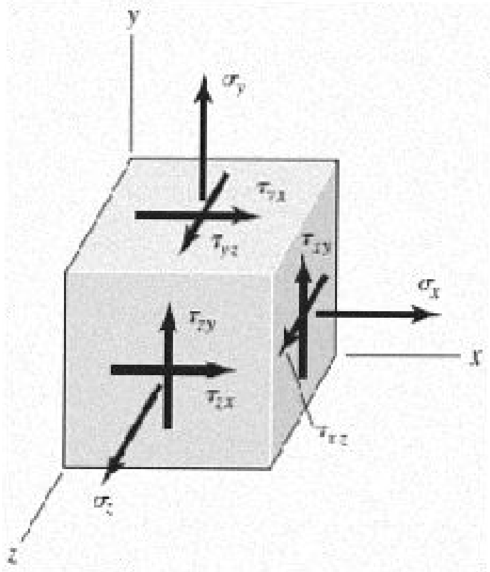
فصل سوم: تحلیل تنش Stress analysis



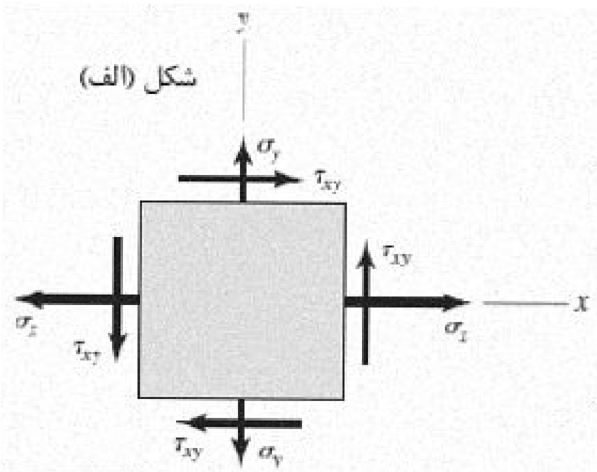
مؤلفه‌های کارتزین تنش

تنشهای عمودی را با σ و تنشهای برشی را با τ نمایش می‌دهیم.

اگر تنش σ بر صفحه‌ای وارد شود که بردار نرمال آن در جهت x باشد آن را با σ_x مشخص می‌کنیم.

برای تنشهای برشی وجود دو زیرنویس ضروری است.

xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxx



قرارداد علامت تنش برشی

اگر جهت نرمال صفحه‌ای که تنش برشی به آن وارد می‌شود و جهت خود تنش برشی هر دو به سمت مثبت مختصات یا هر دو به سمت منفی مختصات باشد تنش برشی مثبت است.

در غیر اینصورت تنش برشی منفی خواهد بود.

xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxxx

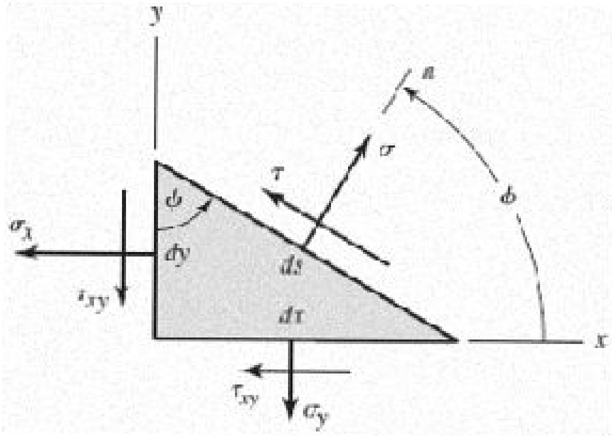
تنش صفحه‌ای

تنش صفحه‌ای حالتی از تنش است که در آن تنشها روی یک صفحه صفر باشند.

شکل (الف) حالت تنش صفحه‌ای است که در آن صفحه z صفحه فاقد تنش است بطوریکه داریم:

(الف)

xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxx



معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای

مطابق شکل المان را با صفحه‌ای اریب که بردار نرمال n آن زاویه پادساعتگرد ϕ با محور x می‌سازد می‌بریم.

تنش نرمال و برشی روی صفحه برش را با σ و τ مشخص می کنیم.

xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxxx

با نوشتن معادلات تعادل برای المان σ و τ بصورت زیر بدست می‌آید:

(۳-۱)

(۳-۲)

این معادلات، معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای نام دارند.

