پاسخ تشریحی توسط: مرتضی صفری فرد

۸۶.گزینه ۲ درست است.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}=y\,\vec{i}\\ \vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad u=y\quad,\quad v=-x$$

معادله خطوط جریان:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}\Rightarrow\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}\Rightarrow ydy=-xdx\Rightarrow\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c_1\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=c_2}$$

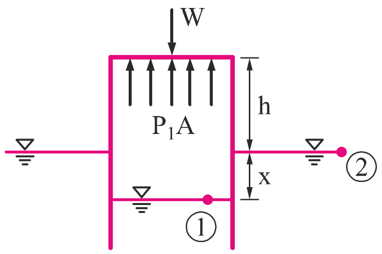
که معادله فوق، معادله دایره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات می‌باشد.

۸۷. گزینه ۱ درست است.

حالت اول:

با صرف‌نظر کردن از نیروی شناوری، تمام وزن استوانه توسط هوای محبوس تحمل می‌شود:

$$W=P_1A\quad\Rightarrow\quad P_1=\frac{20}{0.2}=100\,\text{Pa}$$

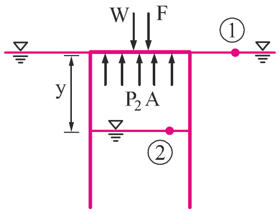


فشار به دست آمده فشار نسبی هوای محبوس در حالت اول می‌باشد، زیرا در محاسبات فوق فشار اتمسفر که از بیرون به کف استوانه وارد می‌شود را صفر در نظر گرفتیم.

حال اگر معادله مانومتری را بین نقاط (1) و (2) بنویسیم داریم:

$$P_1=\gamma x\quad\Rightarrow\quad x=\frac{100}{10^4}=0.01\text{m}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=1\text{cm}}$$

حالت دوم:



در این حالت نیز با صرف‌نظر کردن از نیروی شناوری داریم:

$W+F=P_2A$

مانومتری بین 3 و 1: $\boxed{P_2=\gamma y}$

از طرفی طبق داده سوال، حاصل‌ضرب PV ثابت است، پس:

$$P_1V_1=P_2V_2 \quad\Rightarrow\quad 100\times A(h+x)=(\gamma y)(Ay)$$

که A مساحت مقطع استوانه است.

$$\Rightarrow\quad 100\times(0.24+0.01)=10^4\times y^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=0.05\,m} \quad\Rightarrow\quad P_2=\gamma y=500\,Pa$$

$$W+F=P_2A \quad\Rightarrow\quad F=500\times0.2-20=80N$$

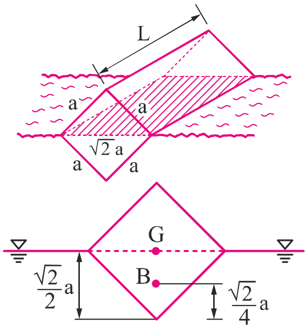
۸۸. گزینه ۲ درست است.

بررسی حالت (۱):

$\forall$ حجم کل جسم و $\forall'$ حجم قسمتی از جسم است که در آب می‌باشد:

$$F_B=W \quad\Rightarrow\quad \gamma_w\forall'=0.5\gamma_w\forall \quad\Rightarrow\quad \forall'=0.5\forall$$

در هر دو حالت ۱ و ۲ جسم تا نیمه در آب فرو می‌رود.



$$MB=\frac{I_{\infty}}{\forall'}$$

I_{oo} مماس اینرسی دوم سطح برش (سطح با مساحت $\sqrt{2}\,a\times L$) حول محوری است که جسم قرار است حول آن دوران کند:

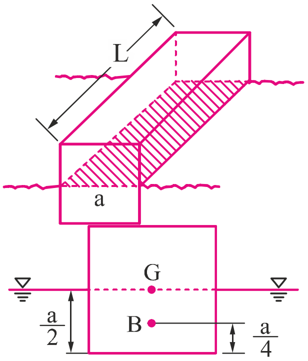
$$MB=\frac{\frac{1}{12}\times L\times\left(\sqrt{2}\,a\right)^3}{\frac{1}{2}a^2\times L}=\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$GB=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

