

بہ نام خدا

دیرستان علامہ علی (۱) دورہ اول

جزوہ درس ہندسہ (کل سال)

مدرس: جناب نسیمی

تالیف: انجمن کچ کلاس ۷.۴ و ۷.۵ (گروہ نویسندگان جزوہ کلاس ۷.۴ و ۷.۵)

دیران گروہ ریاضیات: کاہنیر آزما، آرشین فلاح و سامیار سلطانی

# فہرست مطالب

فصل اول: روابط بین پارہ خط ہا: (صفحہ ۴ تا ۵)

فصل دوم: روابط بین زاویہ ہا: (صفحہ ۶)

فصل سوم: قضیہ خطوط موازی و مورب: (صفحہ ۷ تا ۸)

فصل چہارم: مکان ہندسی و رسم: (صفحہ ۹ تا ۱۰)

فصل پنجم: ہمنہشتی: (صفحہ ۱۱ تا ۱۳)

فصل ششم: حجم و مساحت: (صفحہ ۱۴ تا ۱۷)

فصل هفتم: اصل کاوالیری: (صفحه ۱۸)

فصل هشتم: همرسی: (صفحه ۱۹ تا ۲۲)

حق نشر مادی و معنوی این جزوه برای انجمن گنج محفوظ است.



# فصل اول: روابط بین پاره خط ها

## تعاریف:

**نقطه:** یک شکل صفر بعدی در صفحه مختصات.

**خط:** امتداد یک نقطه در یک راستا خط را تشکیل می دهد.

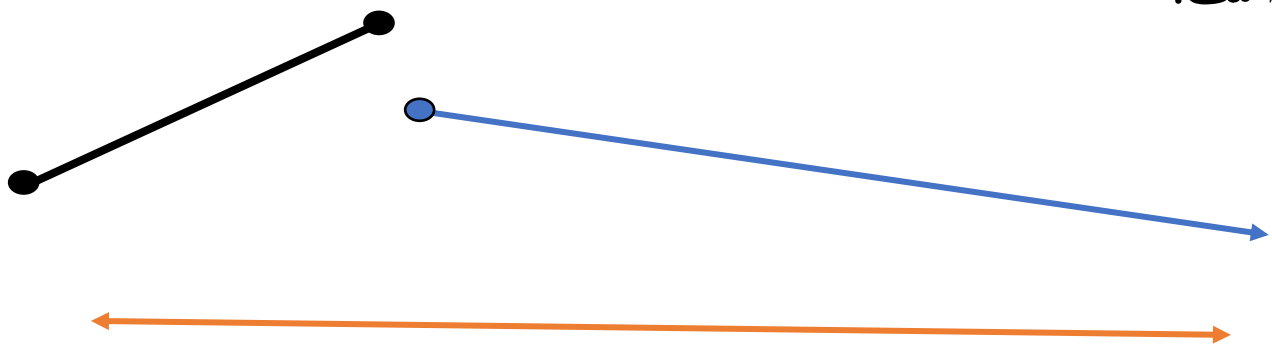
**منحنی:** خطی که دچار خمیدگی است.

**نیم خط:** خط راستی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر تا

بی نهایت ادامه دارد.

**پاره خط:** خط راستی که از دو طرف توسط دو نقطه محدود شده

است.



## روابط بین پاره خط ها:

ممکن است بین طول دو یا چند پاره خط رابطه ای وجود داشته باشد. عموماً در این مبحث باید طول پاره خطی را پیدا یا رابطه ای را اثبات کنیم. بهتر است در تمام این حالت ها استدلال ما باید یک استدلال استنتاجی باشد.

## چگونه اثبات کنیم؟:

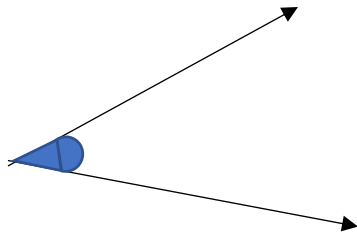
یک مسئله را می توان به دو بخش تقسیم کرد:

۱- حکم مسئله

۲- فرضیات مسئله

حکم خواسته مسئله و فرضیات اطلاعات داده شده توسط مسئله هستند. ما باید بدون تغییر دادن فرضیات با راه و روشی به حکم مورد نظر برسیم. نام این راه استدلال است.