برای بدست آوردن مقادیر اکسترموم σ از معادله (۳-۱) نسبت به ϕ مشتق گرفته و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

(۳-۳)

xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxx

این معادله دو مقدار مشخص برای زاویه $2\phi_p$ تعیین می‌کند: یکی از آنها مربوط تنش نرمال ماکزیمم یعنی σ_1 ، دیگری مربوط به تنش نرمال مینی‌موم یعنی σ_2 است.

این دو تنش تنش‌های اصلی و جهت‌های متناظر با آنها جهت‌های اصلی نامیده می‌شوند.

زاویه بین جهت‌های اصلی 90° است.

مقدار دو تنش اصلی برابر است با:

(۳-۴)

xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx

تنش برشی روی صفحه‌هایی که تنشهای اصلی به آنها وارد می‌گردد برابر صفر است.

به روشی مشابه از معادله (۳-۲) مشتق گرفته و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم تا بدست آید:

(۳-۵)

این معادله دو مقدار $2\phi_s$ را که در آنها تنش برشی ماکزیمم می‌شود تعیین می‌کند.

زاویه بین صفحات حاوی تنشهای برشی ماکزیمم 90° است.

اندازه تنش نرمال روی این دو صفحه برابر است با: $(\sigma_x + \sigma_y)/2$

زاویه بین صفحات حاوی تنش برشی ماکزیمم و صفحات حاوی تنش‌های اصلی برابر $\pm 45^\circ$ است.

مقدار دو تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

(۳-۶)

نکته: مقدار ماکزیمم تنش برشی که با رابطه بالا بدست آمده تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه است که ممکن است برابر با تنش برشی ماکزیمم واقعی در نقطه مورد نظر نباشد.

دایره موهر برای تنش صفحه‌ای

روش گرافیکی بیان روابط بخش قبل استفاده از دایره موهر است.

می‌توان نشان داد که رابطه بین σ و τ معادله دایره‌ای در صفحه است به مرکز:

(۳-۷)

به شعاع:

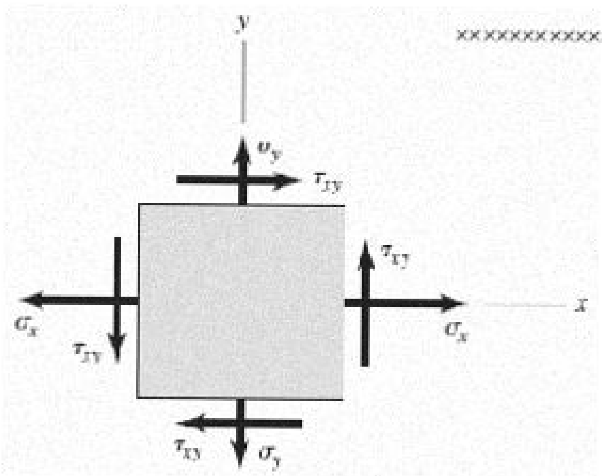
(۳-۸)

مشابه قبل در دایره موهر هم زاویه ϕ در جهت پادساعتگرد مثبت خواهد بود.

قرارداد تنش برشی در دایره موهر

تنشهای برشی که تمایل به چرخاندن ساعتگرد (clockwise "cw") المان دارند بالای محور σ رسم می‌شوند.

توجه: این قرارداد فقط و فقط برای رسم دایره موهر اعتبار دارد و به کار می‌رود. استفاده از این قرارداد برای تعیین مثبت یا منفی بودن تنش برشی معتبر نیست.



×××

در شکل در وجوه عمودی المان، تنش برشی چون تمایل به چرخاندن پادساعتگرد المان دارد پایین محور σ رسم می‌شود.

برای رسم دایره موهر:

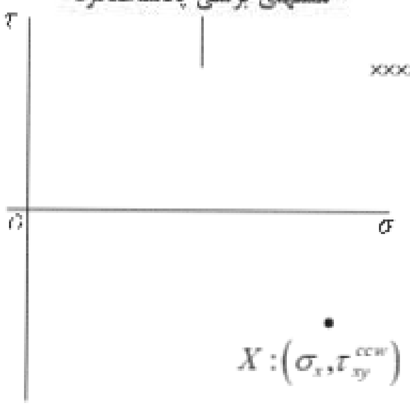
دستگاه مختصاتی تشکیل می‌دهیم که محور افقی آن تنش نرمال σ و محور قائم آن تنش برشی τ باشد.

×××

در محور افقی تنشهای نرمال کششی در سمت راست مبدأ و تنشهای نرمال فشاری در سمت چپ مبدأ رسم می‌شوند.