$\Rightarrow\quad MB>GB \quad\Rightarrow$ تعادل پایدار است

بررسی حالت (۲):

در این حالت نیز جسم تا نیمه به داخل آب می‌رود:

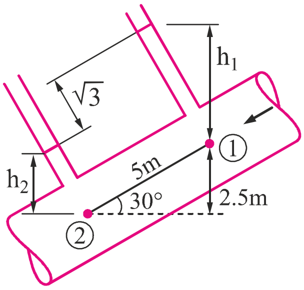


$$MB=\frac{I_{oo}}{V'}=\frac{\frac{1}{12}\times L\times a^3}{\frac{1}{2}\times L\times a^2}=\frac{a}{6}$$

$$GB=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$$

$MB<GB \quad\Rightarrow$ تعادل ناپایدار است:

۸۹.گزینه ۲ درست است.



$$h_f=\frac{4\tau_w}{\gamma}\frac{L}{D}\Rightarrow$$

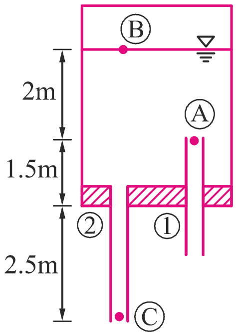
$$\tau_w=h_f\times\frac{\gamma}{4}\times\frac{D}{L}$$

بنابراین باید در ابتدا h_f را بیابیم. معادله انرژی بین نقاط 1 و 2:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f\\ \left.\begin{array}{l}Q_1=Q_2\\A_1=A_2\end{array}\right\}\Rightarrow V_1=V_2\\ z_2=0\quad,\quad z_1=2.5\\ P_1=\gamma h_1\quad,\quad P_2=\gamma h_2\end{array}\right\}\Rightarrow h_f=\frac{P_1-P_2}{\gamma}+2.5=\left(h_1-h_2\right)+2.5=\sqrt{3}\cos30+2.5=4\text{m}$$

$$\Rightarrow h_f=4\text{m}\Rightarrow\tau_w=4\times\frac{8000}{4}\times\frac{0.2}{5}=320\,\text{Pa}$$

۹۰. گزینه ۳ درست است.



معادله مانومتری بین A و B:

$$\overset{0}{\cancel{P_A}}-\gamma(2)=P_B\Rightarrow P_B=-2\gamma$$

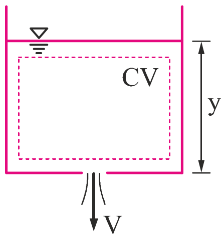
معادله برنولی بین B و C:

$$P_B+\frac{1}{2}\rho\overset{0}{\cancel{V_B^2}}+\gamma\overset{6}{\cancel{z_B}}=\overset{0}{\cancel{P_c}}+\frac{1}{2}\rho V_c^2+\overset{0}{\cancel{\gamma z_c}}$$

$$-2\gamma+6\gamma=\frac{1}{2}\rho V_c^2\Rightarrow\frac{1}{2}\rho V_c^2=4\gamma\Rightarrow V_c=\sqrt{8g}=2\sqrt{2g}$$

لازم به ذکر است که می‌توانستیم از ابتدا معادله برنولی را بین A و C بنویسیم اما هدف این بود که نشان دهیم علت ورود هوا بـه مخزن از نقطه A و خارج نشدن آب از نقطه A این است که فشار هوای محبوس در بالای مخزن از فشار اتمسفر کمتر است.

۹۱.گزینه ۴ درست است.



