

به نام خدای گل و لاله‌ها
تو را دوست دارم با جان و دلم

به نام خدای شما بچه‌ها
به اندازه‌ی آسمان ای خدا
برنامه‌ی کودک - نیمه‌ی دوم دهه‌ی هفتاد

آزمون تئوری سیزدهم^۱

یه روزی دیگه! - ۴ ساعت

پرسش نخست: ۱۰ نمره

کلپسه یک جدول n در n دارد که در هر خانه‌ی آن یک عدد صحیح نوشته است. می‌دانیم که هر عدد در جدول از عدد سمت راست خود بزرگ‌تر و از عدد پایینی خود کوچک‌تر است.

بوزومقره می‌خواهد مکان عدد m را در این جدول بیابد و یا مطمئن شود که این عدد در جدول نیست. برای این کار او می‌تواند از کلپسه تعدادی سؤال بپرسد. هر سؤال به این شکل است که بوزومقره یک خانه از جدول را انتخاب می‌کند و کلپسه عدد آن خانه را به او می‌گوید. روشی ارائه دهید که با استفاده از آن بوزومقره حداکثر $2n$ تا سؤال بپرسد.

پرسش دوم: اگر قسمت ب را حل کنید ۴۰ نمره، اگر ب را حل نکنید ولی آ را حل کنید ۲۰ نمره.

جنگ خونینی بین بوزومقره‌ها و کلپسه‌ها در گرفته است. در یک سناریو از این جنگ، یک دنباله از n جنگ‌جو (از هر دو طرف) در تیررس یک بوزومقره‌ی k -تیرانداز قرار گرفته‌اند. k -تیرانداز می‌تواند تشخیص دهد که هر یک از جنگ‌جویان بوزومقره است یا کلپسه. هم‌چنین او می‌تواند قدرت هر جنگ‌جو (یک عدد صحیح مثبت) را نیز تخمین بزند.

به خاطر سیستم پیچیده و خاص تفنگش، k -تیرانداز می‌تواند یک زیردنباله‌ی متوالی از دنباله‌ی جنگ‌جویان را انتخاب کرده و سپس همه‌ی افراد خارج از این زیردنباله را به همراه حداکثر k نفر از افراد داخل زیردنباله (به انتخاب خودش) بکشد. او می‌خواهد کشتن را به شکلی انجام دهد که مجموع قدرت بوزومقره‌ها از مجموع قدرت کلپسه‌ها بیشتر شود و علاوه بر آن اختلاف این دو مجموع نیز تا جای ممکن زیاد شود.

حال شما باید الگوریتمی ارائه دهید که یا اعلام کند این کار ممکن نیست یا بیش‌ترین اختلاف قدرت ممکن را بیابد.

آ) الگوریتمی از $O(nk^2)$ یا $O(n^2k)$ ارائه دهید.

ب) الگوریتمی از $O(nk)$ ارائه دهید.

پرسش سوم: اگر هر دو قسمت را حل کنید ۵۰ نمره، اگر یکی از دو قسمت را حل کنید ۴۰ نمره.

در حین جنگ خونین بین بوزومقره‌لند و کلپسه‌ستان، کلپسه‌ها به تکنولوژی جدیدی دست یافته‌اند. آن‌ها موفق شده‌اند بین هر دو تا از شهرهایشان یک دیوار لیزری بکشند (به شکل یک پاره‌خط که دو شهر را به هم وصل می‌کند). می‌دانیم که بوزومقره‌ها نمی‌توانند از دیوارهای لیزری رد شوند. [هم‌چنین می‌دانیم که هیچ سه شهری از کلپسه‌ستان هم‌خط نیستند].

کلپسه‌ها می‌دانند که بوزومقره‌ها می‌خواهند از مکانی نامشخص، خارج از قلمروی کلپسه‌ستان، به آن‌ها حمله کنند. به همین دلیل تصمیم گرفته‌اند که در تعدادی از شهرهایشان قوای نظامی مستقر سازند.

آ) سرکلپسه (پادشاه کلپسه‌ها) فکر می‌کند استقرار قوای نظامی در همه‌ی شهرها لازم نیست. در حقیقت او معتقد است قوای نظامی فقط باید در شهرهایی مستقر شود که بوزومقره‌ها می‌توانند به آن‌ها برسند. (راهی برای حمله‌ی احتمالی بوزومقره‌ها به آن شهرها بدون گذر از دیوارهای لیزری وجود دارد.)

الگوریتمی ارائه دهید که با داشتن مختصات دکارتی n شهر کلپسه‌ستان، لیست شهرهایی که باید از قوای نظامی تخلیه شوند را در زمان $O(n \lg n)$ بیابد.

ب) سرکلپسه درجه‌ی امنیت یک شهر را این‌گونه تعریف می‌کند:

حداقل تعداد دیوارهای لیزری که ارتش بوزومقره‌لند باید از آن‌ها بگذرد تا به این شهر برسد.

الگوریتمی از $O(n^2 \lg n)$ بیابید که درجه‌ی امنیت هر شهر را بیابد.

پیروز باشید!