×××

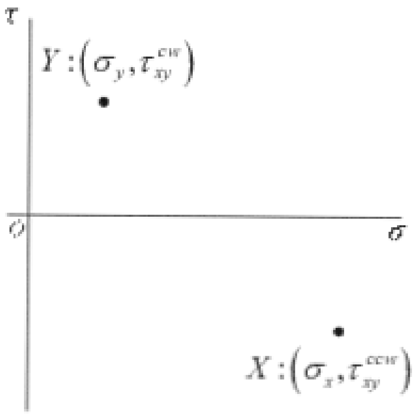
برای رسم دایره موهر ابتدا به وجوه عمودی المان (محور x) توجه می‌کنیم:



چون تنش برشی τ_{xy} در این وجوه می‌خواهد المان را پادساعتگرد بگرداند باید پایین مبدأ رسم شود.

بنابراین نقطه X با مختصات $\left(\sigma_x,\tau_{xy}^{ccw}\right)$ مطابق با شکل در ربع چهارم ترسیم می‌گردد.

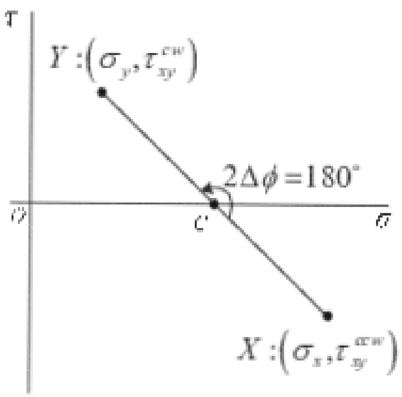
××



سپس به وجوه افقی المان (محور y) توجه می‌کنیم. چون σ_y کششی است پس باید سمت راست مبدأ قرار گیرد.

بنابراین نقطه Y با مختصات $\left(\sigma_y,\tau_{xy}^{cw}\right)$ مطابق با شکل در ربع اول ترسیم می‌گردد.

××

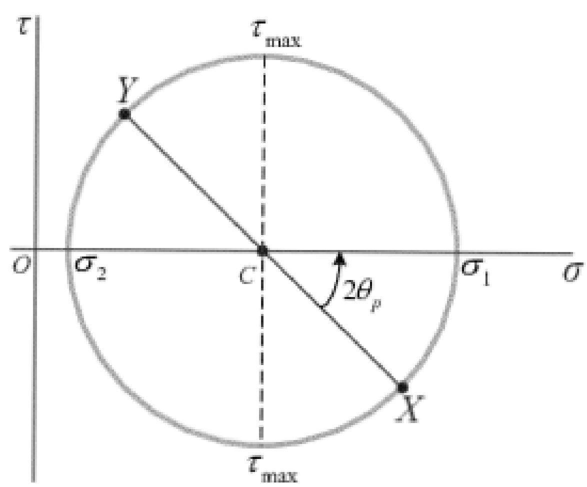


پاره‌خط XY قطر دایره را تشکیل داده و محل برخورد آن با محور σ یعنی نقطه C مرکز دایره خواهد بود.

از آنجا که دو حالت تنش X و Y در المان با هم زاویه $\Delta\phi=90^\circ$ می‌سازند زاویه آنها از هم در دایره موهر برابر $2\Delta\phi=180^\circ$ خواهد بود.

