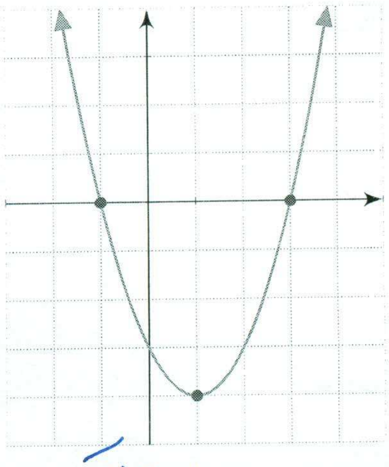
$\frac{۹}{۵}\times ۴۷ \le \frac{۹}{۵}\times\frac{۵}{۹}F \le ۵۷\times\frac{۹}{۵} \longrightarrow \frac{۴۲۳}{۵} \le F \le \frac{۵۱۳}{۵}$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C=\frac{۵}{۹}(F-۳۲)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵ \le C \le ۲۵$ ؛ سپس از رابطهٔ داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست آمده را حل کنید.)

فعالیت

سهمی $y=x^۲-۲x-۳$ را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

برای $-۱ < x < ۳$

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y=x^۲-۲x-۳$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

$x^۲-۲x-۳=۰ \quad (x-۳)(x+۱)=۰$

$x=۳ \quad x=-۱$

		-۱		۳	
y	+	۰	−	۰	+
	$y>۰$		$y<۰$		$y>۰$

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^۲-۲x-۳<۰$ استفاده کرد.

$x^۲-۲x-۳<۰$ یعنی مجموعه مقادیری از x که به ازای آن‌ها $y<۰$ می باشد

پس از روی نمودار جاهایی که $y<۰$ و از روی جدول نیز مقادیر $y<۰$ می شود

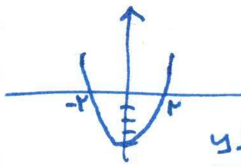
کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^۲ \le ۴$

$x^۲-۴\le ۰ \quad (x-۲)(x+۲)=۰ \quad \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases}$

		-۲		۲	
$x^۲-۴\le۰$	+	۰	−	۰	+
	$y>۰$		$y<۰$		$y>۰$



$y>۰ \longleftarrow x<-۲$

$y<۰ \longleftarrow -۲\le x\le ۲$

$y>۰ \longleftarrow x>۲$

$y=۰ \longleftarrow x=-۲$

$y=۰ \longleftarrow x=۲$

ب) $۳x^۲-x-۲\ge ۰$

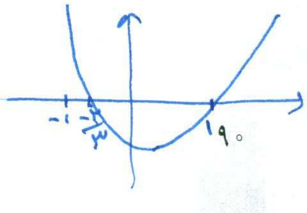
a b c

$\Delta=b^۲-۴ac=۱-۴(۳)(-۲)=۲۵$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱\pm۵}{۶}$

$x=۱ \quad x=-\frac{۲}{۳}$

		$-\frac{۲}{۳}$		۱	
$۳x^۲-x-۲\ge۰$	+	۰	−	۰	+



مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y=x^۲+mx+۱$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مقدار مثبت داشته باشد، باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد. در این عبارت، $a=۱$ و $\Delta=m^۲-۴$ است؛ بنابراین $m^۲-۴<۰$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^۲-۴$ به‌صورت زیر است :

m		-۲		۲	
$m^۲-۴$	+	۰	−	۰	+

بنابراین برای اینکه $m^۲-۴$ منفی باشد، باید $-۲<m<۲$.

مثال

نامعادلهٔ $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^2-9=0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشهٔ معادله $2x+1=0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است . بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x		-3		$-\frac{1}{2}$		3	
x^2-9	+	۰	−		−	۰	+
$2x+1$	−		−	۰	+		+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	−	۰	+	تعریف نشده	−	۰	+

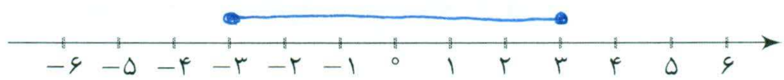
بنابراین اگر $-3 \leq x < -\frac{1}{2}$ و یا $x \geq 3$، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از : $[-3,-\frac{1}{2}) \cup [3,+\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلقی

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|3|=3$ و $|-3|=3$ زیرا فاصلهٔ هردو عدد ۳ و ۳- از مبدأ برابر ۳ است.