با نوشتن معادلـه برنـولی بـین سـطح آزاد و خروجـی بـه راحتی می‌توان گفت:

$$\boxed{V=\sqrt{2gy}}$$

معادله پیوستگی (فرم کلی):

$$\frac{\partial m_{cv}}{\partial t}+\sum \dot{m}_{out}-\sum \cancelto{0}{\dot{m}_{in}}=0$$

حجم کنترل نشان داده شده فقط خروجی دارد:

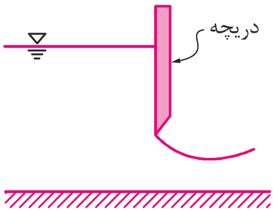
$$\frac{dm_{cv}}{dt}+\dot{m}_{out}=0 \Rightarrow \frac{d(\rho \forall)}{dt}+\rho AV=0 \Rightarrow \rho\frac{d(BLy)}{dt}=-\rho\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{2gy} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-\pi d^2}{4BL}\sqrt{2gy}$$

۹۲. گزینه ۳ درست است.

بُعد توان (P) با بُعد نیرو ضرب در سرعت (FV) برابر است. از طرفی بُعد نیرو با بُعد فشار ضرب در مساحت (PA) یکسان است و بُعد فشار با بُعد ρV^2 یکسان است، پس:

$$[P]=F\times V=PA\times V=\left(\rho V^2\right)L^2\times V \Rightarrow [P]=\rho V^3L^2$$

$$\frac{P_p}{P_m}=\cancelto{1}{\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)}\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^3\left(\frac{Lp}{L_m}\right)^2 \quad (I)$$



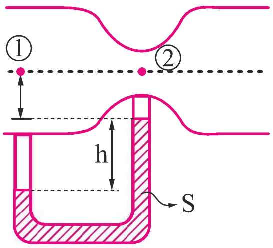
از آن جا که در این مسأله سطح آزاد و امواج سطحی وجود دارد، عدد فرود، عدد بدون بُعد مهم می‌باشد:

$$Fr_m=Fr_p \Rightarrow \frac{V_p}{V_m}=\sqrt{\frac{L_p}{L_m}}=10 \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{P_p}{P_m}=\left(10^3\right)(100)^2 \Rightarrow P_p=(0.002)\times\left(10^3\right)(10)^4 \Rightarrow P_p=20\,kW\left(k\frac{J}{s}\right)$$

۹۳. گزینه ۳ درست است.

با طرف نظر کردن از تلفات $(\tau=0)$ معادله برنولی را بین نقاط 1 و 2 می‌نویسیم:



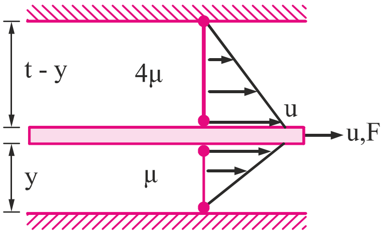
$$\left.\begin{array}{l}\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \\ z_1=z_2 \quad , \quad V_2=4\frac{m}{s} \\ A_1V_1=A_2V_2 \Rightarrow V_1=\frac{A_2}{A_1}\times V_2=1\frac{m}{s}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_1-P_2}{\gamma}=\frac{1}{2g}\left(V_2^2-V_1^2\right) \Rightarrow \boxed{P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\left(V_2^2-V_1^2\right)} \quad (I)$$

با استفاده از معادله مانومتری از طریق مانومتر بین نقاط 1 و 2، (P_1-P_2) را می‌یابیم:

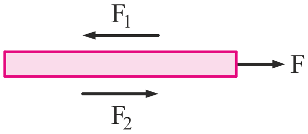
$$P_1+\gamma x+\gamma h-s\gamma h-\gamma x=P_2 \Rightarrow \boxed{P_1-P_2=\gamma h(S-1)} \quad (II)$$

$$(I),(II)\;\Rightarrow\;\gamma h(S-1)=\frac{1}{2}\rho\left(V_2^2-V_1^2\right)\;\Rightarrow\;S=\frac{1}{2gh}\left(V_2^2-V_1^2\right)-1=\frac{1}{20(0.75)}(15)+1=2$$

۹۴.گزینه ۱ درست است.



دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر صفحه متحرک:



$$\sum F=0\;\Rightarrow\;F=F_1+F_2\;\Rightarrow$$

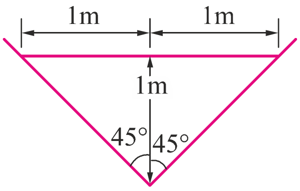
$$F=(\tau_1+\tau_2)A=\left(4\mu\frac{u}{t-y}+\mu\frac{u}{y}\right)A\;\Rightarrow$$

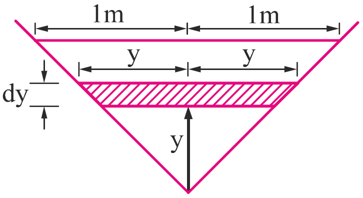
$$F=\mu uA\left(\frac{4}{t-y}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{dF}{dy}=0\;\Rightarrow\;y=\frac{t}{3}$$

۹۵.گزینه ۳ درست است.

المانی مطابق شکل دوم انتخاب می‌کنیم:





$$\alpha=\frac{1}{A}\int\left(\frac{u}{\bar{V}}\right)^3 dA$$

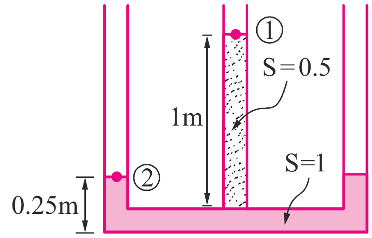
بنابراین در ابتدا باید سرعت متوسط $(\bar{V})$ را به دست آوریم:

$$\bar{V}=\frac{\int udA}{A}=\frac{\int_0^1 ky(2ydy)}{\frac{1\times 2}{2}}\;\Rightarrow\;\bar{V}=\frac{2}{3}k$$

$$\Rightarrow\;\alpha=\frac{1}{\frac{1\times 2}{2}}\int\left(\frac{ky}{\frac{2}{3}k}\right)^3(2ydy)=1.35$$

۹۶. گزینه ۱ درست است.

راه حل اول:



با استفاده از معادله مانومتری بین 1 و 2 داریم:

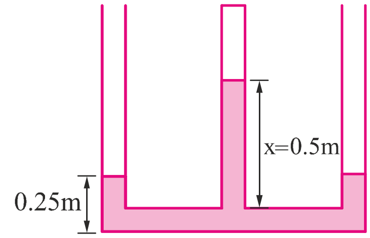
$$P_1 + 0.5\gamma_w \times 1 - \gamma_w \times 0.25 = P_2$$

اگر P_2 را بـه صـورت نـسبی قـرار دهـیم $(P_2 = 0)$، P_1 بـه صورت زیر برابر است با:

$$P_1 = -0.25\gamma_w$$

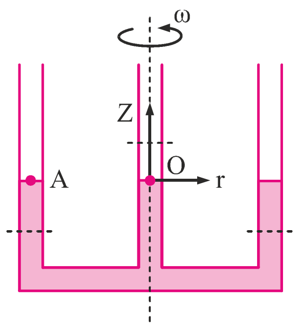
بنابراین به نظر می‌رسد که در این سوال لوله وسطی به اتمسفر راه ندارد، زیرا فشار نسبی در نقطه 1 صفر نشده است. سوالی کـه در ذهن پیش می‌آید این است که چگونه باید متوجه این موضوع شد. پاسخ این است که اگر از روش معادل‌سازی استفاده کنـیم، یعنی به جای مایع موجود در لوله وسط از آب $(S = 1)$ استفاده کنیم تا در تمام لوله‌ها آب داشته باشیم، مـشاهده مـی‌شـود کـه سطح آزاد آب در لوله وسطی با دو لوله کناری یکسان نیست (به شکل زیر توجـه کنیـد). واضـح اسـت کـه 1 متـر از مـایعی بـا $S_1 = 0.5$ با 0.5 متر از آب با $S_2 = 1$ معادل است:

$$(1m) \times S_1 = x \times S_2 \quad \Rightarrow \quad (1m) \times 0.5 = x \times 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.5m$$



