

به نام حضرت دوست

فروردین ماه ۱۳۹۶

اولین آزمون آزمایشی مرحله دوم



II TH IOAA TEAM
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

امیراحسان علیزاده	سینا بلوکی
عباس فروزان نژاد	امیرحسین ستوده فر
زهرا فرهمند	عماد صالحی
علیرضا ملکی	پریمه صفریان
محمد علی نادمی	شایان عزیزی

تذکرات :

- ✓ آزمون شامل ۱۱ سوال است و نمره آن از ۲۵۰ محاسبه می گردد. مدت پیشنهادی آزمون ۴ ساعت است .
- ✓ استفاده از ماشین حسابی که قابل برنامه ریزی نباشد مجاز است ، همچنین تنها از خودکار آبی یا مشکی برای نوشتن راه حل استفاده کنید.
- ✓ پاسخ هر سوال را در قسمتی که در همان سوال در نظر گرفته شده است بنویسید ، در غیر اینصورت نمره ای به راه حل تعلق نخواهد گرفت .

ثوابت نجومی و فیزیکی

6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان - بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-3} K^{-4}$	ثابت تابش	a
6.63×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
1.660539×10^{-27}	kg	واحد جرم اتمی	u
1.6×10^{-19}	J	الکترون ولت	eV
23.5	$^{\circ}$	زاویه تمایل دایره البروج نسبت به استوا	ϵ
68	$Km s^{-1} Mpc^{-1}$	ثابت هابل در زمان کنونی	H_0
3×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$A.U$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	ly
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
-26.78	mag	قدر ظاهری تابش سنجی خورشید	$(m_{bol})_{sun}$
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	M_{earth}
1.90×10^{27}	kg	جرم مشتری	$M_{jupiter}$
5.2	$A.U$	نیم قطر اطول مدار مشتری	$a_{jupiter}$
1	$A.U$	نیم قطر اطول مدار زمین	a_{earth}
10^{11}	M_{sun}	جرم کهکشان راه شیری	M_{GlX}
15	kpc	شعاع دیسک کهکشان راه شیری	R_{disk}
4	kpc	شعاع بالج کهکشان راه شیری	R_{bulge}
10.012937	amu	جرم اتمی ^{10}B	
9.012182	amu	جرم اتمی 9Be	
7.016004	amu	جرم اتمی 7Li	
4.002603	amu	جرم اتمی 4He	
3.016029	amu	جرم اتمی 3He	
2.014102	amu	جرم اتمی 2H	
1.007825	amu	جرم اتمی 1H	
$30.35^{\circ} N, 56.00^{\circ} E$	-	مختصات شهر رفسنجان	

سوال اول (۱۰ نمره)

همانطور که میدانید تا کنون هیچ تمدن فرازمینی یافت نشده است، اما میتوانیم سعی کنیم تعداد آنها را در کهکشان راه شیری برآورد کنیم. فرانک دریک، پیشتاز پروژه های *SETI*، فرمولی برای این تخمین ارائه کرده است:

$$N = R \cdot f_p \cdot N_e \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot L$$

که در این معادله N تعداد تمدن های ارتباط گیرنده در راه شیری است، R نرخ زایش سالانه ستارگان میباشد، f_p کسری از ستارگان است که سیاره دارند، f_i کسری از این سیارات است که حیات هوشمند دارند، f_c کسری از تمدن های هوشمند است که ابزار ارتباط بین ستاره ای را گسترش داده اند و L بازه زمانی بر حسب سال است که چنین تمدن هایی در حال برقراری ارتباط بوده اند.

الف) در فرمول بالا N_e و f_l چه عواملی هستند ؟

ب) طبق شواهد اگر N_e و f_c به ترتیب برابر 0.5 و 1% باشند، N را تخمین بزنید.

حل سوال اول :

ادامه حل سوال اول :

سوال دوم (۱۵ نمره)

در این مسئله قصد داریم دوره تناوب یک آونگ به طول l که جرم m از آن آویزان است را بیابیم.

الف (کمیتی بی بعد همانند C را تعریف کنید و آن را بر حسب کمیت‌های دخیل در این مسئله بنویسید.

ب (این کمیت بی بعدی که به دست آورده‌اید، می‌تواند به صورت تابعی از کمیت بی بعد دامنه اولیه آونگ (ϕ_0) بیان شود. این تابعیت را $f(\phi_0)$ می‌نامیم. با توجه به قسمت قبل، رابطه‌ای برای T (دوره تناوب نوسان آونگ) بیابید.

