فصل هفتم: تحلیل ابعادی

میلاد نادری
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
Naderi.m@aut.ac.ir

پاییز ۹۵

اهداف

۱. فهم ابعاد، یکاها و همگنی ابعاد
۲. درک مزایای تحلیل ابعادی
۳. آشنایی با روش متغیرهای تکراری
۴. درک مفهوم تشابه و چگونگی اعمال آن به مدلسازی نتایج آزمایشگاهی

ابعاد و واحدها

- مرور
  - ابعاد: اندازه یک کمیت فیزیکی مثل طول، زمان، جرم.
  - واحدها: تخصیص یک عدد به یک بعد (m) ، (s) ، (kg)

- ۷ بعد اصلی

۱. جرم	m	(kg)
۲. طول	L	(m)
۳. زمان	t	(sec)
۴. دما	T	(K)
۵. جریان	I	(A)
۶. مقدار نور	C	*(cd)
۷. مقدار ماده	N	(mol)

*Candela

ابعاد و واحدها

- ادامه مرور
  - همه ابعاد دیگر را می توان با ترکیب این ۷ بعد بدست آورد.
  - مثال:
    - {Velocity} = {Length/Time} = {L/t}
    - {Force} = {Mass Length/Time} = $\{mL/t^2\}$

همگونی ابعاد

- قانون همگنی ابعاد: ترم های جمع پذیر داخل یک معادله باید ابعاد مشابه داشته باشند.
- مثال : معادله برنولی

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C$$

- $\{p\} = \{force/area\} = \{mass \times length/time \times 1/length^2\} = \{m/(t^2 L)\}$
- $\{1/2\rho V^2\} = \{mass/length^3 \times (length/time)^2\} = \{m/(t^2 L)\}$
- $\{\rho g z\} = \{mass/length^3 \times length/time^2 \times length\} = \{m/(t^2 L)\}$

بی بعد سازی معادلات

- با داشتن قانون همگنی ابعاد، اگر ما هر ترم در معادله را بر یک مجموعه از متغیرها و ثابت ها که بعد مشابه دارند تقسیم کنیم، معادله به صورت بدون بعد در خواهد آمد.
- اغلب در فرآیند بی بعد سازی یک معادله، پارامترهای بی بعد ظاهر مانند عدد رینولدز و عدد فرود ظاهر می شوند.

بی بعد سازی معادلات

- قدم اول برای بی بعد سازی، مشخص کردن ابعاد اولیه برای همه متغیرها و ثابت های بعد دار می باشد. به عنوان مثال برای بی بعد سازی معادله برنولی:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C$$

{p} = {m/(t²L)} {ρ} = {m/L³} {V} = {L/t}

{g} = {L/t²} {z} = {L}

$$\{p\} = \{m/(t^2L)\} \qquad \{\rho\} = \{m/L^3\} \qquad \{V\} = \{L/t\}$$

$$\{g\} = \{L/t^2\} \qquad \{z\} = \{L\}$$

- سپس ما نیاز خواهیم داشت که پارامترهای مقیاس را انتخاب کنیم. برای این مثال L, U_0, ρ_0 را انتخاب میکنیم.

بی بعد سازی معادلات

- به دقت همه پارامترها را با متغیرهای مقیاس بی بعد می کنیم.

$$p^{\star} = \frac{p}{\rho_0 U_0^2} \qquad \rho^{\star} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad V^{\star} = \frac{V}{U_0}$$

$$g^{\star} = \frac{gL}{U_0^2} \qquad z^{\star} = \frac{z}{L}$$

- پارامترهای *p, ρ, V, g, z* را در معادله اولیه جایگزین میکنیم.

$$\rho_0 U_0^2 p^{\star} + \frac{1}{2}\rho_0 \rho^{\star}\left(U_0^2 V^{\star 2}\right) + \rho_0 \rho^{\star} g^{\star} U_0^2 z^{\star} = C$$

بی بعد سازی معادلات

- طرفین را بر $\rho_0 U_0^2$ تقسیم میکنیم و $\rho^* = 1$ (جریان تراکم ناپذیر) در نظر می گیریم.

$$p^\star + \frac{1}{2}V^{\star 2} + g^\star z^\star = \frac{C}{\rho_0 U_0^2} = C^\star$$

- عدد بی بعد فرود را به صورت $Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}$ تقسیم میکنیم و با جایگذاری $g^* = 1/Fr^2$ در رابطه بالا داریم:

$$p^\star + \frac{1}{2}V^{\star 2} + \frac{1}{Fr^2}z^\star = C^\star$$

بی بعد سازی معادلات

- برای بی بعد سازی فشار از پارامتر بی بعد $1/2\rho_0 U_0^2$ نیز می توان استفاده کرد:

$$p^{\star} = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}$$

- با این بی بعد سازی نتیجه حاصل اندکی متفاوت از معادله بی بعد فوق است:

$$p^{\star} + V^{\star 2} + \frac{2}{Fr^2} z^{\star} = C^{\star}$$

- BE CAREFUL! Always double check definitions.