فعالیت

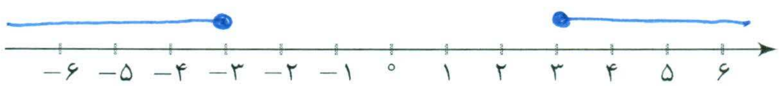
۱ نامعادلهٔ $|x| \leq 3$ رادرنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

[-۳,۳] ....

۲ نامعادلهٔ $|x| \geq 3$ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعهٔ این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

$(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$$\begin{cases} |x| \le 3 \Rightarrow -3 \le x \le 3 \Rightarrow \\ |x| \ge 3 \Rightarrow x \ge 3 \text{ یا } x \le -3 \Rightarrow \end{cases}$$

مجموعه جواب (به شکل بازه) = $[-3,3]$

مجموعه جواب (به شکل بازه) = $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت[1]

۱ــ اگر $|u| \le a$ سپس $-a \le u \le a$.

۲ــ اگر $|u| \ge a$ سپس $u \ge a$ یا $u \le -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف) $|x-3| \le 2$

ب) $|2x-1| > 5$

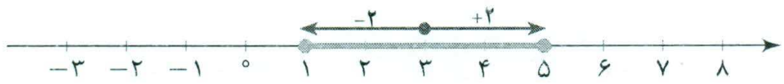
برای حل نامعادلهٔ الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادلهٔ دوگانه تبدیل می کنیم: $-2 \le x-3 \le 2$

اکنون داریم:

$$-2 \le x-3 \le 2 \Rightarrow 1 \le x \le 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازهٔ $[1,5]$ است و نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است.

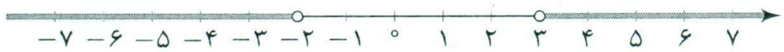
برای حل نامعادلهٔ $|x-3| \le 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1,5]$، مطابق شکل زیر به‌دست می‌آید.



برای حل نامعادلهٔ ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x-1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از: $(-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱ــ در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

الف) $-\frac{2}{3}<\frac{x}{3}+1<\frac{2}{3} \to -\frac{2}{3}-1<\frac{x}{3}<\frac{2}{3}-1 \to -\frac{5}{3}<\frac{x}{3}<-\frac{1}{3} \to -5<x<-1$

$(-5,-1)$

ب) $\begin{cases}5-2x\le -1\\ 5-2x\ge 1\end{cases} \to \begin{cases}-2x\le -6\\ -2x\ge -4\end{cases}$ $\quad x\ge 3 \quad x\le 2$ $\quad (-\infty,2]\cup[3,\infty)$

کار در کلاس

۱) در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{3}+1\right|<\frac{2}{3}$ ↑ بالا

ب) $|5-2x|\ge 1$ ↑ بالا

۲) یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ $(1,9)$ باشد.

$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ $\quad |x-5|<4$

۳) یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ باشد.

$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\ge\frac{b-a}{2}$ $\quad \left|x-\frac{9}{2}\right|\ge\frac{3}{2}$

تمرین

۱) در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1<2x-3\le 3$ صفحه بعد

ب) $x+1\le 5-x<2x+3$ صفحه بعد

پ) $-2<\frac{5-x}{2}<0$ صفحه بعد

ت) $\frac{4-2x}{3x+1}\ge 0$ صفحه بعد

ث) $x(x^2+4)<0$ صفحه بعد

ج) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}\le 0$ صفحه بعد

چ) $|7-2x|<1$ صفحه بعد

ح) $\left|\frac{x-1}{2}-1\right|\ge 3$ صفحه بعد

۲) به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^2+3x+k$ همواره مثبت است؟

$\Delta<0 \quad 9-4(1)k<0 \quad 9<4k \quad \frac{9}{4}<k$

۳) به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=mx^2-mx-1$ همواره پایین محور xهاست؟ صفحه بعد

۴) یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-5t^2+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟ صفحه بعد

۵) تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{15}{8}x^2-30x+200$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول‌اند؟

$\frac{15}{8}x^2-30x+200>110$

$\frac{15}{8}x^2-30x+90>0 \to 15x^2-240x+720>0$

$\Delta=b^2-4ac=(-240)^2-4(15)(720)=57600-43200=14400$

$\sqrt{\Delta}=120$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{240\pm120}{30} \Rightarrow x=\frac{360}{30}=12$

$x=\frac{120}{30}=4$

		4		12	
$15x^2-240x+720$	+	0	−	0	+

$(-\infty,4)\cup(12,\infty)$

خیر تمام جواب‌های بدست آمده قابل قبول نیست چون بنابر تعیین علامت کمتر از ۴ دقیقه و بیشتر از ۱۲ دقیقه است درستی که گفته ۵ دقیقه هم جزء زمان‌های کمتر از ۴ دقیقه می‌باشد که در آن ضربان ۱۱۰ نشده است