ج (با بسط $f(\phi_0)$ حول $\phi_0 = 0$ ، رابطه بالا را ساده‌تر کنید.

د (با توجه به حل تحلیلی مسئله (با فرض $\phi_0 \ll 1$)، می‌دانیم که $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ می‌باشد. با توجه به تقارن

مسئله، رابطه قسمت قبل را ساده‌تر کنید و به رابطه روبرو برسید: $T = \sqrt{\frac{l}{g}} [2\pi + \frac{\phi_0^2 f_0''}{2} + \dots]$.

حل سوال دوم :

ادامه حل سوال دوم :

سوال سوم (۲۰ نمره)

ذره‌ای به جرم m در مدار دایروی با تکانه زاویه h_0 در حال گردش به دور یک جرم مرکزی به جرم M می‌باشد. ناگهان بر اثر یک اتفاق، تکانه زاویه‌ای مدار او به اندازه‌ی بسیار کوچک $h_0 \varepsilon$ افزایش می‌ابد؛ یعنی تکانه زاویه‌ای مدار جدید برابر می‌شود با $h_0(1 + \varepsilon)$. این اتفاق طوری رخ داده است که شکل مدار، همچنان دایره باقی مانده است.

الف) تغییر شعاع مدار δr و تغییر انرژی مدار δE را برحسب پارامترهای مسئله (h_0 و M و m) و تا مرتبه اول ε بدست آورید.

ب) اگر بخواهیم این ذره را به مدار ابتدایی باز گردانیم حداقل چه مقدار باید کار انجام دهیم؟

حل سوال سوم :

ادامه حل سوال سوم :

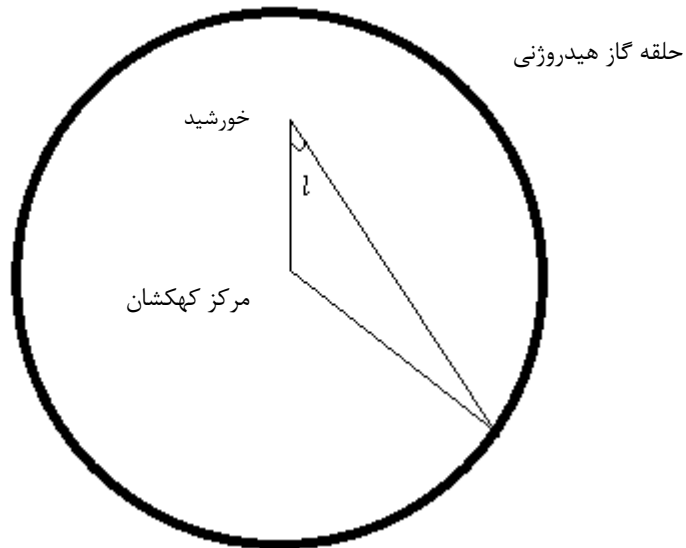
سوال چهارم (۲۰ نمره)

در دیسک کهکشان توده‌هایی از گاز هیدروژن خنثی موجود است که به دور مرکز کهکشان می‌گردند. این گازها به دلیل تغییر جهت اسپین الکترون‌ها تابش می‌کنند. فرض کنید خورشید در فاصله ۸ کیلو پارسیکی از مرکز کهکشان قرار گرفته و سرعت متوسط چرخش کهکشان در آن حوالی را ۲۰۰ کیلومتر بر ثانیه در نظر بگیرید همچنین فرض کنید منحنی چرخش (*rotation curve*) کهکشان در بازه ی بزرگی تخت است.

توزیع گاز در صفحه کهکشان حول مرکز بصورت یک حلقه با شعاع معلوم و ضخامت ناچیز نسبت به شعاع آن است . دو حلقه از این گازها ، یکی به شعاع ۴ و دیگری به شعاع ۱۲ کیلوپارسیک را در نظر بگیرید.

الف) رابطه ای برای انرژی فوتون دریافتی از این توده گازی بر حسب طول کهکشانی l بدست آورید. (طول کهکشانی بصورت پادساعتگرد از مرکز کهکشان تعریف می‌شود.)