بی بعد سازی معادلات

- مزایای بی بعد سازی:
  - دید بهتر به پارامترهای کلیدی معادله
  - کاهش تعداد پارامترهای مسئله
    - ارتباط آسان تر
    - آزمایش های کمتر
    - شبیه سازی های کمتر
  - تعمیم نتایج به شرایط تست نشده

تحلیل ابعادی و تشابه

- بی بعد سازی معادلات فقط وقتی مفید است که معادله معلوم باشد.
- در بسیاری از جریانات واقعی، معادلات مجهول هستند و یا حل آنها بسیار دشوار است.
  - *آزمایشات* تنها روش مطمئن بدست آوردن اطلاعات است
  - در بسیاری از آزمایشات مدل های هندسی مقیاس شده استفاده می شوند.
  - شرایط آزمایش و نتایج باید به درستی مقیاس شوند به گونه ای که نتایج برای نمونه واقعی (پروتوتایپ) معنی دار باشند.
  - **تحلیل ابعادی**

تحلیل ابعادی و تشابه

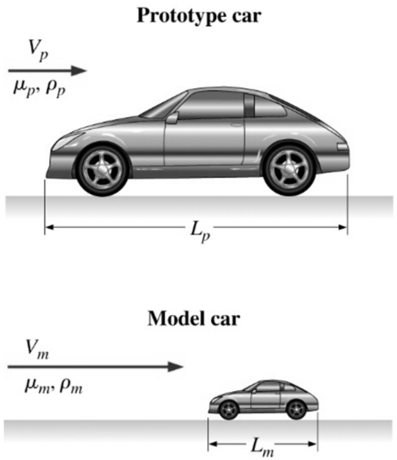
- اهداف اولیه تحلیل ابعادی:
  - ایجاد کردن پارامترهای بدون بعد که در طراحی آزمایشات (فیزیکی / یا عددی) و در گزارش نتایج مفید هستند.
  - برای بدست آوردن قوانین مقیاس به گونه ای که عملکرد پروتوتایپ را بتوان از عملکرد مدل پیشگویی کرد.
  - برای پیشگویی رابطه بین پارامترها.

تحلیل ابعادی و تشابه

- **تشابه هندسی:** مدل باید شکل مشابه پروتوتایپ داشته باشد. هر بعد از مدل باید با فاکتور برابر مقیاس شود.
- **تشابه سینماتیکی:** سرعت هر نقطه در مدل نسبت به سرعت نقطه متناظر در پروتوتایپ باید نسبت مشابهی داشته باشد.
- **تشابه دینامیکی:** همه نیروها در مقیاس مدل با یک فاکتور ثابت به نیروهای متناظر در پروتوتایپ مقیاس شوند.
- **تشابه کامل** زمانی حاصل می شود که هر ۳ شرط فوق رعایت شود. این کار همیشه ممکن نیست.

تحلیل ابعادی و تشابه

- در صورتی که همه گروههای مستقل Π بین مدل و پروتوتایپ برابر باشند، تشابه کامل حاصل
- Π چیست؟
  - ما از حرف یونانی Π برای مشخص نمودن پارامترهای بی بعد مثل عدد رینولدز Re ، عدد فرود Fr ، ضریب درگ C_D و ... استفاده می کنیم.