با توجه به شکل روبرو می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که لولـه وسطی بسته است و فشاری کم‌تر از فشار اتمسفر دارد (البته به عنوان فرض دیگر می‌توان گفت شاید لوله وسطی باز است و دو لوله کناری فشاری بیش‌تر از اتمسفر دارنـد!! البتـه مـا در ایـن سوال فرض می‌کنیم لوله وسطی بسته است)

در شکل فوق که معادل‌سازی انجام شده است، پس از دوران قرار است سطح آزاد مایعات هر سه لوله در یک تراز باشـد، پـس بـا توجه به یکسان بودن قطر لوله‌ها باید مایع لوله وسطی 0.25 متر پایین بیاید و مایعات لوله‌های کناری هرکدام به انـدازه $\frac{0.25}{2}$ متر یا همان 0.125 متر بالا بیایند.



با توجه به رابطهٔ $P = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 - \gamma z + c$ می‌توان گفت:

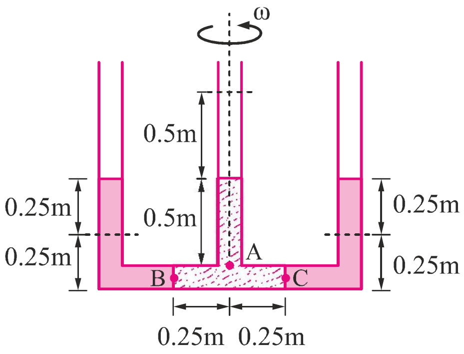
$$P - \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma z = c = \text{constant}$$

است، پس:

$$P_o - \frac{1}{2}\rho \cancelto{0}{r_o^2}\omega^2 + \gamma \cancelto{0}{z_o} = \cancelto{0}{P_A} - \frac{1}{2}\rho r_A^2\omega^2 + \gamma \cancelto{0}{z_A} \rightarrow 0.25\gamma = \frac{1}{2}\rho \times 1^2 \times \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

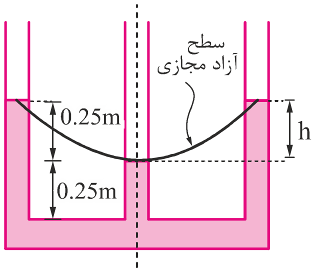
روش دوم:

شکل نهایی سطح آزادها به صورت روبرو خواهد بود. لازم به ذکر است برای این که مایعات در هر سه لوله در یک تراز قرار گیرند لازم است مایع لوله وسط $0.5\,m$ پایین بیاید و مایع لوله‌های کناری هرکدام $0.25\,m$ بالا بروند (زیرا قطر تمام لوله‌ها یکسان است).



حال مایع موجود در لوله وسطی را برداشته و معادل آن آب می‌ریزیم تا مایع موجود در تمام لوله‌ها یکسان شود. ارتفاع آب معادل به این صورت به دست می‌آید که باید فشار x متر آب در نقطه A با فشار $0.5\,m$ متر از مایع موجود (با چگالی نسبی 0.5) در نقطه A برابر باشد.

$$x \times \gamma_w = 0.5 \times (0.5\gamma_w) \Rightarrow x = 0.25\,m$$

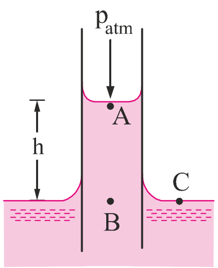


لازم به ذکر است که مایع موجود بین B تا C را که چگالی نسبی 0.5 دارد را نیز می‌توانیم برداریم و آب قرار دهیم (چرا؟)

$$h = \frac{R^2\omega^2}{2g} \Rightarrow 0.25 = \frac{1^2 \times \omega^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

۹۷. گزینه ۴ درست است.