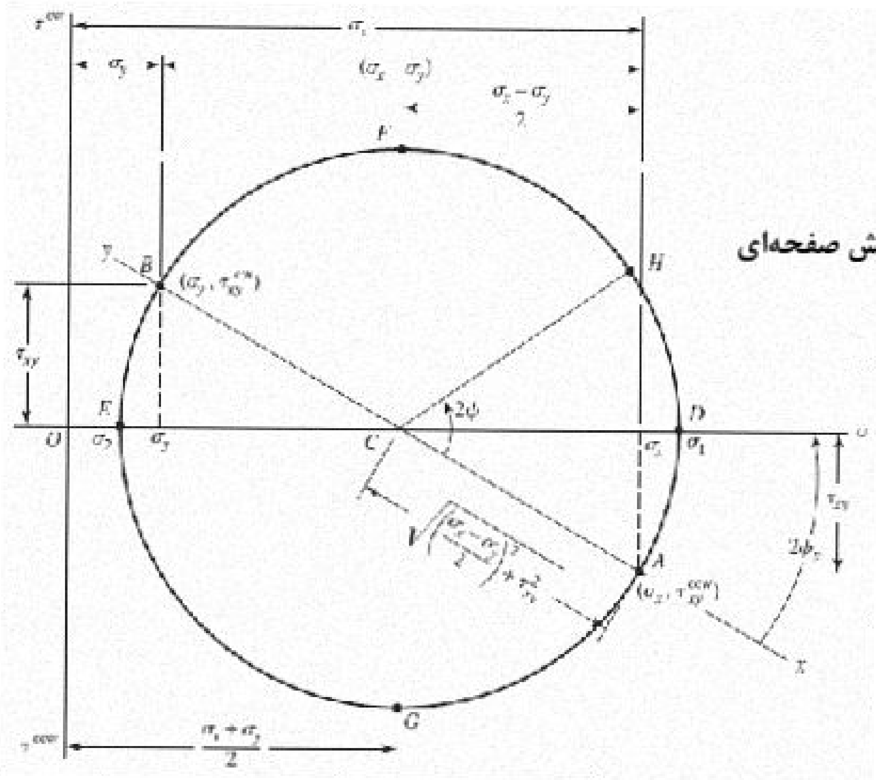
××

σ_1 تنش نرمال ماکزیمم است. σ_2 تنش نرمال مینی‌موم است. τ_{max} تنش برشی ماکزیمم است.



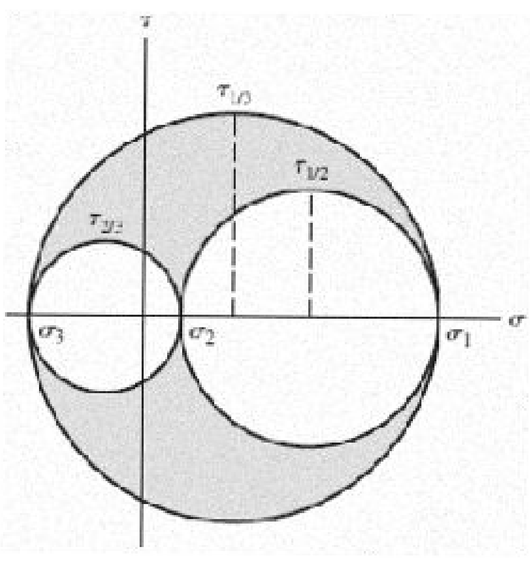
xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxxx xxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxxx

دایره موهر برای حالت تنش صفحه‌ای



xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxx

دایره موهر برای تنش سه‌بعدی



در حالت تنش سه‌بعدی، تنش‌های نرمال اصلی طوری مرتب می‌شوند که داشته باشیم: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

حال دایره‌های موهر مطابق شکل رسم می‌گردند.

سه تنش برشی اصلی یعنی τ_{12} ، τ_{13} و τ_{23} در این شکل نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل این تنش‌ها برابرند با :

(۹-۳)

xxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxx xxxxx xxxxxxx xxxxxx xxxxxxx xxxxxxx

واضح است که اگر تنشهای نرمال اصلی بصورت $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ مرتب شوند $\tau_{13} = \tau_{max}$ خواهد بود.

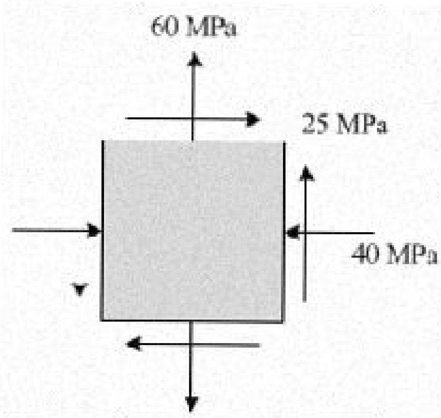
بنابراین برای پرهیز از اشتباه همواره تنشهای اصلی را به این صورت مرتب کنید.

$\tau_{1/3} = \tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ همان تنش برشی ماکزیمم واقعی در نقطه است که در طراحی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

مسائل فصل سوم

مساله ۳-۱- برای حالت تنش زیر صفحات اصلی، تنشهای اصلی و تنش برشی ماکزیمم را تعیین کنید.