## فصل دوم: روابط بین زاویه ها



### تعاریف:

**زاویه:** مقدار چرخشی بین دو نیم خط وجود دارد زاویه نام دارد.

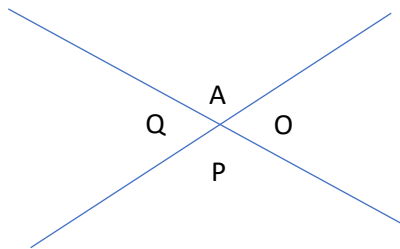
**زوایای متقابل به راس:** زوایایی که راس مشترکی دارند و

متقابل هم هستند زوایای متقابل به راس نام دارند.

**زوایای متمم:** دو زاویه که مجموع آنها ۹۰ درجه می شود.

**زوایای مکمل:** دو زاویه که مجموع آنها ۱۸۰ می شود.

### اثبات برابری زوایای متقابل به راس:



$$O + P = O + A = 180 \rightarrow A = P$$

$$A + Q = A + O = 180 \rightarrow O = Q$$

# فصل سوم: قضیه خطوط موازی و مورب

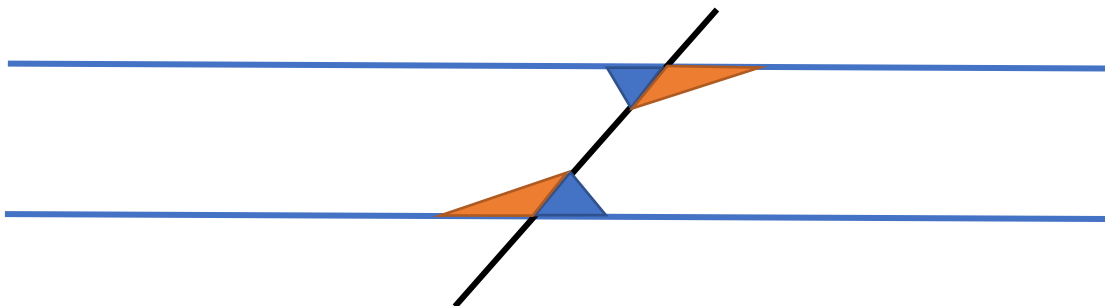
## تعاریف:

**خطوط موازی:** خطوطی که همواره در یک فاصله معین قرار دارند و هیچ وقت بهم برخورد نمی کنند.

**خط مورب:** خطی که با خط مورد نظر موازی نباشد.

## صورت قضیه:

اگر دو خط موازی باشند و خطی مورب آنها باشند زاویه هایی که تشکیل می شوند به صورت Z مانند، باهم برابر هستند.



## عکس قضیه:

اگر خطی مورب دو خط باشد و زاویه های ایجاد شده (به صورت Z مانند) باهم برابر باشند، آنگاه آن دو خط موازی هستند.



## فصل چهارم: مکان هندسی و رسم

### تعاریف:

**مکان هندسی:** مکان هندسی به مجموعه نقاطی می گویند که دارای خصوصیت مشترکی باشند و هر نقطه از مجموعه مرجع (مثلاً خط، صفحه یا فضا) که دارای آن خصوصیت مشترک باشد عضو آن مکان هندسی است.

### چند مثال:

**دایره:** مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه به یک فاصله هستند.

**سهمی:** مکان هندسی نقاطی که اختلاف فواصل آنها از دو کانون برابر باشند.

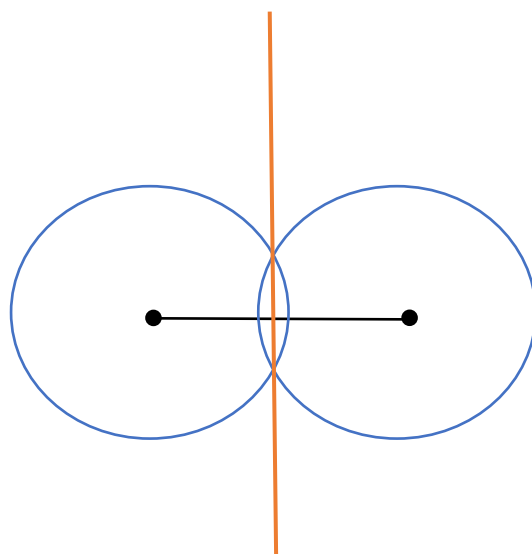
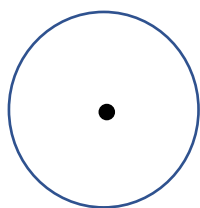
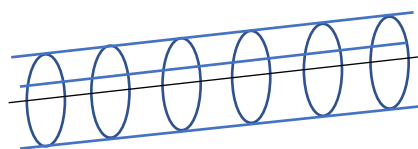
**عمود منصف:** مکان هندسی نقاطی که از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد.