ب) در چه طول های کهکشانی رابطه بالا اکستریم (کمینه یا بیشینه) است ؟ مقادیر انرژی مربوط به این طولها را محاسبه کنید.

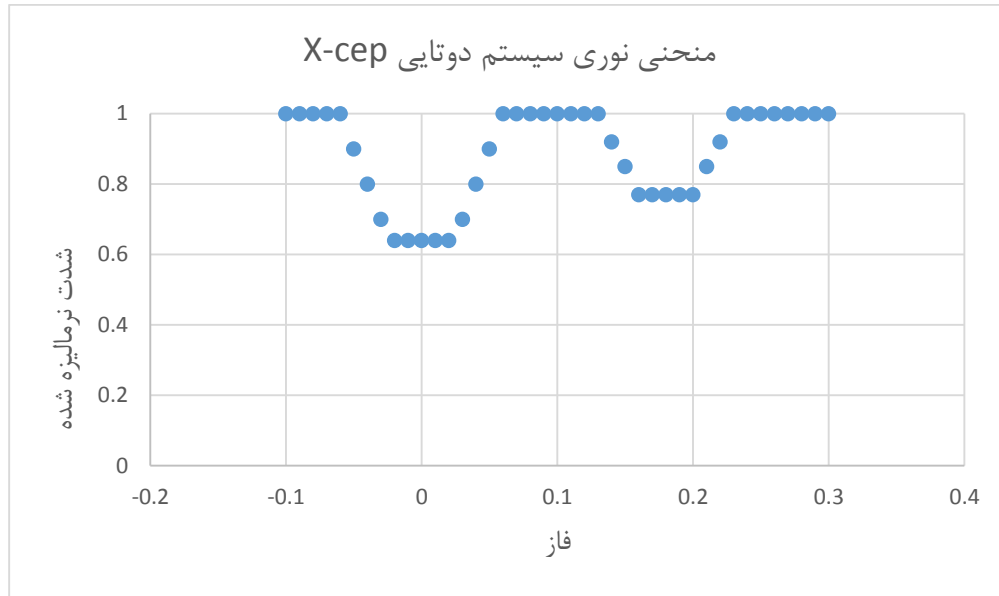


حل سوال چهارم :

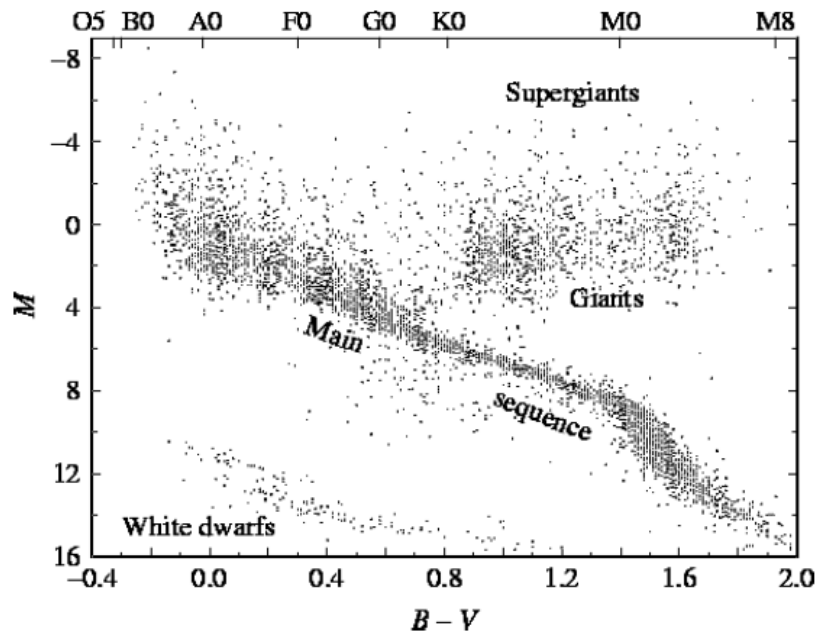
ادامه حل سوال چهارم :

سوال پنجم (۲۰ نمره)

شکل زیر منحنی نوری سیستم دوتایی ستاره $X - Cep$ را نشان می‌دهد. از روی رصد ستاره اصلی این دوتایی مشاهده شد که $B - V$ مربوط به آن برابر ۱,۶۳ است، با استفاده از منحنی نوری و نمودار $H - R$ قدر مطلق دو ستاره و نوع این دو ستاره را تعیین کنید.