(الف): با استفاده از معادلات تبدیل تنش (ب): با استفاده از دایره موهر

حل (الف): با توجه به اینکه تنش نرمال روی وجه x فشاری و روی وجه y کششی است بنابراین $\sigma_x = -40$ MPa و $\sigma_y = +60$ MPa خواهد بود. ضمناً چون تنش برشی روی وجه‌های دارای نرمال مثبت در جهت مثبت مختصات و روی وجه‌های دارای نرمال منفی در جهت منفی مختصات است بنابراین علامت آن مثبت بوده و داریم $\tau_{xy} = +25$ MPa. حال با استفاده از رابطه (۳-۳) داریم:

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times 25}{-40-60} = -0.5 \;\Rightarrow\; 2\phi_p = -26.6^\circ \;\Rightarrow\; \phi_p = -13.3^\circ$$

$$\phi_p = -13.3^\circ + 90 = 76.7^\circ \;\Rightarrow\; \phi_p = -13.3^\circ \;,\; 76.7^\circ$$

اکنون با استفاده از معادله (۳-۴) بدست می‌آید:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-40+60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + 25^2}$$

$$\Rightarrow\; \sigma_1 = 65.9 \text{ MPa} \;,\; \sigma_2 = -45.9 \text{ MPa}$$

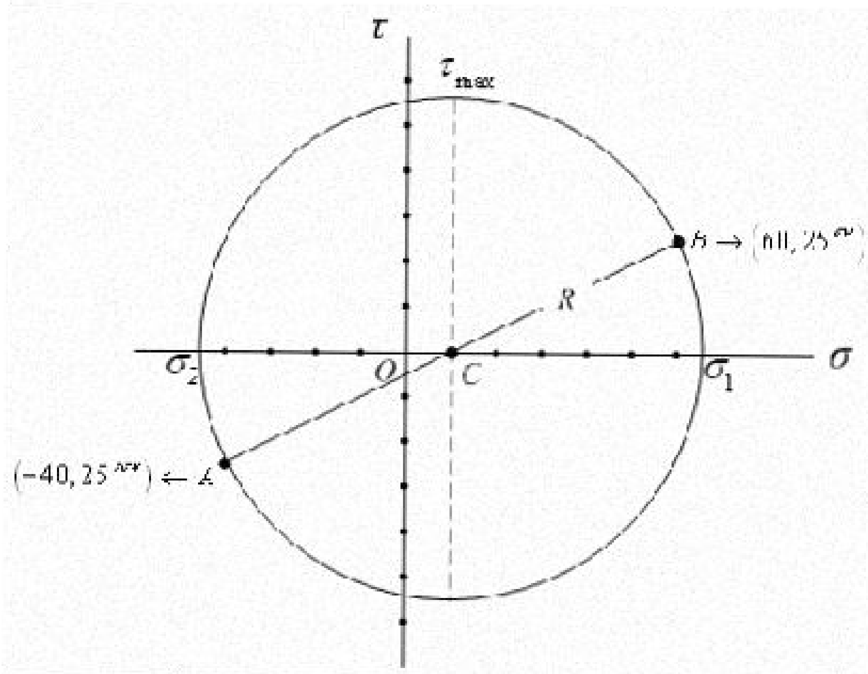
برای یافتن تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه از رابطه (۳-۶) استفاده می‌کنیم:

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + 25^2} = \pm 55.9 \text{ MPa}$$

برای یافتن تنش برشی ماکزیمم خارج از صفحه ابتدا تنشها را بصورت $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ مرتب می‌کنیم. در اینصورت خواهیم داشت: $(\sigma_1 = 65.9) > (\sigma_2 = \sigma_z = 0) > (\sigma_3 = -45.9)$. حال با استفاده از معادله (۳-۹) بدست می‌آید:

$$\tau_{max} = \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{65.9 - (-45.9)}{2} = 55.9 \text{ MPa}$$

همانطور که می‌بینیم تنش برشی ماکزیمم داخل و خارج از صفحه با هم مسلوی بوده و برابر تنش برشی ماکزیمم واقعی هستند.



(ب): ابتدا محورهای σ و τ را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم.

تنشها روی وجوه عمودی یا x المان، تنش نرمال فشاری $\sigma_x = -40$ MPa و تنش برشی $\tau_{xy} = 25$ MPa بصورت پادساعتگرد هستند.

بنابراین نقطه A را با مختصات $A:\left(\sigma_x, \tau_{xy}^{ccw}\right) = \left(-40, 25^{ccw}\right)$ روی نمودار می‌کشیم.

برای وجوه y المان، تنش نرمال کششی $\sigma_y = +60$ MPa و تنش برشی $\tau_{xy} = 25$ MPa بصورت ساعتگرد است. بنابراین نقطه B را با مختصات $B:\left(\sigma_y, \tau_{xy}^{cw}\right) = \left(60, 25^{cw}\right)$ در نمودار مشخص می‌کنیم. حال با وصل کردن نقاط A و B به هم قطر دایره بدست می‌آید که محل برخورد آن با محور σ مرکز دایره یعنی نقطه C خواهد بود. با داشتن مرکز و قطر دایره آن را براحتی رسم می‌کنیم.