یک خط موازی: مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی به یک فاصله هستند.

استوانه: مکان هندسی نقاطه که از یک پاره خط به یک فاصله هستند.

### چگونه رسم کنیم؟:

با داشتن مکان هندسی یک شکل هندسی می توانیم آن را رسم کنیم. برای مثال برای رسم یک نیم ساز به دو نقطه نیاز داریم که یکی از آنها راس زاویه است و دومی باید نقطه ای باشد که از دو سر زاویه به یک فاصله است سپس باید خطی رسم کنیم که از نقاط رد شود.



## فصل پنجم: همنهستی

### تعاریف:

همنهستی: اگر دو شکل تمام زوایا و تمام اضلاع شان باهم برابر باشد یا اگر بتوان آنها را با تبدیلات هندسی روی هم منطبق کرد، آن دو شکل همنهست هستند.

### تبدیلات هندسی:

در هندسه سه عمل هیچ تغییری در نوع و اندازه و بقیه پارامترهای یک شکل ایجاد نمی کنند (به جز جهت)؛ تقارن، دوران و انتقال. پس اگر شکلی با این سه تبدیل روی شکل دیگری منطبق شود می توان نتیجه گرفت نوع و اندازه اضلاع و زوایای آنها با هم فرقی ندارد پس همنهست هستند.

## همنهستی در مثلث ها:

در مثلث ها سه شرط وجود دارد که اگر برقرار باشند دو مثلث همنهست هستند.

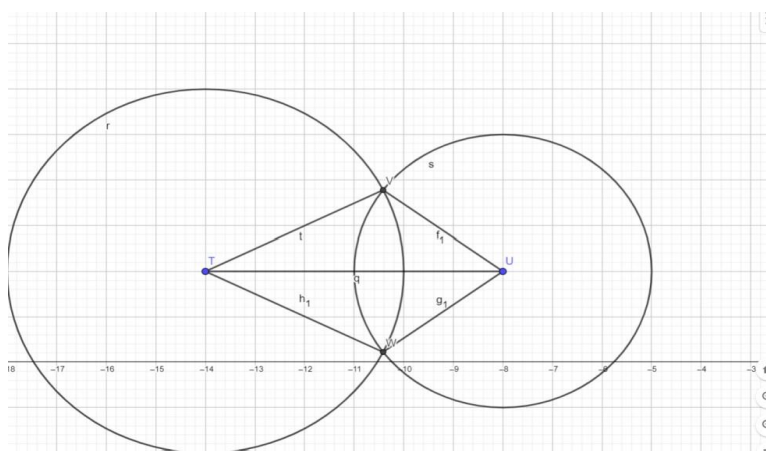
- ۱- سه ضلع برابر داشته باشند.
- ۲- دو ضلع برابر و یک زاویه بین دو ضلع برابر داشته باشند.
- ۳- دو زاویه و یک ضلع بین دو زاویه داشته باشند.