- آزمایش یک اتوموبیل را در نظر بگیرید.
- نیروی درگ: $F = f(V, \rho, \mu, L)$
- بوسیله تحلیل ابعادی می توانیم مسئله را به فرم زیر کاهش دهیم:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \rightarrow C_D = f(Re)$$

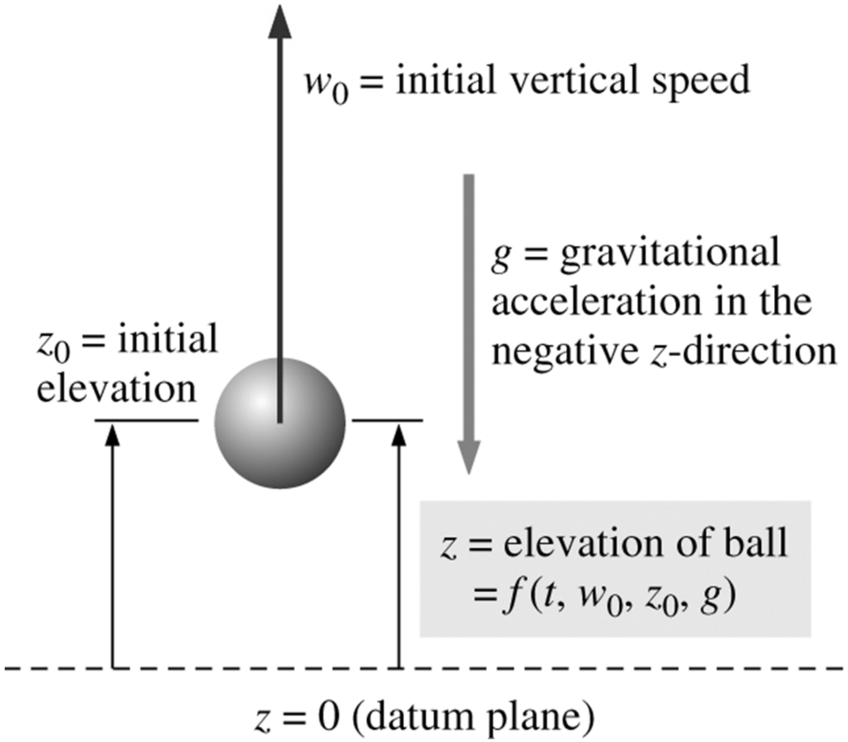
روش متغیرهای تکراری

- پارامترهای بی بعد Π را می توان به چندین روش تولید کرد.

- ما از روش متغیرهای تکراری استفاده می کنیم که ۶ گام زیر را دارد:
  1. لیست نمودن همه پارامترهای مسئله و شمارش تعداد کلی آنها n
  2. لیست کردن ابعاد اولیه هرکدام از n پارامتر.
  3. تنظیم *کاهش* j به عنوان تعداد ابعاد اولیه. محاسبه k تعداد مورد انتظار از Π ها، $k = n - j$
  4. انتخاب پارامترهای تکراری j
  5. ساختن k گروه Π و ضرب کردن آنها در صورت نیاز.
  6. نوشتن رابطه تابع نهایی و بررسی جبری.

مثال

افتادن توپ در خلاء در اثر جاذبه



- گام اول: لیست کردن پارامترهای مرتبط
- $z=f(t,w_0,z_0,g) \Rightarrow n=5$
- گام دوم: ابعاد اولیه هر پارامتر

$$\begin{array}{ccccc} z & t & w_0 & z_0 & g \\ \{L^1\} & \{t^1\} & \{L^1t^{-1}\} & \{L^1\} & \{L^1t^{-2}\} \end{array}$$

- گام سوم: به عنوان یک حدس، j (کاهش) را برابر ۲ در نظر میگیریم که برابر با تعداد ابعاد اولیه (L و t) است. بنابراین تعداد مورد انتظار گروههای Π برابر است با $k=n-j=5-2=3$
- گام چهارم: انتخاب متغیرهای تکراری w_0 و z_0

راهنمایی برای انتخاب پارامترهای تکراری

۱) هیچگاه متغیرهای وابسته را انتخاب نکنید. در غیر اینصورت آنها در همه گروههای Π ظاهر خواهند شد.

۲) نباید از پارامترهای تکراری انتخاب شده بتوان گروه بی بعد تشکیل داد. در غیراینصورت ایجاد سایر گروههای Π غیرممکن خواهد بود.

۳) پارامترهای بی بعد انتخاب شده باید همه ابعاد اصلی را ارائه دهند.

۴) هیچگاه پارامترهایی که قبلا بدون بعد شده اند را انتخاب نکنید.

۵) هیچگاه دو پارامتر با ابعاد مشابه یا ابعادی که فقط در توان اختلاف دارند را انتخاب نکنید.

۶) ثوابت بعد دار را به جای متغیرهای بعد دار انتخاب کنید به گونه ای که فقط یک Π شامل متغیر بعد دار باشد.