چون نقطه C وسط پاره‌خط AB واقع است در نتیجه مختصات آن برابر است با:

$$C:\left(\sigma_C, \tau_C\right) = \left(\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}, \frac{\tau_A + \tau_B}{2}\right) = \left(\frac{-40 + 60}{2}, \frac{-25 + 25}{2}\right) = (10, 0)$$

ضمناً شعاع دایره برابر نصف فاصله دو نقطه A و B است یعنی:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_A - \sigma_B\right)^2 + \left(\tau_A - \tau_B\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-40 - 60)^2 + (-25 - 25)^2} = 55.9$$

مطابق شکل تقاطع دایره با محور σ تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 را تعیین می‌کند. نقاط تقاطع از مرکز دایره یعنی C به اندازه شعاع دایره یعنی R فاصله دارند. بنابراین:

$$\sigma_1 = \sigma_C + R = 10 + 55.9 = 65.9 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = \sigma_C - R = 10 - 55.9 = -45.9 \text{ MPa}$$

مقدار τ_1 و τ_2 برابر شعاع دایره است:

$$\tau_1 = R = 55.9 \text{ MPa} \qquad \tau_2 = -R = -55.9 \text{ MPa}$$

زاویه وجوه x المان از وجوه حاوی تنش اصلی σ_1 برابر با نصف زاویه بین پاره‌خط‌های CA و $C\sigma_1$ است. برای رسیدن از CA به $C\sigma_1$ باید در جهت پادساعتگرد (مثبت) حرکت کنیم بنابراین خواهیم داشت:

$$2\phi_p = 180 - \tan^{-1}\frac{25}{50} = 180 - 26.6 = 153.4^\circ \Rightarrow \phi_p = 76.7^\circ$$

همچنین برای رسیدن از CA به $C\sigma_2$ در دایره موهر باید زاویه $\tan^{-1}\frac{25}{50}$ را در جهت ساعتگرد (منفی) طی کنیم. بنابراین زاویه بین وجوه x و صفحه حاوی تنش اصلی σ_2 در المان برابر است با:

$$2\phi_p = -26.6^\circ \Rightarrow \phi_p = -13.3^\circ$$

بنابراین در کل داریم:

$$\phi_p = -13.3^\circ \;,\; 76.7^\circ$$

صفحات شامل تنشهای برشی ماکزیمم هم در دایره موهر با $C\sigma_1$ زاویه $\pm 90^\circ$ می‌سازند بنابراین در المان این زاویه $\pm 45^\circ$ خواهد بود یعنی:

$$\phi_s = 76.72 \pm 45 = +31.7^\circ \;,\; +121.7^\circ$$

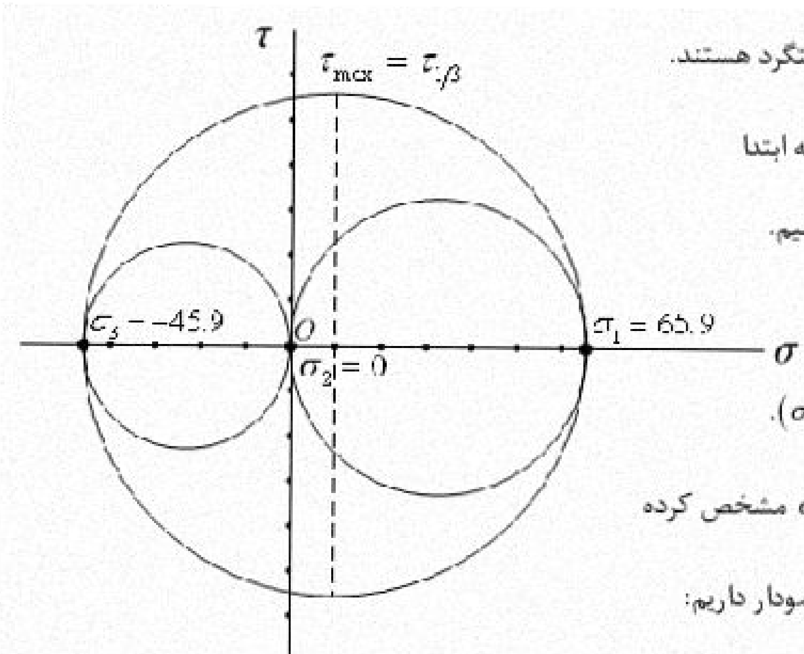
توجه کنید که هر دو زاویه مثبت یعنی پادساعتگرد هستند.

برای یافتن تنش برشی ماکزیمم خارج از صفحه ابتدا تنش‌ها را بصورت $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ مرتب می‌کنیم.