(نمودار H-R)



حل سوال پنجم :

ادامه حل سوال پنجم :

سوال ششم (۲۰ نمره)

بیشترین ارتفاع ممکن برای ستاره ای که عرض دایره البروجی و میل برابر داشته باشد در زمان نجومی ۳ ساعت برای ناظر عرض جغرافیایی ۴۰ درجه شمالی چقدر است ؟

حل سوال ششم :

ادامه حل سوال ششم :

سوال هفتم (۲۵ نمره)

یک هرم چهاروجهی منتظم در شهری با عرض φ قرار دارد. سه راس روی زمین هرم را با حروف A, B, C و راسی که بر روی زمین قرار ندارد را با حرف D نشان میدهیم. ناظر ۱ بر روی وجه ABD و ناظر ۲ بر روی وجه BCD دراز کشیده اند.

در روزی، ناظر ۱ خورشید را در تمام روز بر روی افق خود مشاهده میکند که در زمان t_1 طلوع و در زمان t_2 غروب میکند.

در زمان t_3 ناظر ۲ خورشید را در حال غروب میبیند.

الف) تاریخ این روز را بیابید.

ب) عرض جغرافیایی محل را بیابید.

ج) جهت شمال چه زاویه ای با نیم سازه راس A در وجه روی زمین میسازد؟

د) خورشید با چه زاویه ای با افق برای ناظر ۲ غروب میکند؟

ه) نسبت $\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}$ را بیابید.

حل سوال هفتم :

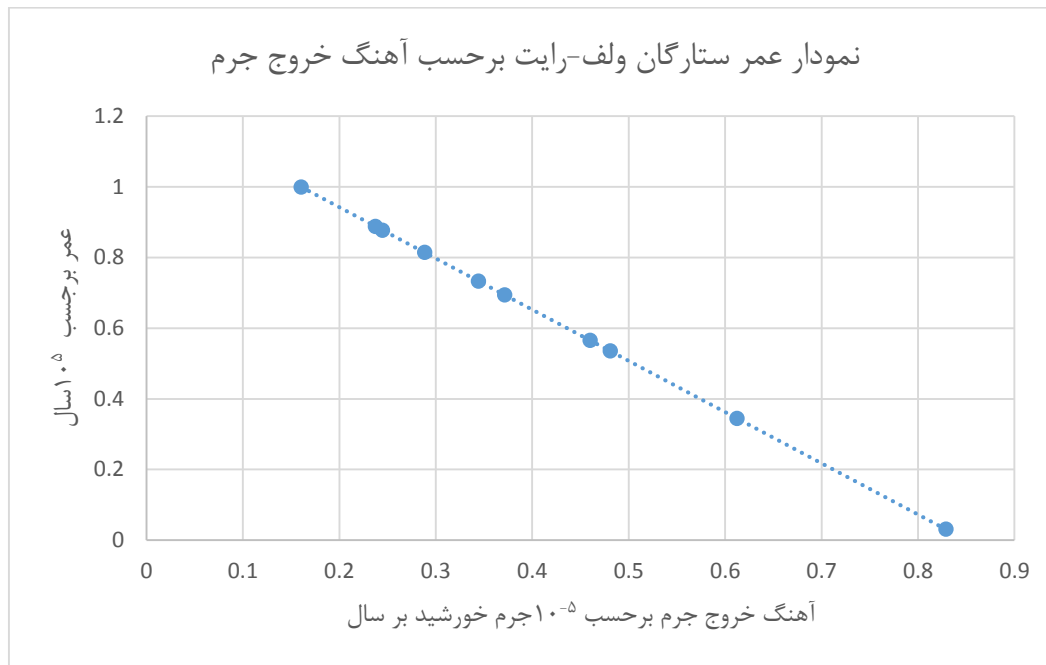
ادامه حل سوال هفتم :

ادامه حل سوال هفتم :

سوال هشتم (۲۵ نمره)

الف) از مشاهده سحابی $M1 - 67$ چنین استخراج می شود که در اثر خروج جرم از یک ستاره پرجرم ولف - راییت تشکیل شده است داده های اخترسنجی نشان می دهد در فاصله حدود 121 ± 14 واحد نجومی از ستاره ، مقدار چگالی جرمی برابر $(1.52 \pm 0.21) \times 10^{-16} kg/m^3$ می باشد. در صورتی که آهنگ خروج جرم از این ستاره $(5.3 \pm 1.1) \times 10^{-6} \frac{M_{Sun}}{yr}$ باشد ، مقدار سرعت باد ستاره ای را به همراه خطا تعیین کنید.