۷) پارامترهای مشترک را انتخاب کنید زیرا آنها در هر گروه Π ظاهر می شوند.

۸) پارامترهای ساده را به جای پارامترهای پیچیده انتخاب کنید.

ادامه مثال

- گام ۵: پارامترهای تکراری را با ضرب در هریک از پارامترهای باقیمانده ترکیب کنید تا گروههای Π ایجاد شوند.
- $\Pi_1 = z w_0^{a1} z_0^{b1}$
  - *a1* و *b1* توان های ثابتی هستند که باید محاسبه شوند.
  - با استفاده از ابعاد اولیه تعریف شده در گام ۲ و حل برای محاسبه *a1* و *b1* .

$$\{\Pi_1\} = \{L^0 t^0\} = \{z w_0^{a_1} z_0^{b_1}\} = \{L^1 (L^1 t^{-1})^{a_1} L^{b_1}\}$$

  - معادله زمان:

$$\{t^0\} = \{t^{-a_1}\} \rightarrow 0 = -a_1 \rightarrow a_1 = 0$$

  - معادله طول:

$$\{L^0\} = \{L^1 L^{a_1} L^{b_1}\} \rightarrow 0 = 1 + a_1 + b_1 \rightarrow b_1 = -1 - a_1 \rightarrow b_1 = -1$$

  - نتیجه نهایی:

$$\boxed{\Pi_1 = z w_0^0 z_0^{-1} = \frac{z}{z_0}}$$

ادامه مثال

- ادامه گام ۵
  - مراحل را برای Π_2 با ترکیب پارامترهای تکراری با t مجددا انجام می دهیم.
  - $\Pi_2 = t w_0^{a2} z_0^{b2}$

$$\{\Pi_2\} = \{L^0 t^0\} = \{t w_0^{a_2} z_0^{b_2}\} = \{t^1 (L^1 t^{-1})^{a_2} L^{b_2}\}$$

  - معادله زمان:

$$\{t^0\} = \{t^1 t^{-a_2}\} \rightarrow 0 = 1 - a_2 \rightarrow a_2 = 1$$

  - معادله طول:

$$\{L^0\} = \{L^{a_2} L^{b_2}\} \rightarrow 0 = a_2 + b_2 \rightarrow b_2 = -a_2 \rightarrow b_2 = -1$$

  - نتیجه:

$$\boxed{\Pi_2 = t w_0^1 z_0^{-1} = \frac{w_0 t}{z_0}}$$

ادامه مثال

- ادامه گام ۵
  - مراحل را برای Π_3 با ترکیب پارامترهای تکراری با g مجددا انجام می دهیم.
  - $\Pi_3 = g w_0^{a3} z_0^{b3}$

$$\{\Pi_3\} = \{L^0 t^0\} = \{g w_0^{a_3} z_0^{b_3}\} = \{L^1 t^{-2} (L^1 t^{-1})^{a_3} L^{b_3}\}$$

  - معادله زمان:

$$\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-a_3}\} \rightarrow 0 = -2 - a_3 \rightarrow a_3 = -2$$

  - معادله طول:

$$\{L^0\} = \{L^1 L^{a_3} L^{b_3}\} \rightarrow 0 = 1 + a_3 + b_3 \rightarrow b_3 = -1 - a_3 \rightarrow b_3 = 1$$

  - نتیجه:

$$\boxed{\Pi_3 = g w_0^{-2} z_0^1 = \frac{g z_0}{w_0^2}} \quad \boxed{\Pi_{3,modified} = \left(\frac{g z_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}} = Fr}$$

ادامه مثال

- گام ۶:
  - مجددا بررسی می کنیم که گروههای Π بدون بعد باشند.
  - رابطه تابع بین Π ها را می نویسیم.