در اینصورت خواهیم داشت:

$$(\sigma_1 = 65.9) > (\sigma_2 = \sigma_z = 0) > (\sigma_3 = -45.9).$$

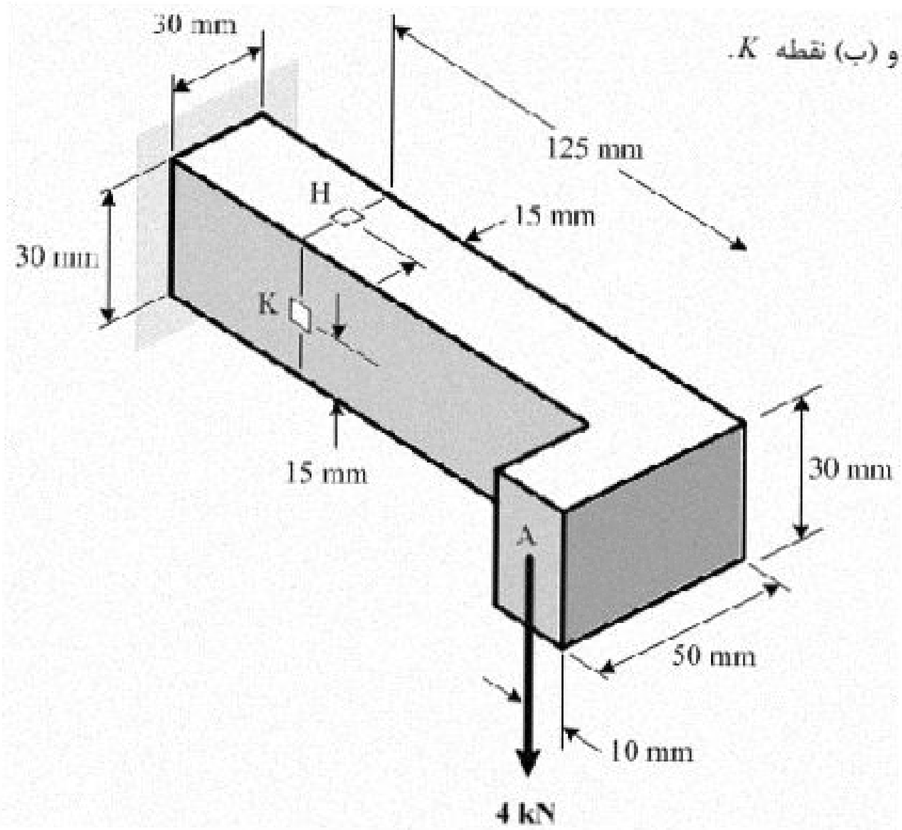
این سه تنش را مطابق شکل زیر روی محور σ مشخص کرده و دایره‌های موهر را رسم می‌کنیم. مطابق با نمودار داریم:



$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{65.9 - (-45.9)}{2} = 55.9 \text{ MPa}$$

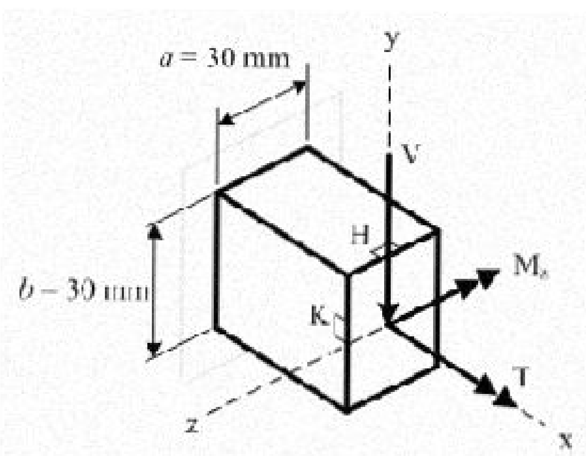
همانطور که می‌بینیم تنش برشی ماکزیمم داخل و خارج از صفحه با هم مساوی بوده و برابر تنش برشی ماکزیمم واقعی هستند.

مساله ۳-۲- بار قائم 4kN در نقطه A از عضو نشان داده شده در شکل وارد می‌گردد. مطلوبست تعیین تنش‌های اصلی و حداکثر تنش برشی در (الف) نقطه H، و (ب) نقطه K.