ب) مشاهده کرده ایم که که قطر زاویه این سحابی برابر 26.7 ± 2.1 دقیقه قوسی است . با فرض آنکه سرعت انبساط این سحابی در طول زمان ثابت و برابر مقداری است که در قسمت الف بدست آوردیم، با استفاده از نمودار عمر برحسب آهنگ خروج جرم ، فاصله این سحابی از ما را به همراه خطا بدست آورید. (از خطای شیب و عرض از مبدا صرف نظر کنید)



حل سوال هشتم :

ادامه حل سوال هشتم :

واکنش	انرژی نوترینوی آزاد شده توسط هر واکنش (مگا الکترون ولت)
$p + p \rightarrow {}^2\text{D} + e^+ + \nu$	≈ 0.3
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu$	≈ 0.8
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	≈ 7.4

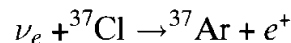
جدول ۱

با استفاده از اطلاعات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف) انرژی آزاد شده توسط هر واکنش بین فرآورده‌های آن تقسیم می‌شود. برای واکنش‌هایی که در آنها نوترینو و پوزیترون آزاد می‌شود بخشی از انرژی آزاد شده به انرژی جنبشی پوزیترون و بخشی به صورت نوترینو آزاد می‌شود. انرژی آزاد شده توسط نوترینوها بدون هیچ برهمکنشی از ستاره خارج می‌شود اما پوزیترون تولید شده بلافاصله با یک الکترون آزاد برهمکنش کرده و فوتون حاصل می‌شود و فوتون آزاد شده صرف افزایش انرژی درونی ستاره می‌شود. با استفاده از شکل ۱ و جدول ۱ انرژی موثر هر شاخه چرخه هیدروژن سوزی P-P را محاسبه کنید. انرژی موثر مقدار انرژی‌ای است که صرف افزایش انرژی درونی می‌شود. (جرم عناصر مورد نیاز در جدول ثوابت موجود می‌باشد.)

ب) طبق مدل استاندارد خورشید ، از کل زمان مربوط به زنجیره پروتون-پروتون در خورشید ، ۸۵٪ مربوط به شاخه I ، ۱۵٪ مربوط به شاخه II و ۰٫۰۲٪ مربوط به شاخه III می‌باشد. (به ازای یک همجوشی پروتون پروتون سهم هر شاخه اینگونه تقسیم می‌شود) حال با استفاده از نتایج قسمت قبل و با استفاده از شکل ۱ ، آهنگ نوترینو‌هایی که در واحد سطح از زمین عبور می‌کنند را بدست آورید.

ج) برای آشکارسازی نوترینو‌های خورشیدی اولین بار از منابع گالن‌های چند تنی کلر، که طبق واکنش زیر با نوترینوی الکترون واکنش می‌دهد استفاده شد :



نوترینو‌هایی که سبب انجام این واکنش می‌شوند باید کمینه انرژی در حدود 0.9 MeV داشته باشند. شار نوترینو‌هایی که می‌توانند طبق این واکنش آشکارسازی شوند را محاسبه کنید. همچنین این واکنش با یک احتمالی صورت می‌گیرد؛ با احتساب تمام این موارد، آهنگ آشکارسازی نوترینوها روی زمین با مقداری که از تئوری بدست می‌آید، همخوانی ندارد. حال با توجه به واکنش داده شده و خواص نوترینوها سعی کنید این عدم تطابق را توجه کنید.

حل سوال نهم :

ادامه حل سوال نهم :

سوال دهم (۳۰ نمره)

یکی از پیش بینی های نظریه نسبیت عام ، انحراف نور در حضور یک جسم سنگین است. رفتار این جسم سنگین همانند یک عدسی است که یک دسته پرتو موازی را به یک جهت همگرا می کند و به همین خاطر به این پدیده همگرایی گرانشی گفته می شود. به این جرم سنگین نیز لنز گفته می شود. می دانیم مقدار انحراف زاویه ای ایجاد شده در مسیر نور برابر $\delta = \frac{4GM}{bc^2}$ است که در آن M جرم لنز، G ثابت گرانش، c سرعت نور و b کمترین فاصله پرتو نور از لنز است.