حل: از آن‌جا که سیال در لوله موئین بالا رفته است، سطح آزاد آن در داخل لوله، مقعر خواهد بود. از طرفی می‌دانیم فشار مولکول‌های زیر سطح آزاد (نقطه A) کم‌تر از فشار اتمسفر می‌باشد. هم‌چنین با استفاده از معادله مانومتری بین نقاط B و C می‌دانیم که:

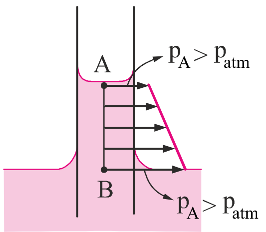
$$p_B = p_C = p_{atm}$$

حال اگر بین نقاط B و A از معادله مانومتری استفاده کنیم داریم:

$$p_B - \gamma h = p_A \xrightarrow{p_B = p_{atm}} p_A = p_{atm} - \gamma h$$

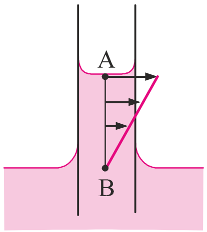
بنابراین بار دیگر به این نتیجه رسیدیم که $p_A < p_{atm}$ می‌باشد. در شکل a توزیع فشار مطلق بر روی خط AB رسم شده است.

برای رسم توزیع فشار نسبی، کافی است از تمام بردارهای فشار شکل روبرو، به اندازه p_{atm} کم کنیم.

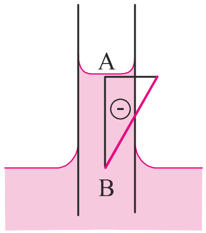


شکل a

از آن‌جا که بزرگ‌ترین بردار فشار در این توزیع فشار مربوط به p_B است که دقیقاً برابر با p_{atm} است، کم کردن p_{atm} از بردارهای فوق باعث صفر شدن فشار نسبی در B و منفی شدن فشار نسبی در بقیه مولکول‌های بالای B می‌شود. بردارهای فشار شکل b همگی منفی هستند، بنابراین از علامت منفی استفاده می‌کنیم و به شکل c می‌رسیم.



شکل b



شکل c

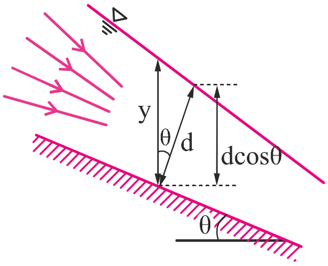
لازم به ذکر است که در یک سیال تراکم‌ناپذیر ($\rho =$ ثابت)، توزیع فشار به صورت خطی است، زیرا:

$$\frac{dp}{dh} = \gamma = \text{ثابت} \quad \Rightarrow \quad p = \gamma h + c \;:\text{توزیع فشار خطی}$$

بنابراین توزیع فشار بین A تا B نیز به صورت خطی خواهد بود.

۹۸.گزینه ۴ درست است.

تا زمانی که خطوط جریان انحنا نداشته باشند، توزیع فشار در امتداد عمود بر کف کانال از رابطهٔ $P = \gamma d\cos\theta$ و در امتداد عمود بر افق از رابطهٔ $P = \gamma y\cos^2\theta$ به دست می‌آید که در هر دو حالت از نوع هیدرواستاتیک است. اما زمانی که خطوط جریان انحنا داشته باشند، به دلیل نیروی جانب مرکز ترم فشار جانب مرکز ($\gamma d\frac{a_n}{g}$ یا همان $\gamma d\frac{r^2\omega^2}{g}$) نیز وارد معادلات فشار می‌شود که توزیع فشار را از حالت هیدرواستاتیک خارج می‌کند.



۹۹.گزینه ۱ درست است.

$$Q = \frac{1}{n} A R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{R = \frac{A}{P}} Q = \frac{1}{n}\frac{A^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{2}{3}}}$$

در حالت (ب)، n و P بیش‌تر از حالت (الف) است، پس با توجه به یکسان بودن A و S در هر دو حالت Q در حالت (الف) بیش‌تر از حالت (ب) می‌باشد.

۱۰۰.گزینه ۲ درست است.