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \rightarrow \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}}\right)$$

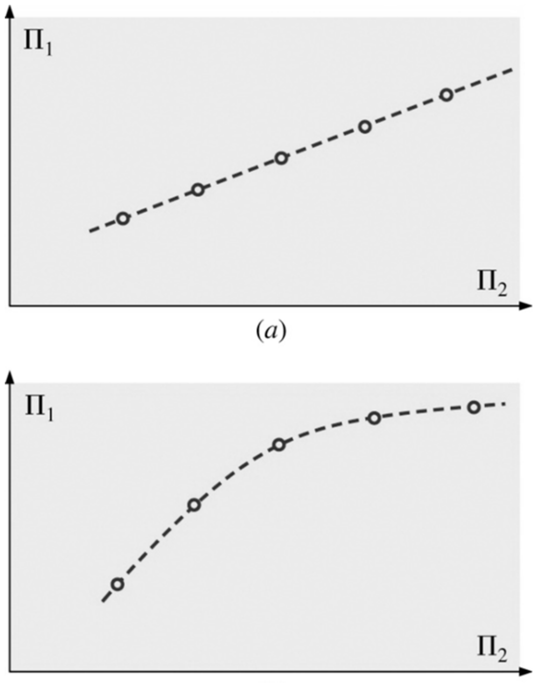
  - و یا بر حسب متغیرهای بدون بعد:

$$z^* = f(t^*, Fr)$$

- نتیجه گیری کلی: روش متغیرهای تکراری به طور مناسبی رابطه بین گروههای بی بعد را تعیین می کند.
- بهرحال این روش نمی تواند فرم دقیق ریاضی این معادله را تعیین کند.

تست های آزمایشگاهی و عدم برقراری تشابه کامل

- یکی از بیشترین کاربردهای تحلیل ابعادی در طراحی فیزیکی و یا عددی آزمایشات است و گزارش نتایج است.
- در حقیقت تحلیل ابعادی در مشخص کردن آزمایشات مورد نیاز و ارتباط بین داده ها کاربرد دارد.



(a)
(b)

- یک مسئله با ۵ پارامتر را در نظر بگیرید: ۱ پارامتر وابسته و ۴ مستقل.
- ماتریس آزمایش کامل در ۵ نقطه مورد نظر برای هر پارامتر مستقل نیازمند $5^4=625$ آزمایش خواهد بود.
- اگر ما بتوانیم آن را به ۲ گروه Π کاهش دهیم، تعداد پارامترهای مستقل از ۴ به ۱ کاهش خواهد یافت که در نتیجه فقط به $5^1=5$ به جای ۶۲۵ آزمایش نیاز خواهد بود.

تست آزمایشگاهی و تشابه ناکامل

ناوشکن DDG-51

مقیاس مدل یک بیستم

- در حوزه هیدرودینامیک شناورها، از برقراری تشابه Fr استفاده می شود اما تشابه Re در نظر گرفته نمی شود.
- چرا؟ به تشابه کامل نگاه کنید.

$$Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m} \rightarrow \frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{V_p}{V_m}$$

$$Fr_p = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} = Fr_m = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} \rightarrow \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2$$

- برای دستیابی به هر دو تشابه Re و *Fr* می بایست ویسکوزیته در تست مدل تابعی از نسبت مقیاس باشد!
- ***این شرایط عملی نیست.***

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}$$

مثال ۱

The drag force F_D on a cylinder of diameter d and length l is to be studied. What functional form relates the dimensionless variables if a fluid with velocity V flows normal to the cylinder?

$$F_D = f(d, l, V, \mu, \rho) \qquad n = 6$$

$$[F_D] = \frac{ML}{T^2} \qquad [V] = \frac{L}{T} \qquad [\mu] = \frac{M}{LT} \qquad [d] = L \qquad [l] = L \qquad [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$J=3$

$$6 - 3 = 3 \ \pi\text{-terms.}$$

متغیرهای تکراری: d, V, and ρ.

مثال ۱

We choose repeating variables with the simplest combinations of dimensions such that they do not form a π-term by themselves (we could not include d and l as repeating variables); the repeating variables are chosen to be d, V, and ρ. These three variables are combined with each of the remaining variables to form the π-terms. Rather than writing equations similar to Eq. 6.2.9 for the π-terms, let us form the π-terms by inspection. When the repeating variables are combined with F_D we observe that only F_D and ρ have the mass dimension; hence F_D must be divided by ρ. Only F_D and V have the time dimension; hence, F_D must be divided by V^2. Thus F_D divided by ρ has L^4 in the numerator; when divided by V^2 this results in L^2 remaining in the numerator. Hence we must have d^2 in the denominator resulting in

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} \qquad \pi_2 = \frac{l}{d}$$

The last π-term results from combining μ with d, V, and ρ. The mass dimension disappears if we divide μ by ρ. The time dimension disappears if we divide μ by V. This leaves one length dimension in the numerator; hence d is needed in the denominator resulting in