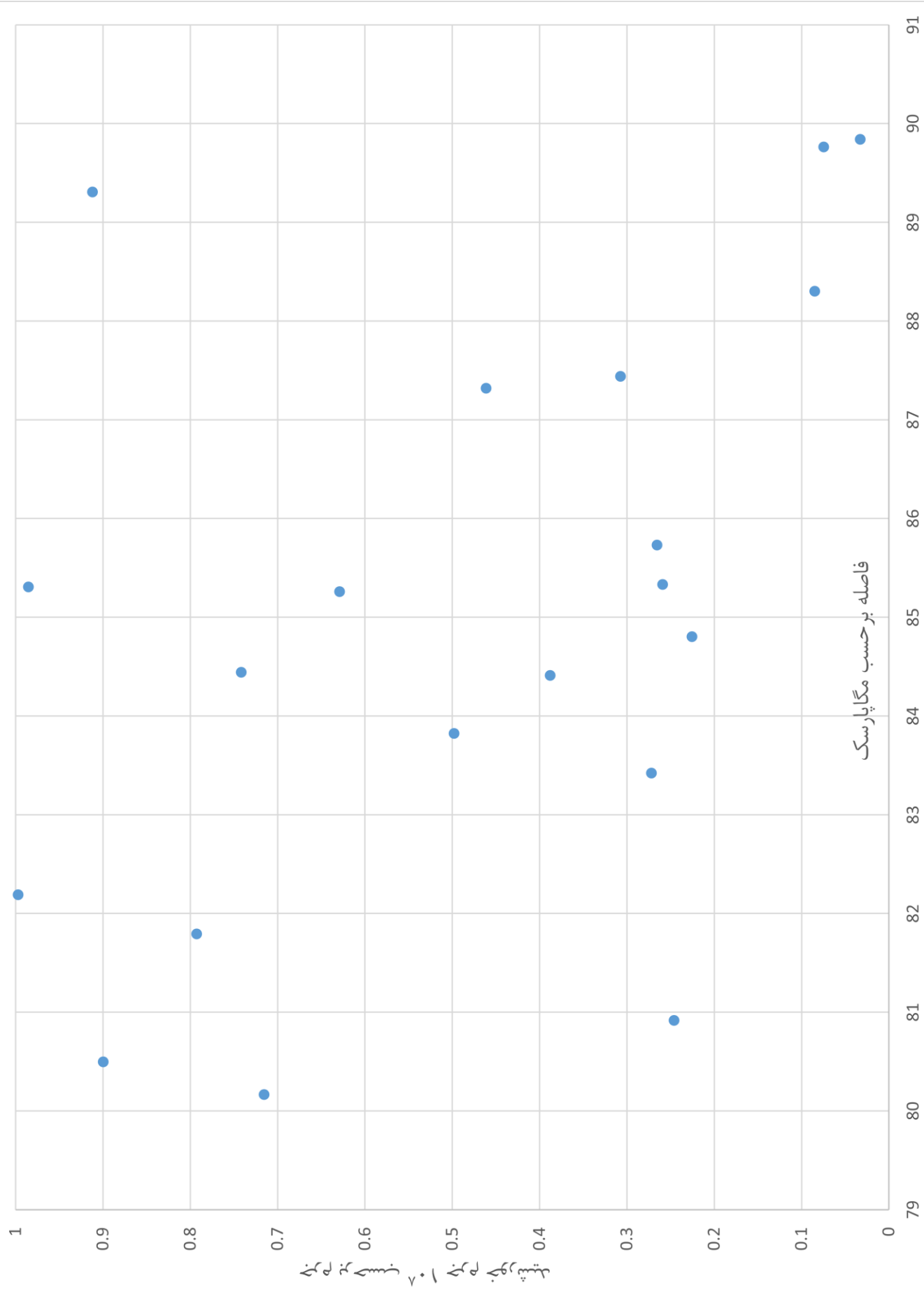
الف) در صورتی که از دید ناظر زمینی فاصله زاویه ای چشمه و لنز کم باشد، پدیده همگرایی گرانشی برای ناظر زمینی قابل مشاهده خواهد بود. در حالتی که لنز و چشمه در یک خط قرار بگیرند، تصویر چشمه یک حلقه خواهد شد ! ثابت کنید شعاع زاویه این حلقه در صورتی که لنز در فاصله d_L و چشمه در فاصله d_S قرار دارد (توجه کنید $d_S > d_L$) از رابطه زیر بدست می آید :

$$\theta_E(\text{rad}) = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_S - d_L}{d_S d_L}}$$

به این مقدار شعاع حلقه انیشتین گفته می شود.