اعماق $y_0 = 4m$ و $y_1 = 1m$ اعماق متناوب می‌باشند، بنابراین:

$$E_0 = E_1 \;\Rightarrow\; y_0 + \frac{q^2}{2gy_0^2} = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} \;\Rightarrow\; \frac{q^2}{2g} = \frac{y_0^2 y_1^2}{y_0 + y_1} = \frac{16}{5} \;\Rightarrow\; \frac{q^2}{g} = \frac{32}{5}$$

طبق رابطه زیر می‌توانیم با داشتن یک عمق پرش، عمق دیگر پرش را به دست آوریم:

$$y_2=-\frac{y_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\frac{2q^2}{gy_1}}\xrightarrow{\frac{q^2}{g}=\frac{32}{5}\ ,\ \ y_1=1}$$

$$y_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{64}{5}}=-0.5+\sqrt{\frac{261}{20}}=0.5+\sqrt{13.05}=3.1$$

۱۰۱.گزینه ۴ درست است.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=\frac{S_0-S_f}{1-Fr^2}\\ &\text{صورت سوال};dx=22dy\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{22}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{22}=\frac{0.001-0.021}{1-Fr^2}\ \Rightarrow\ Fr=1.2$$

بنابراین گزینه‌های ۲ و ۳ رد می‌شوند. از آن جا که $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{22}>0$ است (پروفیل سطح آزاد صعوی است)، گزینه ۱ نیز رد می‌شود و جواب صحیح گزینه ۴ می‌باشد.

۱۰۲. گزینه ۳ درست است.

$$\tau=\gamma RS\xrightarrow{R=y}1=10^4\times1\times S\ \Rightarrow\ S=10^{-4}$$

$$\text{کانال مستطیلی عریض}:q=\frac{1}{n}y^{\frac{5}{3}}S^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{0.01}\times(1)^{\frac{5}{3}}\left(10^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}=1\frac{m^2}{s}$$

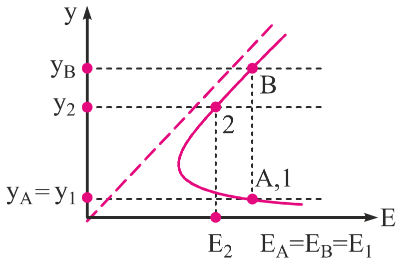
۱۰۳. گزینه ۲ درست است.

در رابطه پیوستگی هنگامی که حجم کنترل متحرک است باید از سرعت نسبی استفاده شود (V_r : سرعت نسبی)

$$y_1V_{r_1}=y_2V_{r_2}\ \Rightarrow\ y_1\left(V_1+V_s\right)=y_2\left(V_2+V_s\right)$$

۱۰۴. گزینه ۱ درست است.

از آن جا که در پرش هیدرولیکی تلفات انرژی وجود دارد پس $E_2<E_1$ می‌باشد و با توجه به شکل روبرو می‌توان گفت $y_2<y_B$ می‌باشد.



۱۰۵. گزینه ۳ درست است.

مقطع با عرض 30 متر را با اندیس 1 و مقطع جریان در محل پایه‌های پل را با اندیس 2 نشان می‌دهیم:

$$b_1=30\,m$$

$$b_2=30-2\times10=10\,m$$

$$q_1=\frac{Q}{b_1}=\frac{90}{30}=3\frac{m^2}{s}$$

$$q_2=\frac{Q}{b_2}=\frac{90}{10}=9\frac{m^2}{s}$$

$$V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{90}{2.5\times 30}=\frac{6}{5}\frac{m}{s}$$

$$Fr_1=\frac{V_1}{\sqrt{gy_1}}=\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{25}}=\frac{6}{25}<1$$

بنابراین در مقطع (1) جریان زیر بحرانی است.

$$E_1=y_1+\frac{V_1^2}{2g}=2.5+\frac{\frac{36}{25}}{20}=2.572\,m$$

$$E_{min_2}=\frac{3}{2}y_{c_2}=\frac{3}{2}\left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(8.1)^{\frac{1}{3}}=3m$$

باتوجه به نمودار زیر واضح است که انسداد رخ داده است $\left(E_1<E_{min_2}\right)$ بنابراین عمق در مقطع 2 با y_{c_2} برابر است با:

$$y_{c_2}=\left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}=(8.1)^{\frac{1}{3}}\approx 2.01$$