## دلیل یکتایی مثلث ها:

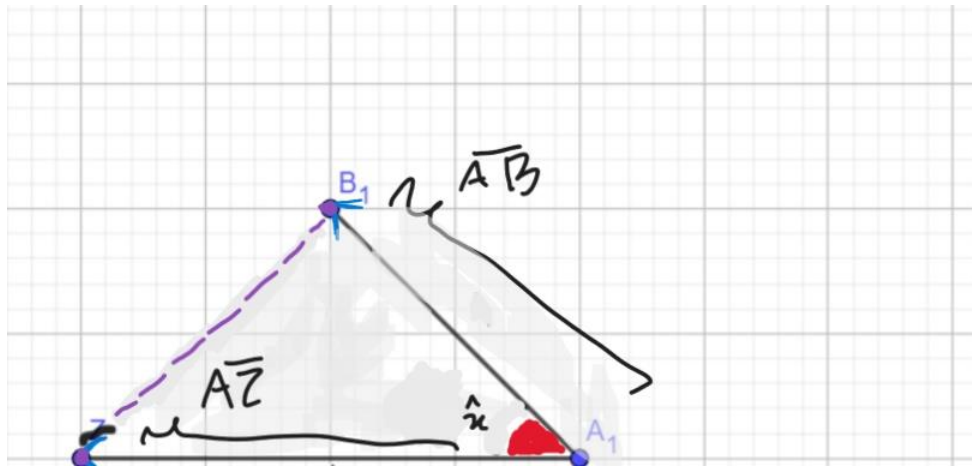
چرا این سه شرط مثلثی یکتا میسازند؟

اثبات به روش رسم:

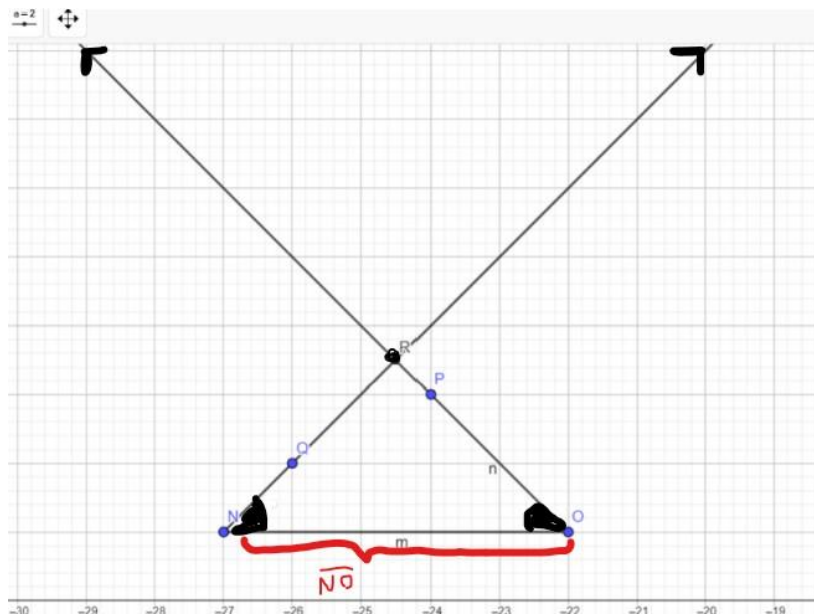
۱- سه ضلع:



۲- دو ضلع و یک زاویه بین:



۳- دو زاویه و یک ضلع:



# فصل ششم: حجم و مساحت

## تعاریف:

**حجم:** فضایی که یک شکل اشغال می کند.

**مساحت:** مقدار سطح یک شکل دو بعدی یا سه بعدی

**محیط:** خطی که یک سطح را دربر میگیرد

## انواع حجم:

۱- منشور:  $sh$

۲- کره:  $\frac{4}{3}\pi r^3$

۳- هرم:  $sh \frac{1}{3}$

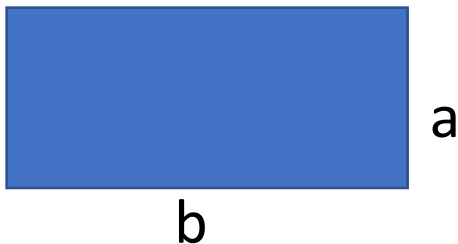
## اجزای یک منشور و روابط بین تعداد آنها:

- ۱- قاعده:  $n$  ضلعی
- ۲- وجه های جانبی:  $n$  عدد
- ۳- یال:  $3n$  عدد
- ۴- راس:  $2n$  عدد

## حجم حاصل از دوران:

بیشترین حجم حاصل از دوران این مستطیل حول محوری است که موازی با طولش است.

کمترین حجم حاصل از دوران این مستطیل حول محوری است که موازی با عرضش است.