تمرین (۱)

الف) $1 < 2x-3 \leq 3 \quad 1+3 < 2x \leq 3+3 \quad 4 < 2x \leq 6 \quad 2 < x \leq 3 \quad (2,3]$

پ) $x(x^2+4)<0$ همواره مثبت

x		0	
x	$-$	0	$+$
x^2+4	$+$		$+$
$x(x^2+4)<0$	$-$	0	$+$

جواب $(-\infty,0)$

ب) $x+1 \leq 5-x < 2x+3$

$$\begin{cases} x+1 \leq 5-x \rightarrow 2x \leq 4 & x \leq 2 \\ 5-x < 2x+3 \rightarrow 2 < 3x & \frac{2}{3} < x \end{cases}$$

$\frac{2}{3} < x \leq 2$ جواب $(\frac{2}{3}, 2]$

ج) $\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+2} \leq 0$

$x^2-2x+2=0$ (a, b, c)

$\Delta = 2^2-4(1)(2)=-4<0$ $\quad \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ همواره مثبت

$x(x^2-1)=0$
$x=0$
$x^2-1=0$
$x^2=1 \quad x=\pm 1$

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{x^3-x}{x^2-2x+2} \leq 0$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$(-\infty,-1] \cup [0,1]$

د) $-2 < \dfrac{5-x}{2} < 0$

$-4 < 5-x < 0 \quad -9 < -x < -5 \quad 5 < x < 9 \quad (5,9)$

ج) $|7-2x|<1$

$-1 < 7-2x < 1 \rightarrow -8 < -2x < -6 \quad 4 > x > 3 \quad (3,4)$

ت) $\dfrac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

$4-2x=0 \quad x=2$

$3x+1=0 \quad x=-\frac{1}{3}$

		$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$(-\frac{1}{3}, 2]$

ح) $\left|\dfrac{x-1}{2}-1\right| \geq 3$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-1 \leq -3 \longrightarrow \frac{x-1}{2} \leq -2 & x-1 \leq -4 & x \leq -3 \\ \frac{x-1}{2}-1 \geq 3 \longrightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4 & x-1 \geq 8 & x \geq 9 \end{cases}$$

جواب $\longrightarrow (-\infty,-3] \cup [9,\infty)$

تمرین (۳)

$y=mx^2-mx-1$

همواره پایین محور x ها یعنی همواره منفی

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m<0 \rightarrow ① \\ m^2+4m<0 \rightarrow (-4,0) \leftarrow ② \end{cases}$$

$m(m+4)=0 \quad m=0, \quad m=-4$

x		-4		0	
$m^2+4m<0$	$+$	0	$-$	0	$+$

$(1) \cap (2)$

جواب $(-4,0)$

تمرین (۴)

$h>13 \quad -5t^2+18t+13>13 \quad -5t^2+18t>0 \quad -t(5t-18)=0$

$t=0$
$t=\frac{18}{5}$

t		0		$\frac{18}{5}$	
$-t$	$+$	0	$-$		$-$
$5t-18$	$-$		$-$	0	$+$
$-5t^2+18t>0$	$-$	0	$+$	0	$-$

$t \in (0, \frac{18}{5})$

بخشی از مطالب انتشار یافته در وب سایت ریاضی دهم

دانش آموز عزیز کافیست روی لینک مورد نظر کلیک کنید

ریاضی دهم

دانلود حل تمرین کتاب هندسه 1 دهم رشته ریاضی چاپ جدید 95 - 96 - سه شنبه 16 شهریور 1395 - 5:24

دانلود حل تمرین کتاب ریاضی دهم رشته انسانی چاپ جدید 95 - 96 - سه شنبه 16 شهریور 1395 - 11:13

دانلود حل تمرین کتاب ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی چاپ جدید 95 - 96 - شنبه 13 شهریور 1395 - 10:39

دانلود کتابهای دهم متوسطه 95-96 - سه شنبه 01 تیر 1395 - 2:50

سرفصلهاي درس هندسه پایه دهم رشته ریاضی - چهارشنبه 02 تیر 1395 - 9:21

سرفصل هاي كتاب رياضي پايه دهم رشته علوم انساني و معارف - چهارشنبه 05 خرداد 1395 - 6:32

سرفصلهاي رياضي دهم رشته ي تجربي و رياضي - دوشنبه 03 خرداد 1395 - 10:28

کاربرگ معادلات درجه 2 مخصوص ریاضی دهم (همه رشته ها) - سه شنبه 24 فروردین 1395 - 11:26