حل: در نقاط H و K مطابق شکل زیر نیروی عرضی V، ممان خمشی M_z و گشتاور پیچشی T به عضو وارد می‌شود که مقادیر آنها برابر است با:

$V = 4000\ \text{N} \qquad M_z = 4\times10^3\times(125-10)\times10^{-3} = 460\ \text{N.m} \qquad T = 4\times10^3\times(50-15)\times10^{-3} = 140\ \text{N.m}$



ضمن اینکه برای مقطع عضو در این نقاط داریم:

$$I = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{1}{12}\times30\times10^{-3}\times\left(30\times10^{-3}\right)^3 = 67.5\times10^{-9}\ \text{m}^4$$

نیروی عرضی V، ممان خمشی M_z و گشتاور پیچشی T هیچکدام تنش نرمالی در جهت y و z ایجاد نمی‌کنند. بنابراین $\sigma_y = \sigma_z = 0$ است.

(الف): برای نقطه H داریم:

$$Q_z = A\bar{y} = 0\times30\times10^{-3}\times15\times10^{-3} = 0\ \ \text{m}^3 \quad \Rightarrow \quad \tau_V = \frac{VQ_Z}{I_z t} = 0\ \ \text{MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{M_z c}{I_z} = \frac{460\times15\times10^{-3}}{67.5\times10^{-9}} = 102.2\ \ \text{MPa} \qquad \tau_T = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{140}{0.208\times\left(30\times10^{-3}\right)^3} = 24.9\ \ \text{MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_V + \tau_T = 24.9 + 0 = 24.9\ \ \text{MPa} \qquad \sigma_z = 0\ \ \text{MPa}$$

برای این نقطه $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ بوده و شرایط تنش صفحه‌ای برقرار است و می‌توان از معادلات تبدیل صفحه‌ای در صفحه $x-z$ استفاده نمود. اکنون با استفاده از معادله (۳-۴) بدست می‌آید:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{102.2+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{102.2-0}{2}\right)^2 + 24.9^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = 108\ \text{MPa}\ , \quad \sigma_2 = -5.76\ \ \text{MPa}$$

برای یافتن تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه از رابطه (۳-۶) استفاده می‌کنیم:

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{102.2-0}{2}\right)^2 + 24.9^2} = \pm 56.9\ \ \text{MPa}$$

براحتی می‌توان نشان داد تنش برشی ماکزیمم خارج از صفحه هم با این مقدار برابر است.

(ب): برای نقطه K داریم:

$$Q_z = A\bar{y} = a\frac{b}{2}\bar{y} = \left(30\times10^{-3}\times15\times10^{-3}\right)\times7.5\times10^{-3} = 3.375\times10^{-6}\ \ \text{m}^3$$

$$\tau_V = \frac{VQ_Z}{I_z t} = -\frac{4\times10^3\times3.375\times10^{-6}}{67.5\times10^{-9}\times30\times10^{-3}} = -6.67\ \ \text{MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{M_z c}{I_z} = \frac{460\times0}{67.5\times10^{-9}} = 0\ \ \text{MPa}$$

$$\tau_T = -\frac{T}{c_1 ab^2} = -\frac{140}{0.208\times\left(30\times10^{-3}\right)^3} = -24.9\ \ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_V + \tau_T = -24.9 - 6.67 = -31.6\ \ \text{MPa}$$

$$\sigma_z = 0\ \ \text{MPa}$$

c_1 در معادلات بالا مطابق با جدول زیر انتخاب شده است.

برای نقطه K داریم: $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ و در نتیجه شرایط تنش صفحه‌ای برقرار است و می‌توان از معادلات تبدیل صفحه‌ای در صفحه $x-y$ استفاده نمود. اکنون با استفاده از معادله (۳-۴) بدست می‌آید:

$$\sigma_1,\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{0+0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+(-31.6)^2}$$
$$\Rightarrow\quad \sigma_1=31.6\ \text{MPa}\ ,\quad \sigma_2=-31.6\ \text{MPa}$$

برای یافتن تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه از رابطه (۳-۶) استفاده می‌کنیم:

$$\tau_1,\tau_2=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\pm\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+(-31.6)^2}=\pm 31.6\ \text{MPa}$$

براحتی می‌توان نشان داد تنش برشی ماکزیمم خارج از صفحه هم با این مقدار برابر است.

مقدار c_1 و c_2 در روابط $\tau_{\max}=T/\left(c_1ab^2\right)$ و $\theta=Tl/\left(c_2ab^3G\right)$ برای پیچش مقاطع مستطیلی در جدول زیر آمده است (a ضلع بزرگتر و b ضلع کوچکتر مستطیل است).

a/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10	∞
c_1	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
c_2	0.141	0.196	0.214	0.228	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333