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho V d}$$

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \qquad \text{or} \qquad \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{\rho V d}\right)$$

مثال ۲

The rise of liquid in a capillary tube is to be studied. It is anticipated that the rise h will depend on surface tension σ, tube diameter d, liquid specific weight γ, and angle β of attachment between the liquid and tube. Write the functional form of the dimensionless variables.

$$h = f(\sigma, d, \gamma, \beta)$$

$$[h] = L \qquad [\gamma] = \frac{M}{L^2T^2} \qquad [\beta] = 1 \text{ (dimensionless)} \qquad [\sigma] = \frac{M}{T^2} \qquad [d] = L$$

در این مسئله سه بعد M، L و T داریم. آنچه در حل و تعیین درجه کاهش J مهم است این است که این ابعاد آیا مستقل از هم هستند و یا به یکدیگر وابسته می باشند. در این مسئله مشاهده می کنیم که M/T^2 با ترکیب σو γ بوجود می آید. بنابراین در این مسئله M و T مستق از هم نیستند. فقط دو گروه مساقل ابعاد وجود دارند. L وM/T^2 ، بنابراین J=2

مثال ۲

$$\pi_1 = \frac{h}{d}$$

$$\pi_2 = \frac{\gamma d^2}{\sigma}$$

$$\pi_3 = \beta$$

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \qquad \text{or} \qquad \frac{h}{d} = f_1\left(\frac{\gamma d^2}{\sigma}, \beta\right)$$

پارامترهای بی بعد عمومی

یک رابطه کلی بین اختلاف فشار و پارامترهای زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta p = f(l, V, \rho, \mu, g, c, \omega, \sigma)$$

تئوری پی- باکینگهام رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_1\left(\frac{V\rho l}{\mu}, \frac{V^2}{lg}, \frac{V}{c}, \frac{l\omega}{V}, \frac{V^2\rho l}{\sigma}\right)$$

Euler number, $\mathrm{Eu} = \dfrac{\Delta p}{\rho V^2}$

Reynolds number, $\mathrm{Re} = \dfrac{V\rho l}{\mu}$

Froude number[2], $\mathrm{Fr} = \dfrac{V}{\sqrt{lg}}$

Mach number, $\mathrm{M} = \dfrac{V}{c}$

Strouhal number[2], $\mathrm{St} = \dfrac{l\omega}{V}$

Weber number[2], $\mathrm{We} = \dfrac{V^2 l\rho}{\sigma}$

پارامترهای بی بعد عمومی

Parameter	*Expression*	*Flow situations where parameter is important*
Euler number	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$	Flows in which pressure drop is significant: most flow situations
Reynolds number	$\frac{\rho l V}{\mu}$	Flows that are influenced by viscous effects: internal flows, boundary layer flows
Froude number	$\frac{V}{\sqrt{lg}}$	Flows that are influenced by gravity: primarily free surface flows
Mach number	$\frac{V}{c}$	Compressibility is important in these flows, usually if $V > 0.3\ c$
Strouhal number	$\frac{l\omega}{V}$	Flow with an unsteady component that repeats itself periodically
Weber number	$\frac{V^2 l \rho}{\sigma}$	Surface tension influences the flow; flow with an interface may be such a flow

مثال

A test is to be performed on a proposed design for a large pump that is to deliver 1.5 m^3/s of water from a 40-cm-diameter impeller with a pressure rise of 400 kPa. A model with an 8-cm-diameter impeller is to be used. What flow rate should be used and what pressure rise is to be expected? The model fluid is water at the same temperature as the water in the prototype.

For similarity to exist in this confined incompressible flow problem, the Reynolds numbers must be equal; that is,

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

$$\frac{V_m d_m}{\nu_m} = \frac{V_p d_p}{\nu_p}$$

مثال

Recognizing that $\nu_m = \nu_p$ if the temperatures are equal, we see that

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{d_p}{d_m}$$

$$= \frac{0.4}{0.08} = 5$$

The ratio of flow rates is found recognizing that $Q = VA$:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m d_m^2}{V_p d_p^2}$$

$$= 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

Thus we find that

$$Q_m = \frac{Q_p}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

The dimensionless pressure rise is found using the Euler number:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_p$$

Hence the pressure rise for the model is

$$\Delta p_m = \Delta p_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_m^2}{V_p^2}$$

$$= 400 \times 1 \times 5^2 = 10\,000 \text{ kPa}$$