ب) فرض کنید توانسته ایم ۲۰ جرم سنگین در خوشه کهکشانی گیسو که امکان مشاهده پدیده همگرایی گرانشی در آن ها وجود دارد را مشخص کنیم که اطلاعات مربوط به آن ها در نمودار صفحه بعد موجود است . با فرض آنکه فاصله چشمه از ما ۱۱۰ مگاپارسک باشد ، حلقه انیشتین در چه تعداد از این لنز ها توسط تلسکوپ فضایی هابل به قطر ۲,۴ متر تفکیک خواهد شد ؟ (راهنمایی : دقت کنید که این لنز ها همگی تقریباً در فاصله یکسانی از چشمه قرار گرفته اند !)

نمودار توزیع جرمی لنزها بر حسب فاصله از زمین



حل سوال دهم :

ادامه حل سوال دهم :

ادامه حل سوال دهم :

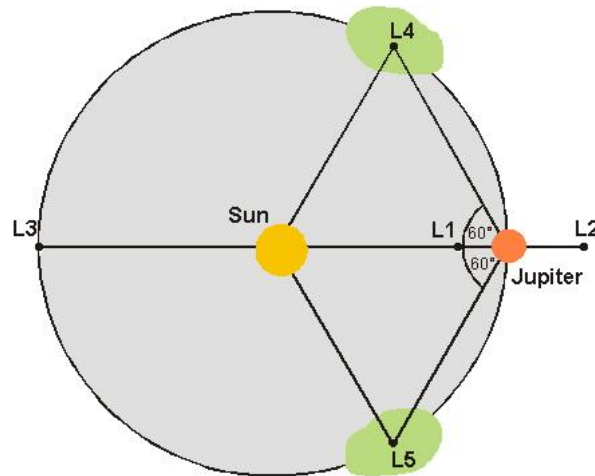
سوال یازدهم (۳۵ نمره)

تروژان ها سیارک‌هایی هستند که روی مدار مشتری قرار دارند و همراه سیستم خورشید-مشتری با همان دوره تناوب میچرخند.

الف) نشان دهید فاصله زاویه‌ای سیارک‌ها و مشتری از دید خورشید برابر با 60° درجه است.

ب) اگر به سیارکی که در نقطه موردنظر قرار دارد اختلالی وارد شود، سیارک حول نقطه موردنظر نوسان خواهد کرد. با بررسی جهات مختلف اختلال، پایداری و ناپایداری آن را بررسی کنید. (راهنمایی: جهت عمود بر صفحه مداری و به سمت مرکز جرم سیستم و به سمت خلاف مرکز جرم جهات مختلف اختلال است.)

به دلیل این اختلال‌های بوجود آمده، یک سیارک فقط در این نقطه دیده نمیشود بلکه تجمعی از سیارک‌ها حول نقطه لاگرانژی دیده می‌شود که این تجمع را برای سادگی کروی در نظر میگیریم. قصد داریم با استفاده از رصد شعاع این کره را حساب کنیم (که میتوان گفت که دامنه میانگین نوسانات این سیارک‌ها است که مقدار کوچکی است). تلسکوپی را به سمت نقطه‌ای تصادفی از دایره البروج نشانه میرویم.



ج) کشیدگی مشتری از دید زمین چقدر باشد تا احتمال یافتن این گونه سیارک‌ها بیشینه شود؟ (برای جواب خود اثبات یا استدلال قانع کننده بیاورید.)

د) پس از ۲۴ بار نشانه رفتن تصادفی به نقطه‌ای روی دایره البروج بالاخره تروژانی را دیدیم. تروژان بودن آن را با بررسی حرکتش متوجه شدیم. فاصله زاویه‌ای نقطه‌ای که حول آن نوسان می‌کند نیز از مشتری از دید زمین 73° درجه است. شعاع کره تروژان‌ها را بیابید.

حل سوال یازدهم :

ادامه حل سوال یازدهم :

ادامه حل سوال یازدهم :

ادامه حل سوال یازدهم :