(نکته:  $b > a$ )

## بیشترین و کمترین حجم:

بیشترین و کمترین حجم حاصل از دوران حول محوری موازی با

عرض:



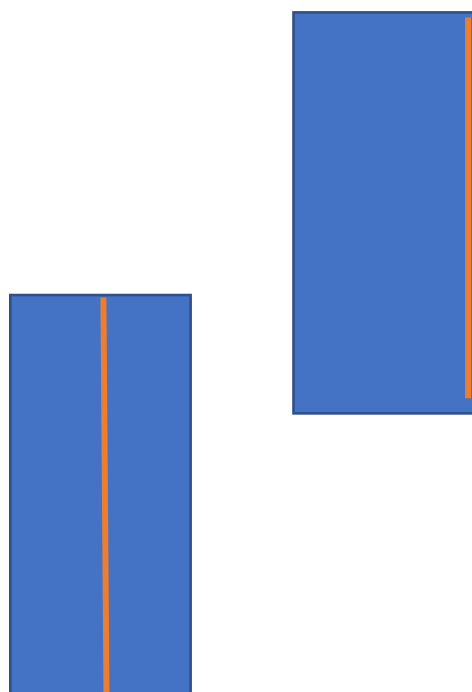
$$a^2 \pi b: \max b$$



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi b: \min b$$

بیشترین و کمترین حجم حاصل از دوران حول محوری موازی با

طول:



$$b^2 \pi a: \max a$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi a: \min a$$



بیشترین و کمترین حجم حاصل از دوران حول هر محوری:

Max a: بیشترین

Min b: کمترین

چه مقادیری می تواند با دوران این مستطیل تشکیل شود؟:

$$(\max a, \min a) \cup (\max b, \min b)$$

از ماکس a تا مین a و مقادیر ماکس b تا مین b

برخی شکل سه بعدی که حاصل از دوران شکلی دو

بعدی است:

استوانه: دوران مستطیل

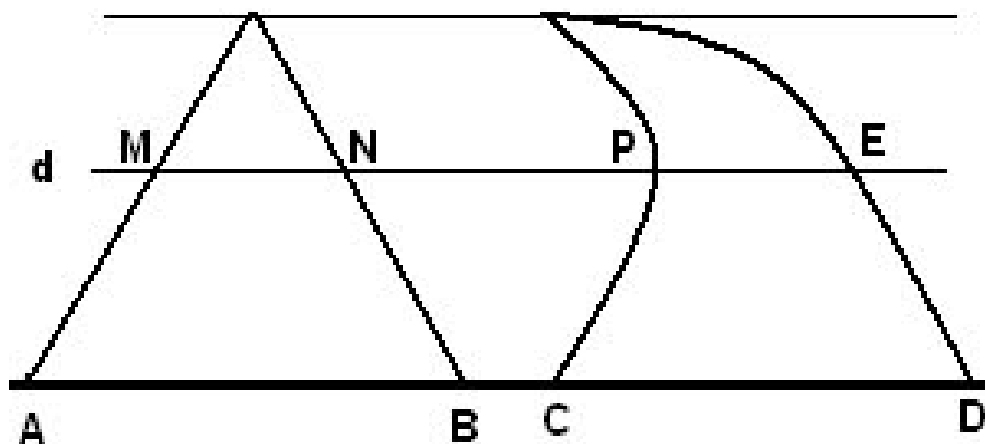
مخروط: دوران مثلث

کره: دوران دایره

## فصل هفتم: اصل کاوالیری

### اصل کاوالیری:

فرض کنید دو ناحیه در یک صفحه یا فضای سه بعدی بین دو خط یا دو صفحه موازی در همان قسمت قرار گرفته‌اند. اگر هر خط یا صفحه ای که موازی دو خط یا دو صفحه دیگر رسم شود، مقطع های برابری برای هر ناحیه بزنند، مساحت یا حجم دو ناحیه برابر است.



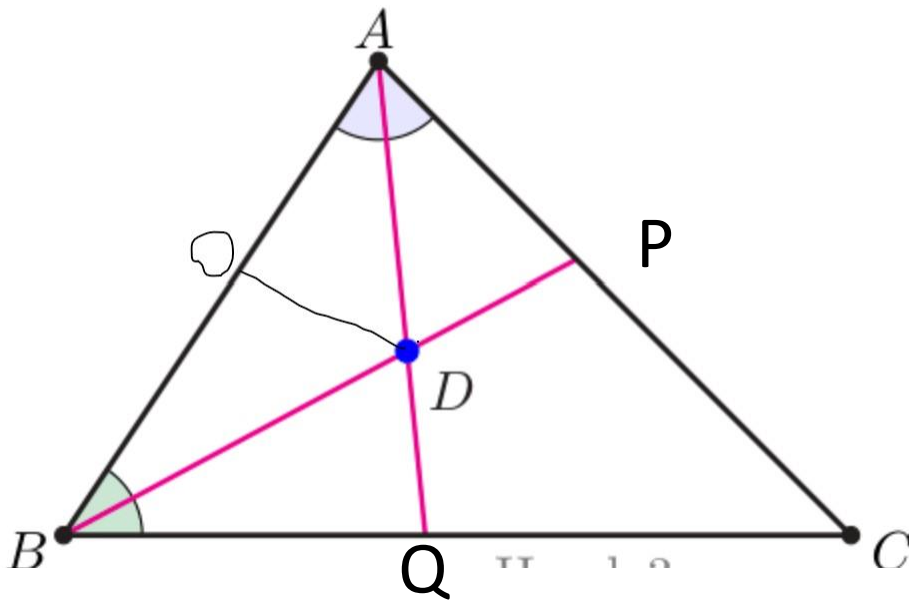
## فصل هشتم: همرسی

### تعاریف:

همرسی: خطوطی که فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند  
خطوط همرس نام دارند.

### اثبات برخی همرسی ها:

همرسی نیم ساز های مثلث:



می دانیم قطاع نیم ساز زاویه A با نیم ساز زاویه B در نقطه D هم‌مرس است آنگاه:

چون D روی نیم ساز A است:

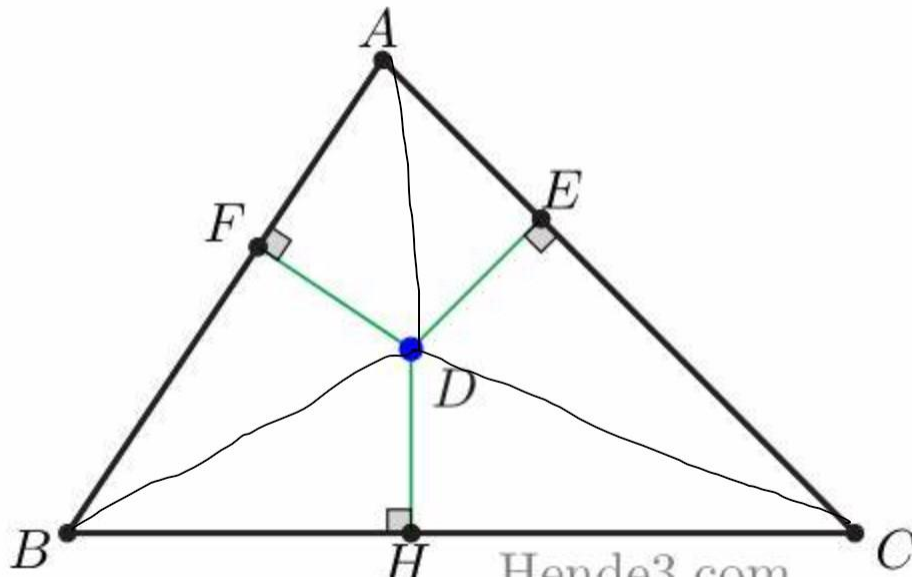
$$PD = OD$$

چون D روی نیم ساز B است:

$$QD = OD$$

در نتیجه  $QD=PD$  و چون این دو پاره خط فاصله نقطه D از دو ضلع زاویه C است آنگاه D روی نیم ساز C قرار دارد.

## همرسی ارتفاع های مثلث:



می دانیم قطعا عمود منصف AB با AC همرس است آنگاه:

چون D روی عمود منصف AB است:

$$AD = BD$$

چون D روی عمود منصف AC است:

$$AD = DC$$

در نتیجه  $DC=BD$  و چون این پاره خط ها فاصله نقطه  $D$  از در دو سر پاره خط  $BC$  است پس  $D$  روی عمود منصف  $BC$  است.

**نکته:** این همرسی ها به کمک مکان هندسی های عمود منصف و نیم ساز اثبات شدند.

